Тригонометрія

ПРЕДИСЛОВИЕ

Русская математическая литература не богата сборниками задач, посвященных высшей алгебре. Следует признаться, что за исключением небольших отделов, отведенных высшей алгебре в сборниках задач по анализу и играющих там по необходимости второстепенное значение, больше мы ничего не имеем.

Правда, и иностранная литература не на много богаче нас в этом отношении. Если не считать довольно значительного количества прекрасных задач, опубликованных разными лицами в таких журналах, как: „Nouvelles Annales de Mathématiques", „Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung", „Quarterly Journal of Mathematics", или рассеянных на страницах отдельных мемуаров, если забыть, что всякий английский курс в согласии с превосходным правилом Ньютона: „Exempla docent non minus quam praecepta" всегда иллюстрируется и сопровождается задачами, опять мы ничего не встретим кроме скромных отделов, посвященных высшей алгебре на страницах сборников задач по анализу.

Пополнить этот пробел в отношении основных отделов высшей алгебры, дать систематический сборник задач в пределах ее элементов является целью настоящего задачника.

Намерением автора было коснуться всех основных отделов алгебры. Однако разросшийся объем сборника заставил отказаться от этой мысли и ограничить круг вопросов элементами этой науки.

Многими интересными и важными в приложениях отделами пришлось при этом пожертвовать. Укажем здесь некоторые из них: опущены вопрос об отделении и вычислении комплексных корней уравнений, учение о квадратичных формах с его обширными приложениями, учение об инвариантах, теория групп и ее алгебраические приложения; по той же причине не помещены такие методы вычисления корней уравнений, как способ Греффе, способ итераций, графический способ.

Автор предпочел сказать обстоятельнее о немногом, чем понемножку обо всем.

Выпуская этот задачник, автор надеется, что в дальнейшем ему удастся восполнить то, на чем он сейчас вынужден остановиться.

А. Журавский.

ОТДЕЛ I

КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО.

§ 1. Представление комплексного числа в тригонометрической форме.

Задачи.

1. Представить число $1-i$ в тригонометрической форме.

Модуль r комплексного числа $1-i$ находится из равенства:

$$r=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

Аргумент φ определяется соотношениями

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\varphi=\frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Простейшее значение φ:

$$\varphi=-\frac{\pi}{4}.$$

Число $1-i$ *напишется так:*

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Представить в тригонометрической форме числа:

2. ± 1.
3. $\pm i$.
4. $\pm 1+i$.
5. $\pm 1\pm i\sqrt{3}$.
6. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$.
7. $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$.
8. $1+\sin\alpha+i\cos\alpha$.
9. $1+i\operatorname{tg}\alpha$.
10. Представить в тригонометрической форме число

$$\frac{1+ia}{1-ia},$$

положив $a=\operatorname{ctg}\alpha$.

11. Представить число $m=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ в обыкновенной форме.

Зная, что $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, найдем, что

$$m=\sqrt{3}+i.$$

12. Представить в обыкновенной форме числа

$$m = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right),\quad n = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

§ 2. Действия над комплексными числами.

1. Действия над комплексными числами производятся согласно формулам

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i;$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-ba)+i\ (ad+bc);$$
$$(a+bi):(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

2. В том случае, когда числа m и n заданы в тригонометрической форме

$$m = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\qquad n = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

произведение и частное находятся по формулам:

$$m\cdot n = r\cdot r_1\ [\cos(\varphi+\varphi_1) + i\sin(\varphi+\varphi_1)],\ m:n = \frac{r}{r_1}[\cos(\varphi-\varphi_1) + i\sin(\varphi-\varphi_1)].$$

Задачи

13. Вычислить выражение:

$$(3+2i)\ (7+4i) - 6\ (1+i)^3$$

Произведение

$$(3+2i)\ (7+4i) = 13+26i$$

Степень

$$(1+i)^3 = 1+3i+3i^2+i^3 = -2+2i$$

Окончательно находим, что

$$(3+2i)\cdot(7+4i) - 6\ (1+i)^3 = 13+26i-6\ (-2+2i) = 25+14i.$$

Вычислить выражение:

14. $\dfrac{(i-1)^7}{(i+1)^5}$. 15. $\dfrac{(13+2i)^2-(3+i)(2-i)}{3+4i} - i\ \dfrac{2i+(5i-1)^2}{3\ (1+i)-(3-i)}$

16. $\dfrac{(2+i)^2-2i+3i^3}{1-i} + (3+2i)$.

17. $\dfrac{(1+i)\ (1-i)^4}{(1+2i)^3} - 3i\,\dfrac{(i+2)\ (2i+1)}{3+i}$

Вычислить следующие выражения, положив $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$:

18. $(a\omega+b\omega^2)\ (a\omega^2+b\omega)$
19. $(a+b+c)\ (a+b\omega+c\omega^2)\ (a+b\omega^2+c\omega)$
20. $(a+b\omega+c\omega^2)\ (a+b\omega^2+c\omega)$.
21. $(a+b\omega+c\omega^2)^3 + (a+b\omega^2+c\omega)^3$

Найти величину суммы:

22*. $\binom{n}{1} - 3\binom{n}{3} + 3^2\binom{n}{5} - 3^3\binom{n}{7} + \ldots$

Знак $\binom{n}{k} = \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots k \cdot 1 \cdot 2 \ldots (n-k)}$ обозначает число сочетаний из n элементов по k.

23*. Вычислить сумму

$$1 - 3\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{4} - 3^3\binom{n}{6} + \ldots$$

24*. Показать тождество

$$S_k^3 \; T_k - S_k \; T_k^3 = 0,$$

где

$$S_k = 1 - \binom{k}{2} + \binom{k}{4} - \binom{k}{6} + \ldots, \quad T_k = \binom{k}{1} - \binom{k}{3} + \binom{k}{5} \ldots$$

и вычислить суммы S_k и T_k.

§ 3. Извлечение корня из комплексного числа.

1. Извлечение корня степени n из комплексного числа $a + bi$ приводится к определению двух вещественных чисел x, y, удовлетворяющих уравнению

$$(x + iy)^n = a + bi.$$

2. Квадратный корень $x + iy$ из комплексного числа $a + bi$ может быть вычислен по формуле

$$x + iy = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \cdot \operatorname{sign} b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right],$$

где $\operatorname{sign} b = 1$ при $b > 1$, $\operatorname{sign} b = -1$ при $b < 0$, $\operatorname{sign} b = 0$ при $b = 0$.

3. Корень степени n из числа $a + bi = z\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ имеет n значений $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Любое значение z_k может быть найдено по формуле

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

Задачи

25. Вычислить корень $\sqrt{i+1}$

Пользуясь формулой извлечения квадратного корня, получаем:

$$\sqrt{1+i} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{1^2+1^2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{1^2+1^2}-1}{2}}\right] =$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$$

Вычислить квадратный корень:

26. $\sqrt{i}$. **27.** $\sqrt{3+4i}$. **28.** $\sqrt{17-24i}$. **29.** $\sqrt{8-6i}$.

Знаком * отмечены более трудные задачи.

30. Решить уравнение $x^2 + x + 1 - i = 0$.

Вычислить корни уравнений:

31. $x^2 + (5 - 2i)x + 5(1 - i) = 0$.

32. $x^2 + (1 - 2i)x - 2i = 0$.

33. $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

34. $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$.

35. Найти $\sqrt[3]{8}$

Представив число 8 в тригонометрической форме $8 = 8(\cos 0 + i \sin 0)$, получаем все значения корня $\sqrt[3]{8}$ по формуле

$$\sqrt[3]{8} = 2 \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}\right), \ (k = 1, 2, 3),$$

что дает

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3}, \ z_2 = -1 - i\sqrt{3}, \ z_3 = 2.$$

Вычислить кубический корень:

36. $\sqrt[3]{27}$.

37. $\sqrt[3]{i}$.

38. $\sqrt[3]{1+i}$

39. Найти корень $\sqrt[6]{i}$.

40. Вычислить корни 5-й степени из единицы.

Вычисление корня 5-й степени из единицы приводится к нахождению числа z, удовлетворяющего уравнению

$$z^5 = 1$$

Один корень $z_0 = 1$. Остальные значения корня удовлетворяют уравнению

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Это уравнение возвратное. Решая его согласно известным правилам (следует положить $z + \frac{1}{z} = u$), находим его корни

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \qquad -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Отсюда уже легко найти, что

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i \sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

приняв во внимание знаки тригонометрических функций $\cos\frac{2k\pi}{5}$, $\sin\frac{2k\pi}{5}$ при различных значениях k.

Найти корни:

41. $\sqrt[5]{-1}$.

42. $\sqrt[8]{1}$.

43. $\sqrt[6]{64}$

44*. Показать, что все корни уравнения

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$$

вещественны и различны.

§ 4. Количество с комплексным показателем.

1. Количество с комплексным показателем определяется равенством

$$e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

2. Логарифм комплексного числа имеет бесчисленное множество значений и определяется равенством:

$$\log(a+bi) = \log r + i(\varphi + 2k\pi) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где k принимает все возможные целые значения, как положительные, так и отрицательные, а r и φ — модуль и аргумент числа $a + bi$.

Задачи

45. Вычислить $\log i$.

46. Вычислить $\log(1+i)$.

47. Вычислить $\log(1+e^{\alpha i})$.

48. Показать, что $\dfrac{e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}}{2} = \cos\varphi$, $\dfrac{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{2i} = \sin\varphi$.

49. Вычислить сумму: $\cos\alpha + \cos(\alpha+2h) + \ldots + \cos(\alpha+2nh)$.

Рассмотрим сумму $S = e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+2h)} + \ldots + e^{i(\alpha+2nh)}$.

Предложенная сумма есть вещественная часть S. Имеем

$$S = e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+2h)} + \ldots + e^{i(\alpha+2nh)} = e^{i\alpha} \cdot \frac{e^{2(n+1)hi}-1}{e^{2hi}-1} =$$

$$= e^{i(\alpha+nh)} \cdot \frac{e^{(n+1)hi} - e^{-(n+1)h}}{e^{hi} - e^{-hi}}$$

Приняв во внимание, что $\dfrac{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{2i} = \sin\varphi$, находим

$$e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+2h)} + \ldots + e^{i(\alpha+2nh)} = e^{i(\alpha+nh)} \frac{\sin(n+1)h}{\sin h}$$

Отделив вещественную часть от мнимой, получаем

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+2h) + \ldots + \cos(\alpha+2nh) = \frac{\cos(\alpha+nh)\sin(n+1)h}{\sin h}$$

Вычислить сумму

50. $1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^n\cos n\varphi$.

51. $a\sin^2\varphi + a^2\sin^2 2\varphi + \ldots + a^n\sin^2 n\varphi$.

52. $1 + a\cos^3\varphi + a^2\cos^3 2\varphi + \ldots + a^n\cos^3 n\varphi$.

53. $\cos\varphi + a^2\cos 3\varphi + \ldots + a^n\cos(2n+1)\varphi$.

54. $\sin^3 2\varphi + \sin^3 4\varphi + \ldots + \sin^3 2n\varphi$.

55. Выразить $\cos^n\varphi$ через косинусы кратных дуг, воспользовавшись соотношением задачи 48.

