Ніка Джус,
Ілона Іщук

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ У ПРИРОДНИЧИХ НАУКАХ

Вивчаючи явища природи, розв'язуючи різноманітні задачі з фізики, техніки, економіки, біології не завжди можна безпосередньо встановити прямий зв'язок між величинами, що описують той чи інший еволюційний процес. Здебільшого можна встановити зв'язок між цими величинами (функціями) та швидкостями їхньої зміни відносно інших (незалежних) змінних величин. При цьому виникають рівняння, в яких невідомі функції містяться під знаком похідної. Ці рівняння називаються диференціальними. Прикладом найпростішого диференціального рівняння є рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x)$, де $f(x)$ – відома, а $y = y(x)$ шукана функція незалежної змінної x. Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називається кожна функція $y = f(x)$, яка перетворює рівняння в тотожність.

Мати безліч розв'язків це характерна властивість диференціальних рівнянь. Тому, розв'язавши диференціальне рівняння, яке описує перебіг певного процесу, не можна одночасно знайти залежність між величинами, що характеризують цей процес. Щоб вибрати з нескінченної множини залежностей ту одну, яка притаманна саме цьому процесу, треба мати додаткову інформацію, наприклад знати початковий стан процесу.

Розглянемо кілька задач фізики, хімії, біології екології та економіки, що приводять до диференціальних рівнянь.

Диференціальні рівняння в хімії

Задача 1. В резервуарі є a кг водяного розчину солі. В якому міститься b кг солі. В певний момент часу включається пристрій, який неперервно подає в резервуар c кг чистої води за секунду і одночасно забирає з нього щосекунди c кг розчину. При цьому в самому резервуарі рідина неперервно перемішується. Як змінюється з часом кількість солі в резервуарі?

Розв'язання. Момент початку процесу візьмемо за початок відліку часу t. Нехай $m(t)$ – шукана функція, значення якої в кожний момент часу t виражає кількість солі в резервуарі. За умовою задачі $m(0) = b$. Це поки що єдине значення шуканої функції $m(t)$, яке відоме.

Основна складність задачі полягає в тому, що концентрація розчину неперервно змінюється. Проте, застосовуючи належну методику розв'язування задачі, можна за допомогою цієї неперервної зміни перетворити цю, на перший погляд, основну складність у вирішальний засіб досягнення мети.

Розглянемо зміни, що відбудуться в резервуарі за досить малий проміжок часу $[t, t+\Delta t]$, де t – деякий фіксований момент часу.

На початку цього проміжку в резервуарі міститься $m(t)$ кг солі, а в кінці $m(t+\Delta t)$ кг. Різниця $m(t)-m(t+\Delta t)$ – це кількість солі, яка витекла з резервуару з розчином за час Δt.

Оскільки концентрація розчину протягом часу спостереження спадала від $\frac{m(t)}{a}$ до $\frac{m(t+\Delta t)}{a}$, то $\frac{m(t+\Delta t)}{a}c\Delta t \le m(t)-m(t+\Delta t) \le \frac{m(t)}{a}c\Delta t$, причому нерівності є строгими, якщо $c \ne 0$ і $b \ne 0$. Розділимо ці нерівності на Δt, матимемо $\frac{m(t+\Delta t)}{a}c \le -\frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t} \le \frac{m(t)}{a}c$.

Ураховуючи характер досліджуваного процесу, робимо висновок, що функція Δt неперервна. Отже,

$$\lim_{\Delta t \to 0} m(t+\Delta t) = m(t),\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t} = -\frac{c}{a}m(t).$$

Шукана функція Δt в кожній точці t має похідну: $m'(t) = -\frac{c}{a}m(t)$

Це рівняння збігається з рівнянням $y'(x) = ky(x)$, тому з урахуванням формули $y = Ce^{kx}$ і умови $m(0) = b$ шукана функція, що описує зміну з часом кількості солі в резервуарі, має вигляд: $m(t) = be^{-\frac{c}{a}t}$.

Диференціальні рівняння у фізиці

Задача 2. Нехай тіло, що має температуру θ_0, у момент часу $t = 0$ поміщене в температурне середовище $a(a_0 < \theta_0)$. Потрібно знайти закон, за яким змінюється температура тіла з часом.

Розв'язання. Шукана температура є функцією часу, яку позначимо через $\theta(t)$. З фізики відомо, що швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. Враховуючи, що функція $\theta(t)$ спадна, а також механічний зміст похідної, отримуємо:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t)-a],\ \text{де } k - \text{ коефіцієнт пропорційності} \qquad (3)$$

Співвідношення (3) є математичною моделлю даного фізичного процесу. Воно називається диференціальним рівнянням, оскільки разом з невідомою функцією $\theta(t)$ в нього входить і її похідна. Диференціальне рівняння (3) може описувати й інші фізичні процеси. Наприклад, радіоактивний розпад також описується рівнянням (3) при $a = 0$.

Нескладно перевірити розв'язок рівняння (3), що має вигляд: $\theta t = Ce^{-kt} + a$, де C – довільна стала. Значення цієї сталої можна знайти з умови $x = Ce^{-at} + te^{at}$, з якого випливає, що $\theta_0 = c + a$, а отже, $C = \theta_0 - a$.

Таким чином, шуканий розв'язок має вигляд $\theta(t) = (\theta_0 - a)e^{-kt} + a$.

Вивчення об'єктів і процесів, що виникають у природі та в результаті

діяльності людини, полягає у виявленні їх властивостей з метою прогнозування поведінки об'єкта системи та вибору оптимального керування ними. Диференціальні рівняння широко використовуються на практиці, зокрема для опису перехідних процесів, коливань, теплопровідності, деформації балок і пластин, поширення електричного струму у провіднику тощо.

Список використаних джерел

1. Матохнюк Л. О., Блінніков Г. П. Методика розв'язування прикладних задач за допомогою диференціальних рівнянь. 2011, С. 388–399.
2. Найко Д. А., Новицька Л. І. Завдання з математики для студентів агрономічного факультету: збірник завдань з математики для проведення практичних, лабораторних занять, організації самостійної роботи зі студентами агрономічного факультету. Вінниця: Видавничий центр ВДАУ, 2006, 71 с.
3. Кремень В. Освіта в XXI столітті має стати пріоритетом у будь-якому суспільстві. *Математика в школі*. 2002. С. 2–4.

Андрій Рожанський,
Ігор Дружинін,
Леон Рокочук,
Роман Діденко

БЕЗПЕКА ПОЧИНАЄТЬСЯ З ПАРОЛІВ

В еру стрімкого розвитку та масового розповсюдження інформаційно-комунікаційних технологій, без яких сучасне суспільство не може обійтися, досить гостро постає питання безпеки. Кожен користувач, використовує як мінімум два пристрої: комп'ютер/ноутбук і смартфон, але не завжди задумується про необхідність встановлення належного захисту на свої гаджети. Саме тому, слід приділяти даному аспекту значної уваги [1]. Наразі, навіть найкращі методи безпеки не можуть гарантувати 100 % захист даних користувачів, але відмова від їх використання взагалі знижує рівень безпеки до нуля. Шкідливі програмні засоби постійно модифікуються їх розробниками для того, щоб обійти всі можливі засоби захисту, але і розробники засобів для забезпечення безпеки постійно оновлюють сигнатури своїх продуктів, що дозволяє знешкоджувати більшість загроз. Звісно, якщо сам користувач не дозволить виконання підозрілої програми або відкриє заражений файл та проігнорує застереження.

Авторизований доступ до своїх гаджетів, програм, онлайн сервісів тощо користувачі отримують за допомогою паролів, створенню,