56. Выразить $\sin^n\varphi$ через тригонометрические величины кратных дуг.

§ 5. Геометрическое изображение комплексного числа.

1. Геометрическим изображением комплексного числа $z = x + iy$ является точка с координатами x, y.

2. Комплексное число $z = x + iy$ может быть изображено также вектором, идущим из начала координат в точку (x, y).

Задачи.

57. В круг радиуса R с центром в начале координат вписан правильный многоугольник. Определить положение его вершин, если известно, что одна из них находится в точке $z_0 = Re^{\alpha i}$.

Расстояние каждой вершины от начала равно R. Центральный угол, соответствующий стороне многоугольника, равен $\frac{2\pi}{n}$. Угол между осью OX и радиусом-вектором, идущим в вершину z_k, равен $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$.

$$z_k = R\left[\cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

58. Написать условие, что точка $z = x + iy$ находится на расстоянии R от точки $m = a + bi$.

59. Написать условие, что точка z находится внутри окружности радиуса R с центром в точке $m = a + bi$.

60. Определить положение вершины z_k правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса R с центром в точке $m = a + bi$, если известно, что радиус, соединяющий одну из вершин с центром, параллелен оси OY.

61. Найти положение вершины правильного треугольника, если известно, что две из его вершин находятся в точках 1, $2 + i$.

62. Определить положение вершин правильного n-угольника, зная, что две смежные вершины находятся в точках 0, 1.

63. Зная две противоположные вершины z_0, z_2 квадрата, найти остальные его вершины.

64. Зная положение m, n, p трех вершин параллелограмма, найти четвертую его вершину.

65. Определить положение центра окружности, описанной около правильного шестиугольника, если известно, что две смежные его вершины находятся в точках 1, i.

66. Найти середину отрезка, концы которого помещаются в точках z_1, z_2.

67. Найти положение центра тяжести масс 2 и 3, помещенных в точках $1 - 2i$, $1 + 3i$.

68. Найти положение центра тяжести масс m_1, m_2, ... m_n, помещенных в точках z_1, z_2, ... z_n.

69. Показать, что равенства

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 суть числа вещественные, выражают необходимое и достаточное условие, что три точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой.

70. Точки z_1, z_2, ... z_n суть вершины выпуклого многоугольника. Как расположена относительно многоугольника точка $z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots + \lambda_n z_n$, где λ_1, λ_2, ... λ_n суть вещественные числа и $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$?

71. Найти положение центра тяжести равных масс, расположенных в вершинах правильного многоугольника.

72. Зная, что три вершины треугольника находятся в точках 0, 1, i, положение третьей вершины подобного ему и сходственно расположенного треугольника при условии, что вершины, соответствующие 0 и 1, помещаются в точках $1+i$ и $1-i$.

73. Найти на плоскости комплексных чисел такую точку z, чтобы треугольники $z\,z_1 z_2$ и $z\,z_1' z_2'$ были подобны и сходственно расположены.

74. Производится построение. Отрезок a, где a вещественное число, делится на n равных частей. В точке M_0, соответствующей числу 1, проводится перпендикуляр к оси вещественных чисел. На перпендикуляре откладывается в сторону положительной мнимой оси отрезок $\frac{a}{n}$, начало которого в точке M_0. Пусть M_1 его конец. На прямой OM_1 строится треугольник OM_1M_2, подобный и сходственно расположенный с треугольником OM_0M_1. На линии OM_2 строится треугольник OM_2M_3, подобный и сходственно расположенный с треугольником OM_1M_2 и т. д. Определить вершину M_k и найти модуль и аргумент числа, ей соответствующего.

75*. Определить предельное положение точки M_n предыдущей задачи при n, возрастающем беспредельно.

76. Определяя $e^{\varphi i}$ равенством: $e^{\varphi i} = \underset{n\to\infty}{\text{пред}} \left(1+\frac{\varphi i}{n}\right)^n$, показать формулу Эйлера

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

77. Вектор $a+bi$ делится на n равных частей. На плоскости отмечаются точки $0\ldots 0$, $M_0\ldots 1$, $M_1\ldots 1+\frac{a+bi}{n}$. На линии OM_0 строится треугольник OM_1M_2, подобный и сходственно расположенный с треугольником OM_0M_1. На линии OM_2 строится треугольник OM_2M_3, подобный и сходственно расположенный с треугольником OM_1M_2, и т. д. Определить число z_k, соответствующее вершине M_k. Найти модуль и аргумент z_k.

78. Найти предельное положение вершины M_n предыдущей задачи при n, возрастающем беспредельно.

79. Определяя e^{a+bi} равенством

$$e^{a+bi} = \underset{n\to\infty}{\text{пред}} \left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n,$$

вывести соотношение Эйлера

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b).$$

80. Показать тождество

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\,(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

и дать его геометрическую интерпретацию.

Положим число $z_1 = x_1+y_1 i$; $z_2 = x_2+y_2 i$. Тогда получаем последовательно

$$|z_1+z_2|^2 = (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2,\ |z_1-z_2|^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\,(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2) = 2\,(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

Истолковывая числа z_1 и z_2 в виде двух векторов, выходящих из начала 0, построим на этих векторах как на сторонах параллелограмм. Его четвертая вершина будет находиться в точке $z_1 + z_2$. Диагонали изобразятся векторами $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, и доказанное тождество дает теорему: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

81. Показать тождество

$$|u| + |v| = \left|\frac{u+v}{2} + \sqrt{u \cdot v} + \frac{u+v}{2} - \sqrt{uv}\right|$$

82. Показать, что равенство

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_1 - z_0|^2 + |z_2 - z_0|^2$$

есть следствие соотношения

$$z_2 - z_0 = \lambda i\,(z_1 - z_0),$$

λ — вещественное число, и наоборот. Дать геометрическое истолкование.

83. Написать уравнение прямой, проходящей через точки z_1, z_2. Если точка z лежит на прямой, проходящей через z_1 и z_2, то разности $z - z_1$, $z_2 - z_1$ отличаются только вещественным множителем t.

$$z - z_1 = (z_2 - z_1) \cdot t.$$

Придавая в этом равенстве числу t вещественное значение, получим наоборот точку на прямой, проходящей через z_2 и z_1. Написанное равенство и есть уравнение прямой.

84. Написать уравнение прямой, проходящей через точки 1, i.

85. Через точку $3 + 2i$ провести прямую, параллельную вектору $1 - i$.

86. Из точки $7 - 2i$ опустить перпендикуляр на прямую, соединяющую точки 2 и $1 + i$.

87. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от точек 2 и $3i$.

88. Найти уравнение биссектрисы внутренней и внешней угла при вершине z_0 в треугольнике z_0, z, z_2.

89. Найти геометрическое место точек, уравнение которого

$$z = \frac{1+it}{1-it}, \quad t \text{ вещественное.}$$

Положив $z = x + iy$, находим

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ y = \frac{2t}{1+t^2},\ x^2 + y^2 = 1.$$

Далее, рассматривая изменение x и y, когда t возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, легко убедиться, что z описывает полную окружность, двигаясь против часовой стрелки.

90. Найти геометрическое место точек, уравнение которых

$$\frac{z-a}{z-b} = te^{\alpha i},$$

α и t — вещественные числа.

91. Определить геометрическое место точек, удовлетворяющих условию

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \lambda,$$

λ — вещественное число.

92. Показать, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы четыре точки лежали на одной окружности, выражается равенством

$$\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} = \lambda,$$

где λ — вещественное число.

93. Показать, что преобразование $z' = z + z_0$ соответствует параллельному перемещению всех точек плоскости на величину вектора z_0.

94. Какой геометрический смысл имеет преобразование $z' = z \cdot e^{\alpha i}$?

95. Выяснить геометрический смысл преобразования $z' = \frac{a^2}{z}$, a — вещественное число.

В какие линии превращаются окружности?

96. Выяснить геометрический смысл преобразования $z' = \lambda z$, где λ — вещественное число.

97. Показать, что преобразование

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

равносильно ряду отдельных преобразований $z' = z + a$, $z' = mz$, $z' = \frac{1}{z}$

В какие линии переходят окружности?

98. Изучить преобразование

$$z = \frac{z' - a}{z' - b}$$

Какие линии соответствуют лучам, выходящим из начала, и что соответствует концентрическим окружностям?

99. В какие линии превращает преобразование $z' = e^z$ прямые параллельные вещественной и мнимой оси? Какие линии соответствуют прямым не параллельным осям?

ОТДЕЛ II.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. Понятие об определителе и его основные свойства.

1. Матрица или таблица есть совокупность элементов a_{ik}, расположенных в форме прямоугольника

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} \ldots a_{mn} \end{matrix}$$

2. Определитель порядка n, составленный из элементов квадратной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma\, (-1)^{A\alpha_1 \ldots \alpha_n} a_{\alpha_1 1} \cdot a_{\alpha_2 2} \ldots a_{\alpha_n n},$$

есть сумма всех возможных слагаемых вида

$$(-1)^{A\alpha_1 \ldots \alpha_n} a_{\alpha_1 1} \cdot a_{\alpha_2 2} \ldots a_{\alpha_n n},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ — перестановка значков $1, 2, \ldots n$ и число $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ равно числу обращений (инверсий) между элементами перестановки.

3. Знак, с которым произведение $a_{\alpha_1 \beta_1} \cdot a_{\alpha_2 \beta_2} \ldots a_{\alpha_n \beta_n}$ входит в определитель, определяется знаком числа $(-1)^{A\alpha_1 \ldots \alpha_n + B\beta_1 \ldots \beta_n}$, где $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ есть число обращений между элементами перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ и $B_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ есть число обращений между элементами перестановки $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$.

4. Основные свойства определителя.

I. Определитель не меняется от замены строк столбцами.

II. При перестановке двух строк или двух столбцов определитель меняет знак.

III. Определитель есть линейная функция от элементов какой-либо строки или столбца.

Задачи.

1. С каким знаком входит в определитель произведение элементов, расположенных по второй диагонали?

Произведение элементов, расположенных по второй диагонали, равно $a_{n1} \cdot a_{n-12} \ldots a_{1n}$. Указатели строк образуют перестановку $n, n-1, n-2, \ldots 1$. В этой перестановке элемент n образует $n-1$ обращение. Элемент $n-1$ образует $n-2$ обращения и т. д. Общее число имеющихся в перестановке обращений равно

$$n-1+n-2+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Знак произведения определяется знаком числа $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

2. Определить знак произведения $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \ldots a_{n1}$, входящего в определитель n-го порядка.

3. Определить знак произведения $a_{21}\, a_{43} \ldots a_{2n,\,2n-1} \cdot a_{12}\, a_{34} \ldots a_{2n-1,2n}$, входящего в определитель порядка $2n$.

4. Определить знак произведения $a_{14} \cdot a_{65} \cdot a_{43} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{56}$, содержащегося в определителе 6-го порядка.

5. Определить знак произведения $a_{45} \cdot a_{32} \cdot a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{53}$ в определителе 5-го порядка.

6. Содержится ли произведение $a_{12}\, a_{23} \ldots a_{n-1\,n}\, a_{kk} (k = 1, 2, \ldots n)$ в определителе порядка n и если нет, то почему?

7. С каким знаком содержится произведение $a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{61} \cdot a_{35} \cdot a_{46} \cdot a_{12}$ в определителе 6-го порядка?

8. Каковы должны быть значки i, k, чтобы произведение $a_{34}\, a_{i2}\, a_{21}\, a_{k3}$ входило в определитель 4-го порядка со знаком минус (—)?

9. Выбрать значки i и k так, чтобы произведение $a_{1i} \cdot a_{23} \cdot a_{4k} \cdot a_{51} \cdot a_{32}$ входило со знаком + в определитель 5-го порядка.

10. Выбрать указатели i и k так, чтобы произведение

$$a_{k1} \cdot a_{n-1,\,2} \cdot a_{n-2,\,3} \cdot \ldots \cdot a_{2,\,n-1} \cdot a_{in}$$

имело знак плюс (+). Число n четное.

11. Найти знак произведения $a_{m1} \cdot a_{m+1,2} \cdot a_{m+2,\,3} \cdot \ldots \cdot a_{m+1,n}$ $(m \leqq n)$ предполагая, что n—число нечетное.

12. Показать, что определитель n-го порядка, в котором элементы a_{ik}, a_{ki} числа комплексные сопряженные, — число вещественное. Прежде всего легко видеть, что элементы a_{kk} — числа вещественные, ибо эти элементы— числа сопряженные сами с собой.

Заменим в определителе строки столбцами. Определитель превратится в число комплексное, сопряженное с прежним его значением, так как каждый элемент заменится числом, с ним сопряженным. Определитель от замены строк столбцами не изменяет своей величины. Отсюда следует, что рассматриваемый определитель—число вещественное.

13. Какому условию должно удовлетворять число n, чтобы определитель n-го порядка, элементы которого удовлетворяют условию:

$$a_{kk} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots n), \quad a_{jk} = i\, a_{kj} \ (j > k), —$$

a_{jk} вещественное число,—был числом вещественным независимо от значений, принимаемых элементами?

14. При каком n определитель задачи 13 есть число чисто мнимое?

15. Показать, что при нечетном n определитель задачи 13 равен $A(1 + i)$ или $A(1 - i)$, где A есть число вещественное

16. Вычислить определитель n-го порядка, элементы которого удовлетворяют соотношению:

$$a_{kk} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots n), \ a_{ik} = -a_{ki},$$

предполагая, что n—число нечетное.

17. Как изменится величина определителя, если к элементам каждой строки прибавить соответствующий элемент предыдущей?

18. Что произойдет с величиной определителя, если от элементов каждого столбца отнять величины, пропорциональные соответствующим элементам следующего столбца?

19. Как измеряется величина определителя от прибавления к элементам каждой строки соответствующих элементов всех последующих строк?

§ 2. Миноры определителя.

1. Миноры n—m-го порядка получатся из определителя порядка n путем вычеркивания в нем m строк и m столбцов.

2. Минор порядка m, дополнительный к минору порядка n—m, получится вычеркиванием тех строк и тех столбцов, элементы коих входят в минор порядка $n - m$.

3. Алгебраическое дополнение минора есть произведение его дополнения на $(-1)^{k+i}$. Число k есть сумма указателей столбцов, а i сумма указателей строк, входящих в состав минора.

4. Определитель n-го порядка Δ может быть разложен по элементам i-го столбца, согласно следующей формуле:

$$\Delta = a_{1i} \cdot A_{1i} + a_{2i} \cdot A_{2i} + \ldots + a_{ni} \cdot A_{ni},$$

где A_{ni} обозначает алгебраическое дополнение элемента a_{ni}.

Разложение по элементам k-ой строки имеет вид:

$$\Delta = a_{k1} \cdot A_{k1} + a_{k2} \cdot A_{k2} + \ldots + a_{kn} \cdot A_{kn}.$$

5. Определитель n-го порядка может быть представлен в виде суммы всех возможных миноров порядка m, образованных из элементов каких-либо m строк, умноженных на их алгебраические дополнения.

Задачи.

20. Найти в определителе 8-го порядка алгебраическое дополнение минора

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{51}, & a_{52}, & a_{53}, & a_{54} \\ a_{81}, & a_{82}, & a_{83}, & a_{84} \end{matrix}$$

Данный минор содержит элементы первых четырех столбцов и элементы 1-й, 3-й, 5-й и 8-й строки. Чтобы получить дополнение данного минора, зачеркиваем элементы первых четырех столбцов и 1-й, 3-й, 5-й и 8-й строки в определителе 8-го порядка. Находим:

$$\begin{matrix} a_{25}, & a_{26}, & a_{27}, & a_{28} \\ a_{45}, & a_{46}, & a_{47}, & a_{48} \\ a_{65}, & a_{66}, & a_{67}, & a_{68} \\ a_{75}, & a_{76}, & a_{77}, & a_{78} \end{matrix}$$

Остается умножить этот определитель на —1 в степени, равной сумме $1+2+3+4+1+3+5+8=27$, чтобы получить алгебраическое дополнение предложенного минора.

21. Найти в определителе 4-го порядка алгебраические дополнения миноров

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13} \\ a_{41}, & a_{43} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{32}, & a_{34} \\ a_{42}, & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{21}, & a_{22}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{44} \end{vmatrix}$$

22. Отыскать в определителе порядка $2n$ алгебраическое дополнение минора

$$\begin{matrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2,\,2n-1} \\ a_{4,\,1} & a_{4,\,3} & \cdots & a_{4,\,2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n,\,1} & a_{2n,\,3} & \cdots & a_{2n,\,2n-1} \end{matrix}$$

образованного элементами четных строк и нечетных столбцов.

23. Разложить определитель 4-го порядка по минорам, составленным из элементов 2-й и 3-й строки.

§ 3. Вычисление определителей.

1. Вычисляя определитель, полезно во многих случаях преобразовать его так, чтобы элементы какой-либо строки (или столбца), кроме одного, оказались равными нулю. Разложение по элементам этой строки или столбца сводит вычисление данного определителя к вычислению определителя порядка на единицу ниже.

2. Указанное преобразование в различных случаях достигается различно. Во многих случаях оказывается возможным его совершить, производя в определенном порядке вычитание из элементов какой-либо строки (или столбца) величин, пропорциональных элементам другой строки (или столбца).

Задачи.

24. Вычислить определитель:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{matrix}$$

Вычтем из элементов каждой строки элементы первой. Получаем, что предложенный определитель,—назовем его Δ,—

$$\Delta = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{matrix}$$

Всякий определитель, у которого элементы по одну оторону главной диагонали суть нули, равен произведению диагональных элементов (это можно проверить, разлагая последовательно по элементам первой строки данный определитель и все определители, к которым он сводится

$$\Delta = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Вычислить определитель

25.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

26.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

27.
$$\begin{vmatrix} a, & a, & a & \dots & a \\ -a, & a, & x_1 & \dots & x_{n-2} \\ -a, & -a, & a & \dots & y_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a, & -a, & -a & \dots & a \end{vmatrix}$$

28.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 3 & 6 & \dots & \frac{n(n+1)}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} & \dots & \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{1\cdot 2\dots n_{n-1}} \end{vmatrix}$$

29.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{m}{1}, & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+n}{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+n-1}{n}, & \binom{m+n}{n}, & \dots & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}$$

30.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \dots & 0 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

31.
$$\begin{vmatrix} \binom{m}{p}, & \binom{m}{p+1} & \dots & \binom{m}{p+n} \\ \binom{m+1}{p}, & \binom{m+1}{p+1} & \dots & \binom{m+1}{p+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+n}{p}, & \binom{m+n}{p+1} & \dots & \binom{m+n}{p+n} \end{vmatrix}$$

32.
$$\begin{vmatrix} a^n, & (a-1)^n, & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1}, & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

33.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & \dots & n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}$$

4.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1, & x_2+1, & x_3+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1, & x_2^2+x_2, & x_3^2+x_3 & \dots & x_n^2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2}, & x_2^{n-1}+x_2^{n-2}, & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{matrix}$$

35.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1), & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{matrix}$$

где $\varphi_k(x) = x^k + a_{1k}x^{k-1} + \dots + a_{kk}$

36.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1}, & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{matrix}$$

37.

$$\begin{matrix} \binom{2^2}{1}, & \binom{3^2}{1} & \dots & \binom{n^2}{1} \\ \binom{2^4}{2}, & \binom{3^4}{2} & \dots & \binom{n^4}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{2^{2n-2}}{n-1}, & \binom{3^{2n-2}}{n-1} & \dots & \binom{n^{2n-2}}{n-1} \end{matrix}$$

38.

$$\begin{matrix} \cos^{n-1}\varphi_1, & \cos^{n-2}\varphi_1 & \dots & 1 \\ \cos^{n-1}\varphi_2, & \cos^{n-2}\varphi_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^{n-1}\varphi_n, & \cos^{n-2}\varphi_n & \dots & 1 \end{matrix}$$

39.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sin\varphi_1, & \sin\varphi_2 & \dots & \sin\varphi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-1}\varphi_2 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{matrix}$$

40.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ F_1(\cos\varphi_1), & F_1(\cos\varphi_2) & \dots & F_1(\cos\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n-1}(\cos\varphi_1) & F_{n-1}(\cos\varphi_2) & \dots & F_{n-1}(\cos\varphi_n) \end{matrix}$$

$F_k(x) = a_{0k}x^k + a_{1k}x^{k-1} + \dots + a_{kk}$

41. $$\begin{matrix} \cos n\varphi_0, & \cos(n-1)\varphi_0 & \dots & 1 \\ \cos n\varphi_1, & \cos(n-1)\varphi_1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos n\varphi_n, & \cos(n-1)\varphi_n & \dots & 1 \end{matrix}$$

---

42. $$\begin{matrix} 1+a_1, & 1 & \dots & 1 \\ 1, & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & 1 & \dots & 1+a_n \end{matrix}$$

Представив данный определитель, который ради краткости обозначим Δ_n, в виде суммы

$$\Delta_n = \begin{matrix} 1+a_1, & 1 & \dots & 1 \\ 1, & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} 1+a_1, & 1 & \dots & 1 \\ 1, & 1+a_2, & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{matrix}$$

находим, что

$$\Delta_n = a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1} + a_n \cdot \Delta_{n-1} \text{ (см. задачу 24)}$$

и далее

$$\Delta_{n-1} = a_1 a_2 \dots a_{n-2} + a_{n-1}\Delta_{n-2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta_2 = a_1 + a_2\Delta_1$$

$$\Delta_1 = 1 + a_1.$$

Полученные равенства дают:

$$\Delta_1 = a_1\left(1 + \frac{1}{a_1}\right), \quad \Delta_2 = a_1 a_2\left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right), \dots$$

$$\dots \Delta_n = a_1 a_2 \dots a_n\left(1 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

43. $$\begin{matrix} \alpha+\beta, & \alpha\beta, & 0 & \dots & 0 \\ 1, & \alpha+\beta, & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0, & 1, & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{matrix}$$

44. $$\begin{matrix} \alpha+\beta, & \alpha\beta, & 0 & \dots & 0 \\ 2, & \alpha+\beta, & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0, & 1, & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{matrix}$$

45.
$$\begin{matrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x \end{matrix}$$

46.
$$\begin{matrix} 2\operatorname{cosec} x & 1, & 0, & \dots & 0 \\ 2, & 2\operatorname{cosec} x, & 1, & \dots & 0 \\ 0, & 1, & 2\operatorname{cosec} x, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0 & \dots & 2\operatorname{cosec} x \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{matrix}$$

48.
$$\begin{matrix} a_1+x_1, & a_1+x_2, & \dots & a_1+x_n \\ a_2+x_1, & a_2+x_2, & \dots & a_2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+x_1, & a_n+x_2 & \dots & a_n+x_n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11}+x, & a_{12}+x, & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x, & a_{22}+x, & \dots & a_{2n}+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+x, & a_{n2}+x, & \dots & a_{nn}+x \end{matrix}$$

50*
$$\begin{matrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{matrix}$$

51. Представить определитель

$$\begin{matrix} a_{11}+x, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}+x, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{matrix},$$

многочлен расположен по степеням x.

Вычислить определитель

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & u_0 \\ 1 & 1! & 0 & \dots & u_1 \\ 1 & 2 & 2! & \dots & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n(n-1) & \dots & u_n \end{matrix}$$

53*.
$$\begin{matrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{matrix}$$

54.

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{matrix}$$

55.

$$\begin{matrix} n!\,a_0, & (n-1)!\,a_1, & (n-2)!\,a_2, & \dots & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{matrix}$$

56*.

$$\begin{matrix} 1, & \binom{2}{2}, & 0, & \dots & 0 \\ 1, & \binom{3}{2}, & \binom{3}{3} & \dots & 0 \\ 1, & \binom{4}{2}, & \binom{4}{3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & \binom{n}{2}, & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} \end{matrix}$$

57*.

$$\begin{matrix} 2, & 3, & 4, & n \\ 3, & 6, & 10, & \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} \\ 4, & 10, & 20, & \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n, & \frac{n(n+1)}{12}, & \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} & \dots \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{1\cdot 2\dots(n-1)} \end{matrix}$$

58*

$$\begin{matrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{matrix}$$

59*.

$$\begin{matrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ y & y & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a_n \end{matrix}$$

60.

$$\begin{matrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{matrix}$$

61*.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n, & 1, & 2, & \dots & n-1 \end{matrix}$$

62.

$$\begin{matrix} \sin\varphi, & \sin 2\varphi, & \sin 3\varphi, & \sin 4\varphi \\ \cos\varphi, & \cos 2\varphi, & \cos 3\varphi, & \cos 4\varphi \\ \sin\varphi, & 2\sin 2\varphi, & 3\sin 3\varphi, & 4\sin 4\varphi \\ \cos\varphi, & 2\cos 2\varphi, & 3\cos 3\varphi, & 4\cos 4\varphi \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sin n\varphi, & \sin(n+1)\varphi, & \sin(n+2)\varphi, & \sin(n+3)\varphi \\ \cos n\varphi, & \cos(n+1)\varphi, & \cos(n+2)\varphi, & \cos(n+3)\varphi \\ m\sin n\varphi, & (m+1)\sin(n+1)\varphi, & (m+2)\sin(n+2)\varphi, & (m+3)\sin(n+3)\varphi \\ m\cos n\varphi, & (m+1)\cos(n+1)\varphi, & (m+2)\cos(n+2)\varphi, & (m+3)\cos(n+3)\varphi \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y & y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & y & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & y & \dots & 0 \end{matrix}$$

65.

$$\begin{matrix} \sin\varphi, & \sin 2\varphi, & \dots & \sin n\varphi \\ \cos\varphi, & \cos 2\varphi, & \dots & \cos n\varphi \\ 0, & 0, & 0, 1, \dots & 1 \\ 0, & 0, & 1, 0, \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 1, 1, \dots & 0 \end{matrix}$$

66.

$$\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \alpha+\beta, & \alpha\beta, & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1, & \alpha+\beta, & \alpha\beta & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{matrix}\right\} n-1 \text{ строк} \\ \hline \left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha\beta \end{matrix}\right\} n \text{ строк} \end{matrix}$$

§ 4. Умножение определителей.

1. Произведение таблицы (A) на таблицу (B) есть таблица (C)

$$(A)\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{Vmatrix} (B)\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{Vmatrix} (C)\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix}$$

составленная согласно правилу

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \dots + a_{im}b_{km} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots n \\ k = 1, 2, \dots n \end{pmatrix}.$$

2. Если $n > m$, то определитель, составленный из элементов таблицы (C), равен 0.

3. Если $n \leqq m$, то определитель, составленный из элементов таблицы (C), равен сумме всех возможных произведений определителей порядка n, выведенных из таблицы (A), на соответствующие им определители таблицы (B) [1]).

67. Вычислить определитель, составленный из элементов

$$\left\| \begin{matrix} 1, & 1, \ldots 1 \\ x_1, & x_2, \ldots x_n \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} 1, & 1, \ldots 1 \\ y_1, & y_2, \ldots y_n \end{matrix} \right\|$$

Произведением данных таблиц является таблица

$$\left\| \begin{matrix} n, & y_1 + y_2 + \ldots + y_n \\ x_1 + x_2 + \ldots x_n, & x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \end{matrix} \right\|$$

Определитель Δ, составленный из элементов этой таблицы, будет

$$\Delta = n(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\ (y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

Этот определитель можно получить сразу, составляя сумму произведений определителей второго порядка первой таблицы на соответствующие определители второй.

$$\Delta = (x_1 - x_2)\ (y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)\ (y_1 - y_3) + \ldots + (x_{n-1} - x_n)\ (y_{n-1} - y_n)$$

68. Вычислить определитель:

$$\begin{matrix} 1 + x_1 y_1, & 1 + x_1 y_2, & \ldots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1, & 1 + x_2 y_2 & \ldots & 1 + x_2 y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 + x_n y_1, & 1 + x_n y_2 & \ldots & 1 + x_n y_n \end{matrix} \qquad (n > 2).$$

Перемножая таблицы

$$\left\| \begin{matrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & y_n \end{matrix} \right\|$$

получаем таблицу, из элементов которой составлен данный определитель. Этот определитель равен нулю.

69. Рассматривая таблицы

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} a_1' & a_2' & \ldots & a_n' \\ b_1' & b_2' & \ldots & b_n' \end{matrix} \right\|$$

---

[1]) Определителем таблицы (B), соответствующим определителю таблицы (A), называется определитель таблицы (B), составленный из элементов таблицы (B), стоящих в тех же строках и столбцах, в которых находятся элементы, образующие определитель таблицы (A).

тождество:

$$(a_1a_1' + a_2a_2' + \ldots + a_na_n')\ (b_1b_1' + b_2b_2' + \ldots + b_nb_n') -$$
$$-(a_1b_1' + a_2b_2' + \ldots + a_nb_n')\ (a_1'b_1 + a_2'b_2 + \ldots + a_n'b_n) =$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\ (a_1'b_2' - a_2'b_1') + (a_1b_3 - a_3b_1)\ (a_1'b_3' - a_3'b_1') + \ldots$$
$$+ (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})\ (a_{n-1}'b_n' - a_n'b_{n-1}').$$

70. Вычислить определитель

$$\begin{matrix} a_{0n}, & a_{0,\,n+1}, & \ldots & a_{0,\,n+m} \\ a_{1n}, & a_{1,\,n+1}, & \ldots & a_{1,\,n+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mn}, & a_{m,\,n+1}, & \ldots & a_{m,\,n+m} \end{matrix} \quad (m \geqq 3),$$

$$m = (\alpha_s + \beta_s \cdot m) \cos m\varphi + (\gamma_s + \delta_s \cdot m) \sin m\varphi.$$

71. Вычислить квадрат определителя

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{matrix}$$

72. Вычислить квадрат определителя

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{matrix}$$

73. Показать, что произведение определителя

$$\Delta(x) = \begin{matrix} a_{11} - x, & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - x, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - x \end{matrix}$$

$\Delta(-x)$ может быть представлено в виде определителя

74. Предполагая, что элементы a_{ik} и a_{ki} в определителе n-го поряд числа комплексные сопряженные, показать, что миноры определителя

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}, \text{ где } c_{ik} = a_{i1}a_{1k} + a_{i2}a_{2k} + \dots + a_{in} \cdot a_{nk}$$

диагональные элементы которых состоят из элементов главной диагонали, положительные вещественные числа.

75*. Показать, что произведение

$$(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)\ (x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z')$$

может быть представлено в виде

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ,$$

где X, Y, Z — линейные функции как относительно x, y, z, так x', y', z'.

76. Показать, что определитель

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

в котором пары чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) прямоугольные координа точек M_1, M_2, M_3, не изменяет своей величины при координатных преобра-зованиях. Пользуясь этим, выяснить его геометрический смысл.

Решение. При координатном преобразовании

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + x_0$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + y_0$$

определитель в старых и новых координатах связаны соотношени

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha, & x_0 \\ \sin\alpha, & \cos\alpha, & y_0 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} x_1', & y_1' & 1 \\ x_2', & y_2' & 1 \\ x_3', & y_3', & 1 \end{matrix}$$

Так как первый определитель в правой части равенства есть единица то равенство показывает, что определитель не меняется по своей величи от координатного преобразования. Выберем ось OX так, чтобы она ходила через точки M_1, M_2, и ее направление совпадало бы с направлением от M_1 и M_2. Ось OY выберем так, чтобы она проходила через M_3. При таком выборе

$$x_1' = a,\ y_1' = 0,\ x_2' = b,\ y_2' = 0,\ b > a,\ x_3' = 0,\ y_3' = h.$$

Определитель равен

$$(b - a)\,h.$$

Число $(b - a)\,[h]$ равно произведению основания треугольника $M_1M_2M_3$ на его высоту, т. е. удвоенной площади треугольника.

Определитель равен удвоенной площади треугольника, если $h>0$, т. е. при обходе периметра треугольника в направлении $M_1M_2M_3$ площадь слева, и удвоенной площади со знаком — в противном случае.

77. Величины α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ обозначают косинусы трех попарно взаимно перпендикулярных прямых OA, OB, OC с осями OX, OY и OZ. Вычислить величину определителя

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

78. Показать, что определитель

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{matrix}$$

зменяется по абсолютной величине от координатных преобразований

$$\alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \quad y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \quad z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z',$$

α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ косинусы углов прямоугольных осей OX', OY', OZ' с осями OX, OY, OZ тоже прямоугольными. Каков смысл определителя?

79. Изменяется ли определитель

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{matrix}$$

координатных преобразований, и каков его геометрический смысл, если координат прямоугольны?

80. Составить произведение определителей

$$\begin{matrix} x_1, & y_1 & R \\ x_2, & y_2 & R \\ x_3, & y_3 & R \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -x_1, & -y_1 & R \\ -x_2, & -y_2 & R \\ -x_3, & -y_3 & R \end{matrix}$$

Положив R равным радиусу окружности, описанной около $M_1M_2M_3$ $[M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)]$, и выбрав начало угольных координат в центре окружности, вывести выражение радиуса окружности через площадь треугольника и его стороны.

§ 5. Решение системы линейных

1. Система n линейных уравнений с n неизвестными решается по Крамера, если основной определитель не равен нулю.

2. Система n уравнений с m неизвестными имеет решения в том и в том случае, когда ранг [1]) таблицы, составленной из коэффициентов неизвестных, равен рангу таблицы, составленной из всех коэффициентов.

---

[1]) Рангом таблицы называется такое число r, что всякий определитель порядка r, выводимый из таблицы, равен нулю, а один из определителей порядка r не равен 0.

3. Если система уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n$$

имеет решение и определитель

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21}, & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1}, & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{matrix}$$

порядок которого равен рангу таблицы, составленной из коэффициентов системы, не равен нулю, то общее решение системы находится путем ложения правила Крамера к системе

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1,m}x_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{r,m}x_m.$$

Неизвестные $x_{r+1}, \ldots x_m$ принимают произвольные значения.

4. Если система n линейных однородных уравнений с n неизвестны имеет решения, отличные от нуля, то основной определитель такой равен нулю.

Задачи.

81. Решить систему уравнений

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 24$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 22$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 24.$$

Основной определитель

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} = 4^3 \cdot \frac{5}{2} = 160$$

не равен нулю.

Вычисляем определители

$$\begin{vmatrix} 0, & 2, & 3, & 4 \\ 24, & 3, & 4, & 1 \\ 22, & 4, & 1, & 2 \\ 24, & 1, & 2, & 3 \end{vmatrix} = 160 \qquad \begin{vmatrix} 1, & 30, & 3, & 4 \\ 2, & 24, & 4, & 1 \\ 3, & 22, & 1, & 2 \\ 4, & 24, & 2, & 3 \end{vmatrix} = 320 \qquad \begin{vmatrix} 1, & 2, & 30, & 4 \\ 2, & 3, & 24, & 1 \\ 3, & 4, & 22, & 2 \\ 4, & 1, & 24, & 3 \end{vmatrix} = 480$$

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, & 30 \\ 2, & 3, & 4, & 24 \\ 3, & 4, & 1, & 22 \\ 4, & 1, & 2, & 24 \end{vmatrix} = 640.$$

Согласно правилу Крамера находим:

$$x_1 = \frac{160}{160} = 1, \quad x_2 = \frac{320}{160} = 2, \quad x_3 = \frac{480}{160} = 3, \quad x_4 = \frac{640}{160} = 4.$$

82. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 + x_5 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 &= -2. \end{aligned}$$

Составляем таблицу из коэффициентов при неизвестных

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -6 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$$

Определим ранг таблицы. Берем определитель 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

он не равен нулю. Берем какой-нибудь определитель 3-го порядка, содержащий его как минор, скажем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

Этот определитель не равен нулю.

Найдем теперь определитель четвертого порядка, содержащий рассмотренный как минор, но который был бы не равен нулю.

Вычисляя, получаем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Все определители 4-го порядка, содержащие выбранный определитель 3-го порядка, равны нулю. Ранг таблицы равен 3 (см. задачу 97).

Ранг таблицы,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -6 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$$

как видно из предыдущего, не меньше 3. Чтобы найти его, вычисля определители 4-го порядка, содержащие отмеченный нами определи 3-го порядка. Кроме вычисленных уже в таблице находится только такой определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & +4 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг второй таблицы тоже 3. Система имеет решения. Для получен их следует решить систему

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 + 6x_4 - x_5$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 4 + 4x_4 - 3x_5$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2 + 6x_4 + x_5$$

по правилу Крамера, считая x_4 и x_5 произвольными. Общее решение системы:

$$x_1 = 3 + 5x_4 - x_5, \quad x_2 = x_4 - x_5, \quad x_3 = 1 - x_5.$$

Решить систему уравнений:

83. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0$
$x_1 + x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 0$

84. $x_1 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + x_2 + x_4 = 0$
$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$

85. $x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$
$x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$

86. $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

87. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35$
$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 70$
$x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 = 126$
$x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 = 210$

88. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0$
$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 0$
$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 - 6x_5 = 0$
$4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0$

89. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 3$
$3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 16x_5 + 8x_6 = 13$
$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 20x_5 + 18x_6 = 33$
$8x_1 + 15x_2 + 21x_3 + 42x_4 + 40x_5 + 28x_6 = 49$
$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 12x_5 + 6x_6 = 10$
$x_1 + 2x_2 + 11x_4 + 8x_5 + 12x_6 = 23$

90. $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 0$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 0$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 0$

91. $x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 5$
$-3x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_4 = 1$
$5x_1 - 7x_2 + x_3 - 3x_4 = 1$
$7x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 11$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$

92. $10x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 5x_5 + 7x_6 - 19x_7 = -5$
$2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 2x_5 - 12x_6 + 8x_7 = 14$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 4x_6 = 7$
$3x_2 - 2x_4 - 5x_5 - x_6 - 5x_7 = -3$
$9x_1 - 13x_2 + 8x_3 - 3x_4 - 7x_5 + 23x_6 - 27x_7 = 2$
$3x_1 + x_2 - 8x_3 + 3x_4 + 7x_5 - 7x_6 + 3x_7 = 17$
$x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 - 4x_6 + 8x_7 = 0$

93. $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1$
$x_1 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n = 2$
$x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_n = 3$
. . . . . .
. . . . . .
$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = n$

94. $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$x_1 + nx_2 + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} x_n = \frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

95. Решить систему уравнений

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n = \lambda_i, \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

предполагая, что таблица, составленная из коэффициентов при неизвестных, ортогональная.[1]) Найдя решения, показать, что

$$(1) \qquad A_{ik} = a_{ik} \cdot \Delta,$$

где Δ—основной определитель системы, а A_{ik}—алгебраическое дополнение элемента a_{ik}.

$$(2) \quad \begin{matrix} a_{\alpha_1\beta_1} & a_{\alpha_2\beta_2} & \ldots & a_{\alpha_k\beta_1} \\ a_{\alpha_1\beta_2} & a_{\alpha_2\beta_2} & \ldots & a_{\alpha_k\beta_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha_1\beta_k} & a_{\alpha_2\beta_k} & \ldots & a_{\alpha_k\beta_k} \end{matrix} = (-1)^P \Delta \begin{matrix} a_{\alpha_{k+1}\beta_{k+1}}, & a_{\alpha_{k+2}\beta_{k+1}} & \ldots & a_{\alpha_n\beta_{k+1}} \\ a_{\alpha_{k+1}\beta_{k+2}}, & a_{\alpha_{k+2}\beta_{k+2}} & \ldots & a_{\alpha_n\beta_{k+2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k+1,\beta_n}, & a_{k+2\,\beta_n} & \ldots & a_{\alpha_n\beta_n} \end{matrix}$$

где $P = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + a_k + \beta_1 + \beta - \ldots + \beta_k$,

96. Показать, что в случае, когда определитель Δ, составленный из n^2 элементов a_{ik}, равен нулю, имеет место пропорция:

$$\frac{A_{1i}}{A_{1k}} = \frac{A_{2i}}{A_{2k}} = \ldots = \frac{A_{ni}}{A_{nk}},$$

где A_{ik} есть алгебраическое дополнение элемента a_{ik}.

97. Определитель

$$\Delta = \begin{matrix} a_{11}, & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21}, & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1}, & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{matrix}$$

[1]) Условие ортогональности выражается равенствами:

$$a_{1i} \cdot a_{1k} + a_{2i} \cdot a_{2k} + \ldots + a_{ni} \cdot a_{nk} = 0 \text{ при } i \neq x.$$

$$a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \ldots + a_{nk}^2 = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots n).$$

из элементов прямоугольной таблицы

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{Vmatrix}$$

Показать, что ранг таблицы равен p, если все определители $p+1$, содержащие определитель Δ как минор, равны нулю.

При каком условии три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ на одной прямой?

Если три точки M_1, M_2, M_3 лежат на одной прямой, то существуют числа u, v, w, не равные одновременно нулю, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} ux_1 + vy_1 + w = 0 \\ ux_2 + vy_2 + w = 0 \\ ux_3 + vy_3 + w = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

уравнение

$$ux + vy + w = 0$$

уравнением прямой, на которой лежат точки M_1, M_2, M_3.

Так как система уравнений (*) имеет решение, где не все неизвестные то основной определитель этой системы равен нулю.

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (**)$$

Равенство (**), выражая необходимое условие, является вместе с тем достаточным. При наличии его система (*) имеет решение, где неизвестные нули, и следовательно существует прямая, лежат точки M_1, M_2, M_3.

99. При каком условии четыре точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, x_3, y_3 лежат на одной окружности?

100. Написать уравнение окружности, проходящей через точки $M_1(0, 0)$, $1, 0)$, $M_3(0, 1)$.

101. Найти уравнение кривой 2-го порядка, проходящей через точки $0, 0)$, $M_2(1, 0)$, $M_3(0, 2)$, $M_4(2, 2)$, $M_5(2, 1)$.

102. Отыскать параболу 3-й степени, проходящую через точки $M_1(0, 0)$, $(-1, 0)$, $M_3(+1, 0)$, $M_4(2, 1)$.

103. Составить уравнение параболы степени n

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

ходящей через $n+1$ точку $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, . . . $M_n(x_n, y_n)$, и коэфициенты.

104. При каком условии три прямые

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

ходят через одну точку?

105. Найти необходимое и достаточное условие, что четыре $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ лежат в плоскости.

106. Составить уравнение шара, проходящего через точки $M_1(1, 0, 0$ $M_2(1, 1, 0)$, $M_3(1, 1, 1)$, $M_4(0, 1, 1)$.

107. При каком условии n точек $M_1(x_1, y_1) \ldots M_n(x_n, y_n)$ на одной прямой?

108. При каком условии n прямых

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0,\ \ldots\ a_nx + b_ny + c_n = 0$$

проходят через одну точку?

109. При каком условии n точек

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ \ldots\ M_n(x_n, y_n, z_n)$$

лежат в одной плоскости, и при каком условии эти точки лежат на прямой?

110. При каком условии точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ \ldots\ M_n(x_n, y_n, z_n)$$

лежат на одной окружности?

111. При каком условии n плоскостей

$$A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

проходят через одну точку, и при каком условии все эти плоскости проходят через одну прямую?

ОТДЕЛ III.

ЦЕЛАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ.

§ 1. Вычисление частных значений функции и ее производных. Кратные корни.

1. Целая рациональная функция

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

может быть разложена по степеням $x - a$ согласно формуле:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{1\cdot 2} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

2. Значения функции $f(x)$ и ее производных при $x = a$ следует вычислять, пользуясь правилом Horner'a.

3. Если $x = a$ — корень кратности k, то

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0 \qquad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Задачи.

1. Вычислить значения функции

$$f(x) = x^5 + 3x^2 + 7ix - 1,$$

$x = i$.

Решение. Расположим вычисление по схеме Horner'a. В первой выписываем коэфициенты функции, помещая нули на месте коэфи отсутствующих членов. Слева выписываем число i. Первое число строки берется равным первому числу первой. Для получения 2-го 2-й строки первое число умножается на i и к нему прибавляется число 1-й строки. Для получения 3-го числа 2-й строки 2-е число на i и к нему прибавляется 3-е число 1-й строки и т. д.

Числа 3-й строки составляются по числам 2-й точно так же, как числа по числам 1-й. Число чисел в 3-й строке на единицу меньше числа 2-й и т. д.

1	0	0	3	$7i$	-1	
1,	i,	-1,	$3-i$,	$1+10i$,	$\underline{-11+i}$	$f(i) = -11 + i$
1,	$2i$,	-3,	$3-4i$,	$\underline{5+13i}$		$f'(i) = 5 + 13i$
1,	$3i$,	-6,	$\underline{3-10i}$			$f''(i) = 6 - 20i = (3-10i)\cdot 2!$
1,	$4i$,	$\underline{-10}$				$f'''(i) = -60 = -10\cdot 3!$
1,	$\underline{5i}$					$f^{(IV)}(i) = 120i = 5i\cdot 4!$
$\underline{1}$						$f^{(V)}(i) = 1\cdot 5!$

Последние числа строк, подчеркнутые в приложенной схеме, равны

$$f(i),\ f'(i),\ \frac{f''(i)}{1\cdot 2},\ \ldots\ \frac{f^{(k)}(i)}{5!}$$

Заметим, что числа 1-й строки равны коэфициентам частного, а число 1-й строки — остатку от деления функции $f(x)$ на двучлен $x - i$.

$$f(x) = [x^4 + ix^3 - x^2 + (3-i)x + 1 + 10i](x - i) - 11 + i.$$

2. Вычислить значение функции

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1$$

ее производных при $x = -1$.

3. Разложить функцию

$$f(x) = x^5 - x^3 + 1 \text{ по степеням } x + i.$$

4. Разложить функцию $x^6 - 5x^5 + 3x^3 - 1$ по степеням $x - 1$.

5. Разложить функцию $x^5 + 4x^4 - x^3 - 29x^2 - 14x - 1$ по степеням $x - 2$.

6. Определить, какова кратность корня i функции

$$x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1.$$

7. Определить кратность корня 1 функции

$$x^6 - x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1.$$

8. Определить частное и остаток от деления функции $x^5 + 3x^2 + 7x - 1$ на двучлен $x - 2$.

9. Разделить $x^3 + x - 1$ на $x + 1$, располагая действие по убывающим степеням x и останавливаясь на x^{-6}.

Решение. Вычисление располагаем по схеме Horner'а:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrrrrr}
 & +1, & 0, & 1, & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
-1 & & 1, & -1, & 2, & -3, & 3, & -3, & 3, & -3, & 3, & -3 &
\end{array}$$

В первой строке выписываем коэфициенты делимого, прибавив к ним шесть нулей, и далее совершаем вычисление в обычном порядке.

Вычисления дают следующий результат:

$$\frac{x^3 + x - 1}{x + 1} = x^2 - x + 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} +$$

$$+ \frac{3}{x^4} - \frac{3}{x^5} + \frac{3}{x^6} - \frac{3}{x^6(x+1)}$$

или

$$x^3 + x - 1 = \left(x^2 - x + 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} +\right.$$

$$\left. + \frac{3}{x^4} - \frac{3}{x^5} + \frac{3}{x^6}\right)(x + 1) - \frac{3}{x^6}$$

10. Разделить $x^4 - x + 2$ на $x - i$, располагая деление по убывающим степеням x и останавливаясь на x^{-2}.

11. Разделить функцию $x^4 + 2ix^3 + 1$ на $x^2 + ix - 1$, располагая действие по возрастающим степеням x и останавливаясь на x^6.

Решение. Производя деление, расположим делимое и делитель по возрастающим степеням x и далее совершаем действие в обычном порядке, как показано в приложенной схеме, прекращая деление, когда в остатке младший член делится на x^6.

$$\begin{array}{l|l}
1 + 2ix^3 + x^4 & -1 + ix + x^2 \\
\underline{1 - ix \quad - x^2} & \overline{-1 - ix - 3ix^3 + 2x^4 - ix^5} \\
\quad + ix + x^2 + 2ix^3 & \\
\quad \underline{ix + x^2 - \quad ix^3} & \\
\qquad\qquad 3ix^3 + x^4 & \\
\qquad\qquad \underline{3ix^3 + 3x^4 - 3ix^5} & \\
\qquad\qquad\quad -2x^4 + 3ix^5 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-2x^4 + 2ix^5 + 2x^6} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad ix^5 - 2x^6 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{ix^5 + x^6 - ix^7} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -3x^6 + ix^7 &
\end{array}$$

Результат деления выражается равенством:

$$1 + 2ix^3 + x^4 = (-1 - ix - 3ix^3 + 2x^4 - ix^5)(-1 + ix + x^2) -$$
$$- 3x^6 + ix^7.$$

12. Разделить $1 + x + (1 + i)x^2$ на $1 + ix^2$, полагая действие по возрастающим степеням и останавливаясь на x^3.

13. Произвести деление $\sin\alpha$ на $1 - 2x\cos\alpha + x^2$, расположив действие по возрастающим степеням x и останавливаясь на x^n.

14. Разделить x на $(1 - x)^m$, располагая действие по возрастающим степеням x и останавливаясь на x^{s+1}.

15. Определить числа a и b так, чтобы $x^4 + 3x^2 + ax + b$ делилось без остатка на $x^2 - 2ax + 2$.

16*. Показать, что многочлен

$$x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3p+2},$$

где n, m, p целые положительные числа или нули, делится на $x^2 + x + 1$.

17*. Показать, что симметрическая функция $\varphi(x, y)$, делящаяся на $x - y$, делится и на $(x - y)^2$.

18. Убедиться, что многочлен $f(x, y, z)$, делящийся на $(x - y)$, $(y - z)$, $(z - x)$, делится на произведение $(x - y)(y - z)(z - x)$.

19. Делится ли на $(x - 1)^4$ многочлен

$$x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2 - 1)x^n - n^2 x^{n-1} + 1?$$

20. При каких значениях m дробь

$$\frac{(1 + x)^m - x^m - 1}{x^2 + x + 1}$$

равна целой рациональной функции?

21*. Уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0; \quad a_0 \neq 0, \ a_n \neq 0$$

содержит $k + 1$ член. Показать, что оно не может иметь корней кратности выше k.

22. Показать, что целая функция степени n с вещественными коэфициентами, имеющая $n - 1$ вещественный корень, обращается в нуль только при вещественных значениях x.

23. Зная, что уравнение

$$3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$$

имеет корень $1 + i$, найти его прочие корни.

24*. Целая функция $f(x)$ с вещественными коэфициентами остается положительной при всех значениях x. Показать, что она может быть представлена в виде

$$f(x) = P(x)^2 + Q(x)^2,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с вещественными коэфициентами.

25*. Предполагая, что функция $f(x)$ с вещественными коэфициентами остается положительной при всех значениях x, показать, что

$$f(x) = P(x)^2 + P(x) \cdot Q(x) + Q(x)^2,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с вещественными коэфициентами.

§ 2. Разложение целой функции на множители. Связь между корнями и коэфициентами.

1. Целая рациональная функция

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

разлагается на линейные множители

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Если между числами $x_1, x_2, \ldots x_n$ находятся равные, то разложение можно представить в виде

$$f(x) = a_0 (x - x_1)^{\alpha_1} \cdot (x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_k)^{\alpha_k},$$

где среди чисел $x_1, x_2, \ldots x_k$ нет и двух равных между собой.

2. Между корнями и коэфициентами функции существует зависимость

$$a_1 = -a_0 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$
$$a_2 = a_0 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = (-1)^n a_0 x_1 \cdot x_2 \ldots x_n.$$

Задачи.

26. Найти целую функцию 4-й степени, зная, что ее корни равны $\pm(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})$ и коэфициент при старшей степени x равен 1.

Решение. Искомая функция

$$f(x) = (x - \sqrt{3} - \sqrt{2})(x - \sqrt{3} + \sqrt{2})(x + \sqrt{3} - \sqrt{2})(x + \sqrt{3} + \sqrt{2});$$

произведя умножение, получаем:

$$f(x) = [(x - \sqrt{3})^2 - 2] \cdot [(x + \sqrt{3})^2 - 2] = (x^2 - 3)^2 - 4(x^2 + 3) + 4$$

или

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1.$$

27. Определить целую функцию 4-й степени, зная, что ее корни равны $\pm(\sqrt{p} \pm \sqrt{q})$ и $a_0 = 1$.

28. Найти целую функцию 8-й степени, зная, что ее корни $\varepsilon_1 \sqrt{p} + \varepsilon_2 \sqrt{q} + \varepsilon_3 \sqrt{v}$, где $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\varepsilon_3 = \pm 1$ и $a_0 = 1$.

29. Составить многочлен 3-й степени, корни которого равны

$$x_1 = a + b,\ x_2 = a\rho + b\rho^2,\ x_3 = a\rho^2 + b\rho,\ \rho^3 = 1$$

и старший коэфициент $a_0 = 1$.

30. Составить многочлен 3-й степени, зная, что его корни:

$$x_1 = a + b + c,\ x_2 = a + b\rho + c\rho^2,\ x_3 = a + b\rho^2 + c\rho\ (a_0 = 1).$$

31. Разложить на множители функцию

$$f(x) = x^{2n} - 1.$$

Решение. Корни функции x_s определяются согласно равенству

$$x_s = \cos\frac{2s\pi}{2n} + i\sin\frac{2s\pi}{2n} \quad (s = 1,\ 2, \ldots 2n).$$

Корни x_s и x_{2n-s} — числа комплексные, сопряженные при s, отличном n и $2n$. Произведение

$$(x - x_s)(x - x_{2n-s}) = x^2 - 2x\cos\frac{s\pi}{n} + 1.$$

Приняв во внимание, что

$$x_n = -1, \quad x_{2n} = 1,$$

что

$$f(x) = (x^2 - 1)\prod_{s=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{s\pi}{n} + 1\right)$$

32. Разложить на множители функцию

$$f(x) = x^{2n+1} - 1.$$

33. Разложить на множители функцию

$$f(x) = x^{2n} + 1.$$

34. Разложить на множители функцию

$$f(x) = x^{2n+1} + 1.$$

35*. Разложить на множители функцию

$$f(x) = x^{2n+1} + \binom{2n+1}{2}x^{2n-1}(x^2 - 1) + \binom{2n+1}{4}x^{2n-3}(x^2 - 1)^2 + \ldots$$
$$+ x(x^2 - 1)^n.$$

36*. Разложить на множители функцию

$$f(x) = x^{2n} + \binom{2n}{2}x^{2n-2}(x^2 - 1) + \ldots + (x^2 - 1)^n.$$

37. Зная, что $x_1, x_2, \ldots x_n$ являются корнями функции

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

вычислить произведение

$$(x_1^2 - 1)\cdot(x_2^2 - 1)\ldots(x_n^2 - 1).$$

Решение. Произведение

$$(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)\ldots(x_n^2 - 1) =$$
$$= (x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots = (x_n - 1)\ (x_1 + 1)(x_2 + 1)\ldots(x_n + 1).$$

Положив в функции

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

последовательно $x = 1$, $x = -1$, находим:

$$f(1) = (-1)^n(x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_n - 1),$$
$$f(-1) = (-1)^n(x_1 + 1)(x_2 + 1)\ldots(x_n + 1).$$

Сравнивая полученные произведения, заключаем, что

$$(x_1^2-1)(x_2^2-1)\ldots(x_n^2-1)=f(1)\cdot f(-1)=$$
$$=(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)\left[(-1)^n+a_1(-1)^{n-1}+\ldots+a_n\right],$$

откуда следует, что

$$(x_1^2-1)(x_2^2-1)\ldots(x_n^2-1)=(a_n+a_{n-2}+a_{n-4}+\ldots)^2-$$
$$-(a_{n-1}+a_{n-3}+\ldots)^2.$$

38. Зная, что $x_1, x_2, \ldots x_n$ — корни функции

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

вычислить произведение

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)\ldots(x_n^2+1).$$

39. Вычислить произведение

$$(x_1^3-1)(x_2^3-1)\ldots(x_6^3-1),$$

где $x_1, x_2, \ldots x_6$ — корни функции

$$f(x)=x^6-5x^4+3x^3-1.$$

40. Показать справедливость равенства

$$\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Решение. Положим в равенстве

$$x^{2n-2}+x^{2n-4}+\ldots+1=\prod_{s=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{s\pi}{n}+1\right)^{1)}$$

$x=1$.

Заметив, что

$$1-2\cos\frac{s\pi}{n}+1=2\left(1-\cos\frac{s\pi}{n}\right)=2^2\sin^2\frac{s\pi}{2n},$$

получаем:

$$n=2^{2(n-1)}\cdot\prod_{s=1}^{n-1}\sin^2\frac{s\pi}{2n}=\left(2\prod_{s=1}^{n-1}\sin\frac{s\pi}{2n}\right)^2.$$

Извлекая квадратный корень и принимая во внимание, что

$$\sin\frac{s\pi}{2^n}\cdot<0,\ \text{при}\ 0<s<n,$$

легко заключить, что

$$\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$$

Показать справедливость тождества:

41. $\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$

1) См. задачу 31.

42. $\sin\frac{\pi}{4n}\cdot\sin\frac{3\pi}{4n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{\sqrt{2}}{2^n}.$

43. $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}.$

Определить величину произведения:

44. $\cos\frac{\pi}{4n}\cos\frac{3\pi}{4n}\ldots\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}.$

45. $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}.$

46. $\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}.$

47*. Предполагая, что корни $x_1, x_2, \ldots x_n$ функции

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

связаны соотношением

$$x_s+x_{n-s}=m, \qquad s=1,2,\ldots n$$

показать справедливость тождества

$$f(x)=(-1)^n f(m-x).$$

48*. Корни целой функции $f(x)$ четной степени $2n$ удовлетворяют соотношению

$$x_s+x_{n+s}=2m, \qquad s=1,2,\ldots n.$$

Показать, что целая функция $f'(x)$ имеет корень $x=m$ и что остальные корни $y_1, y_2, \ldots y_{2n-2}$ функции $f'(x)$ связаны соотношением

$$y_s+y_{n+s-1}=2m, \qquad s=1,2,\ldots n-1.$$

49. Функция $f(x)$ степени $2n+1$ имеет один корень $x_0=m$. Остальные корни связаны соотношением

$$x_s+x_{n+s}=2m, \qquad s=1,2,\ldots n.$$

Показать, что корни $y_1, y_2, \ldots y_{2n}$ функции $f'(x)$ связаны соотношением

$$y_s+y_{n+s}=2m.$$

50. Какому условию удовлетворяют коэфициенты уравнения

$$x^3+px+q=0,$$

если сумма корней x_1 и x_2

$$x_1+x_2=a.$$

Решить уравнение.

Решение. Сумма всех корней уравнения x_1, x_2, x_3

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

Отсюда следует в силу задания, что $x_3=-a$.

Подставляя $-a$ в заданное уравнение, находим соотношение

$$-a^3 - ap + q = 0$$

или

$$q = a^3 + ap.$$

Это равенство выражает собой искомое условие.

Полученное условие есть не только необходимое, но и достаточное для существования равенства

$$x_1 + x_2 = a.$$

Если оно имеет место, то $-a$ есть корень уравнения. Назовем его x_3. Равенство $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ обращается в

$$x_1 + x_2 - a = 0,$$

что и показывает достаточность условия.

Зная один корень $x_3 = -a$ предложенного уравнения, не трудно найти и прочие корни. Подставим в уравнение вместо q его выражение через p и a и разделим левую часть на $x - a$. В результате получим уравнение

$$x^2 - ax + a^2 + p = 0,$$

корни которого x_1 и x_2. Эти корни:

$$\frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}a^2 - p}.$$

51. Какому условию должны удовлетворять коэфициенты уравнения

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

если известно, что

$$x_1 + x_2 = x_3.$$

52. Какому условию удовлетворяют коэфициенты уравнения

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

если между его корнями существует зависимость

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} = \frac{2}{x_2}?$$

53. При каком значении λ корни функции

$$f(x) = 3x^3 - \lambda x^2 + qx - 2 = 0$$

связаны соотношением

$$(x_1 + x_3)\,x_2 = 2x_1 \cdot x_3?$$

Решить уравнение.

54. При каком условии корни уравнения

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

образуют геометрическую прогрессию?

55. При каком значении λ корни уравнения

$$x^3 + x^2 + 2x + \lambda = 0$$

образуют геометрическую прогрессию?

Найти λ и решить уравнение.

56. Один из корней x_1 уравнения

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$$

другому x_2, умноженному на m.

Показать, что x_2 можно найти решением квадратного уравнения.

57. Решить кубическое уравнение

$$x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0,$$

корни которого связаны соотношением

$$x_1 = \frac{3}{2}\, x_2.$$

58. При каком значении λ корни уравнения

$$x^3 + x^2 = \lambda$$

образуют арифметическую прогрессию.

Найти λ и решить уравнение.

59. Решить уравнение

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

что его корни образуют арифметическую прогрессию.

60. При каких значениях λ и μ корни уравнения

$$x^4 + 2x^3 + 21x^2 + \lambda x + \mu = 0$$

образуют арифметическую прогрессию?

Найти λ, μ и решить уравнение.

61. Показать, что корни уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

найдены посредством решения квадратного уравнения, когда они образуют арифметическую прогрессию.

62. Корни уравнения

$$x^6 - 3x^5 - 5x^4 + \lambda x^3 + \mu x^2 - 12x + \nu = 0$$

образуют арифметическую прогрессию.

Найти λ, μ, ν и решить уравнение.

63. Корни уравнения

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

удовлетворяют соотношению

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Указать, при каких значениях коэфициентов это возможно, и решить уравнение.

64. Вычислить корни уравнения

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0,$$

зная, что сумма корней x_1 и x_2

$$x_1 + x_2 = 0.$$

65. При каком условии корни уравнения

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

удовлетворяют соотношению

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4?$$

Показать, что в этом случае решение уравнения четвертой степени приводится к решению квадратных уравнений.

66. При каком условии корни уравнения

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

удовлетворяют соотношению

$$x_1 \cdot x_2 = x_3 \cdot x_4?$$

Показать, каким образом можно вычислить корни уравнения.

67*. При каком значении λ корни уравнения

$$x^4 - x^2 + 2x + \lambda = 0$$

удовлетворяют условию

$$x_1x_2 = \lambda.$$

Найти корни.

68. Каким условиям должны удовлетворять коэфициенты p, q и целое число α, чтобы уравнение

$$x^4 + px^\alpha + q = 0, \qquad 0 \leqq \alpha < 4$$

имело тройной корень?

§ 3. Построение целой функции по ее частным значениям.

1. Целая функция $F(x)$, принимающая значения $y_0, y_1, \ldots y_n$ при $x = x_0, x_1, \ldots x_n$, может быть выражена формулой

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_k)(x - x_k)} + \varphi(x) \cdot \omega(x) \qquad \text{(Lagrange)},$$

где

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

и $\omega(x)$ есть произвольная целая функция.

Функция $f(x)$ наименьшей степени, принимающая значения $y_0, y_1, \ldots y_n$, при $x_0, x_1, \ldots x_n$ получается из предыдущего равенства при $\omega(x) = 0$.

$$f(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} +$$

$$+ y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} + \ldots + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}.$$

Степень ее не выше $n - 1$.

2. В случае равноотстоящих значений аргумента, когда

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h,$$

при составлении выражения простейшей функции $f(x)$ пользоваться формулой

$$f(x) = y_0 + \Delta y_0 \cdot \frac{x - x_0}{h} + \Delta^2 y_0 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!\,h^2} + \ldots$$

$$+ \Delta^n y_0 \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{n!\,h^n} \qquad \text{(Newton)},$$

$$\Delta^k y_0 = y_k - \binom{k}{1} y_{k-1} + \binom{k}{2} y_{k-1} + \ldots + (-1)^k y_0.$$

Общее решение задачи дает функция $F(x)$, определяемая равенством

$$F(x) = f(x) + \varphi(x) \cdot \omega(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\omega(x)$ имеют прежние значения.

На практике следует вычислять разность $\Delta^k y_0$, пользуясь соотношением

$$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0.$$

Задачи.

69. Построить простейшую целую функцию, принимающую при $x = 1, 2, \ldots n$ значения, равные соответственно $1, 2^2, \ldots n^2$.

Решение. Воспользуемся формулой Ньютона. Вычисление разностей

$$\Delta y_0,\ \Delta^2 y_0, \ldots \Delta^{n-1} y_0$$

выполним по схеме

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	. . .
n	n^2				
		$2n-1$			
$n-1$	$(n-1)^2$		2		
		$2n-3$			
$n-2$	$(n-2)^2$				
. . . .	. . . .	. . . .	. . .		
				0	
. . . .	. . . .	. . . .	. . .		
3	3^2				
		5			
2	2^2		$\underline{2}$		
		$\underline{3}$			
1	$\underline{1^2}$				

В 1-й колонке выписываем значения аргумента в убывающем порядке. Во 2-й колонне помещаем соответствующие значения функции. Для получения чисел 3-й колонны вычтем из каждого числа 2-й колонны число, за ним следующее. Получаем первые разности Δy, которые и запишем в 3-й колонне, как показано в приложенной схеме.

Для получения вторых разностей вычтем из каждого числа 3-го столбца следующую за ним и выпишем эти разности в четвертом столбце и т. д.

Вторые разности постоянны. Все последующие разности равны 0.

Необходимые нам значения

$$y_0,\ \Delta y_0,\ \Delta^2 y_0 \ldots \Delta^{n-1} y_0$$

находим из таблицы

$$y_0 = 1,\ \Delta y_0 = 3,\ \Delta^2 y_0 = 2,\ \Delta^k y_0 = 0, \text{ при } k \geqq 3,$$

беря нижние числа каждого столбца.

Искомая функция

$$f(x) = 1 + 3(x-1) + 2\frac{(x-1)(x-2)}{2} = x^2.$$

70. Построить полином степени не выше 4-й, принимающий при

$$x = 0,\ 1+i,\ 2+2i,\ 3+3i,\ 4+4i$$

значения $0, 2i, 8i, 18i, 32i$.

71. Найти целую функцию, принимающую при $x = 2, 4, 6, 8, 10$ значения $-1, 13, 43, 89, 151$.

72. Найти целую функцию, по возможности низкой степени, принимающую при

$$x = -2i, -i, 0, +i, +2i,$$

значения $31+16i,\ 7+2i,\ 3,\ 31-16i,\ 7-2i$.

73. Через точки $M_1(1,1)$, $M_2(2,2), \ldots M_n(n,n)$ провести параболу степени не выше n.

74. Провести простейшую параболическую кривую через точки $M_1(1,1)$, $M_2(0,1)$, $M_3(-1,1)$, $M_4(2,7)$.

75. Полином 4-й степени при делении на $x-1, x+1, x, x+2, x-2$ дает в остатке соответственно числа 3, 7, 1, 13, 45.

Найти этот полином.

76. Построить многочлен, принимающий при $x = 1, -2, 3, 0, -1$ значения 2, 17, 82, 1,2.

77. Построить многочлен по возможности низкой степени, принимающий при

$$x = -2, -1, 0, 2, 3$$

значения $-17, -3, 1, 3, 13$.

78. Многочлен степени m дает при делении на $x-a_0$, $x-a_1, \ldots$ $x-a_m$ в остатке $A_0, A_1, \ldots A_m$.

Найти этот многочлен.

79*. Показать справедливость тождества

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\omega(x_k)}{\varphi'(x_k)} = 0,$$

где

$$\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m).$$

Все числа $x_0, x_1, x_2, \ldots x_m$ различны, и $\omega(x)$ — произвольный многочлен степени не выше $m-1$.

80*. Показать справедливость тождества

$$a_0 \sum_{k=0}^{m} \frac{\omega(x_k)}{\varphi'(x_k)} = b_0,$$

многочлен

$$\varphi(x) = a_0 (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_m)$$

имеет кратных корней, а многочлен

$$\omega(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

произволен.

81. Найти сумму

$$\frac{x_1^s}{\varphi_1'(x_1)} + \frac{x_2^s}{\varphi'(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^s}{\varphi'(x_n)}, \qquad 0 \leqq s \leqq n - 1,$$

где

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

все корни которого простые, и s — целое число.

82*. Пользуясь формулой Lagrange'а, найти величину определителя

$$\Delta_k = \begin{array}{l} x_1^m, \ x_1^{m-1}, \ldots x_1^{k+1}, \ x_1^{k-1}, \ldots \ 1 \\ x_2^m, \ x_2^{m-1}, \ldots x_2^{k+1}, \ x_2^{k-1}, \ldots \ 1 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ x_m^m, \ x_m^{m-1}, \ldots x_m^{k+1}, \ x_m^{k-1}, \ldots \ 1. \end{array}$$

83. Показать для случая равноотстоящих значений аргумента, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x_k)}{\varphi'(x_k)} = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n},$$

где

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ . \ . \ . (x - x_n), \ x_{k+1} - x_k = h,$$

$$k = 0, 1, \ . \ . \ n - 1, \ \omega(x_k) = y_k \ (k = 0, 1, \ . \ . \ . \ n).$$

§ 4. Общий наибольший делитель двух или нескольких целых функций.

1. Общий наибольший делитель $\delta(x)$ функций

$$f(x) = a_0 \ (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \ . \ . \ . (x - x_n)^{\alpha_n}, \qquad \alpha_i \geqq 0,$$

$$\varphi(x) = b_0 \ (x - x_1)^{\beta_1} (x - x_2)^{\beta_2} \ . \ . \ . (x - x_n)^{\beta_n}, \quad \beta_i \geqq 0 \quad i = 1, 2, \ . \ . \ . \ n$$

$$. \ .$$

$$\omega(x) = l_0 \ (x - x_1)^{\lambda_1} (x - x_2)^{\lambda_2} \ . \ . \ . (x - x_n)^{\lambda_n}, \qquad \lambda_i \geqq 0$$

равен

$$\delta(x) = \left[f(x), \ \varphi(x), \ . \ . \ . \ \omega(x) \right] = A(x - x_1)^{\sigma_1} (x - x_2)^{\sigma_2} \ . \ . \ . (x - x_n)^{\sigma_n},$$

где число σ_i равно наименьшему из чисел $\alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i$. Множитель A произволен. Делители, отличающиеся на постоянный множитель, не считаются за различные.

2. Общий наибольший делитель функции

$$f(x) = a_0 (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_k)^{\alpha_k}, \qquad \alpha_i > 0, i = 1, 2, \ldots k \text{ и}$$

ее производной определяется равенством:

$$\left[f(x), f'(x)\right] = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1} (x - x_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (x - x_k)^{\alpha_k - 1}.$$

ибольший делитель двух целых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ может и помощи последовательных делений, произведенных по если степень $f(x)$ больше или равна степени $\varphi(x)$:

$$\mu_0 f(x) = \varphi(x) \cdot q(x) + \lambda_1 r_1(x)$$
$$\mu_1 \varphi(x) = r_1(x) \cdot q_1(x) + \lambda_2 r_2(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu_s r_{s-1}(x) = r_s \cdot (x) q_s(x) + \lambda_{s+1} r_{s+1}(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu_k r_{k-1}(x) = r_k(x) q_k(x)$$

Числа $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_k$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ можно выбрать по произволу. На практике их следует выбирать так, чтобы коэфициенты остатков $r_1(x)$, $r_2(x), \ldots r_k(x)$, получаемых в результате последовательных делений были по возможности просты:

$$[f(x), \varphi(x)] = r_k(x).$$

4. Общий наибольший делитель и остатки последовательных делений $r_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots k)$ могут быть представлены равенствами

$$f(x) \varphi_s(x) + \varphi(x) \cdot f_s(x) = r_s(x), \qquad s = 1, 2, \ldots k,$$

где степень функции $\varphi_s(x)$ меньше степени $\varphi(x)$ и степень $f_s(x)$ ниже степени $f(x)$.

Функции $\varphi_s(x)$ и $f_s(x)$ вычисляются последовательно с помощью равенств

$$\lambda_{s+1} f_{s+1}(x) = \mu_s f_{s-1}(x) - q_s(x) f_s(x),$$
$$\lambda_{s+1} \varphi_{s+1}(x) = \mu_s \varphi_{s-1}(x) - q_s(x) \cdot \varphi_s(x),$$
$$\lambda_1 f_1(x) = -q(x), \quad f_0(x) = 1; \quad \lambda_1 \varphi_1(x) = \mu_0, \quad \varphi_0(x) = 0.$$

5. Функция $f(x)$, имеющая кратные корни, может быть представлена в виде произведения

$$f(x) = f_1(x) \cdot (f_2(x))^2 \ldots (f_k(x)^k,$$

где все функции $f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)$ имеют только простые корни. Некоторые из этих функций могут быть равны единице.

Функции $f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)$ находятся путем последовательных Сначала вычисляются общие наибольшие делители

$$\delta_1(x) = [f(x),\ f'(x)] = f_2(x) \cdot (f_3(x))^2 \ldots (f_k(x))^{k-1}$$
$$\delta_2(x) = [\delta_1(x),\ \delta_1'(x)] = f_3(x) \ldots (f_k(x))^{k-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_k = [\delta_{k-1}(x),\ \delta'_{k-1}(x)] = 1.$$

Затем производятся деления:

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x)}{\delta_1(x)} = f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_k(x),$$
$$\varphi_2(x) = \frac{\delta_1(x)}{\delta_2(x)} = f_2(x) \ldots f_k(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_k(x) = \frac{\delta_{k-1}(x)}{\delta_k(x)} = f_k(x).$$

наконец функции $f_1(x), f_2(x) \ldots f_k(x)$ находятся из равенств:

$$f_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},\quad f_2(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)}, \ldots f_k(x) = \varphi_k(x).$$

Задачи.

84. Определить общий наибольший делитель многочленов

$$f(x) = (x-1)^2\ (x+3)\ (x-2)^4,\ \varphi(x) = (x-1)\ (x^2-4),\quad \psi(x) = x^4 - 1$$

85. Найти общий наибольший делитель многочленов

$$f(x) = (x+1)^2 (x^2+x+1)^3 (x-1)^2,\ \varphi(x) = (x^2+x+1)(x+1)^4 (x^2+1)$$
$$\psi(x) = (x^4-1)\ (x^2+x+1)^2.$$

86. Найти общий наибольший делитель многочленов

$$f(x) = x^6 - 5x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x + 1,\ \varphi(x) = x^5 - 5x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

Решение. Делим сначала $f(x)$ на $\varphi(x)$, положив $\mu_0 = 1$.

$$\begin{array}{l|l} x^6 - 5x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x + 1 & x^5 - 5x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 \\ \hline -\ x^6 - 5x^5 + x^4 - 4x^3 \qquad\qquad + x & x \\ \qquad x^3 - 5x^2 \qquad + 1 & \end{array}$$

Далее делим $\varphi(x)$ на первый остаток, положив $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 1$.

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 5x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 & x^3 - 5x^2 + 1 \\ \hline -\ x^5 - 5x^4 \qquad + x^2 & x^2 + 1 \\ \qquad x^3 - 5x^2 + 1 & \\ -\ x^3 - 5x^2 + 1 & \end{array}$$

Остаток равен нулю. Действие окончено

$$[f(x),\ \varphi(x)] = x^3 - 5x^2 + 1.$$

87. Найти общий наибольший делитель $\delta(x)$ многочленов

$$f(x) = x^4 - 1, \quad \varphi(x) = x^3 + i$$

и отыскать функции $U(x)$ и $V(x)$, удовлетворяющие условию

$$(x^4 - 1)\ U(x) + (x^3 + i)\ V(x) = \delta(x).$$

Решение. Делим $f(x)$ на $\varphi(x)$, взяв $\mu_0 = 1$.

$$\begin{array}{l|l} x^4 \quad - 1 & x^3 + i \\ \cline{2-2} x^4 + ix & x \\ \hline \quad -ix - 1 = -i\ (x - i). & \end{array} \qquad x^4 - 1 = (x^3 + i) \cdot x - i\,(x - i), \qquad \lambda_1 = -i$$

Взяв $\mu_1 = 1$, делим функцию $\varphi(x)$ на остаток $x - i$, пользуясь пр Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & i \\ \hline +i & 1, & +i, & -1, & 0 \end{array}$$

$$x^3 + i = (x - i)\ (x^2 + ix - 1).$$

Общий наибольший делитель

$$[x^4 - 1,\ x^3 + i] = x - i.$$

Пользуясь известными формулами, находим:

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = -ix,\ \varphi_0(x) = 0,\ \varphi_1(x) = i,$$

откуда следует, что простейшее решение задачи дают многочлены

$$U(x) = i,\ V(x) = -ix.$$

Найти общий наибольший делитель многочленов

88. $f(x) = x^6 - x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 1, \quad \varphi(x) = 2x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4x - 1.$

89. $f(x) = x^6 - ix^5 + (1 + 2i)\ x^4 + 2x^3 + (3i - 1)\,x^2 + (1 + i)\,x + i - 1,$

$$\varphi(x) = x^5 + 2ix^4 + 4x^3 + (5 + 3i)\,x^2 - 5ix + 5.$$

90. Найти многочлены $U(x)$ и $V(x)$, удовлетворяющие условию

$$(x - 1)^3\,U(x) + (x + 1)^3\,V(x) = 1$$

Степень следует взять по возможности низкой.

91. Найти простейшие многочлены $U(x)$ и $V(x)$, удовлетворяющие условию

$$(x - 1)^2\,U(x) + x^6\,V(x) = 1$$

92. Найти простейшие многочлены, удовлетворяющие равенству

$$(x - 1)^3\,U(x) + (x^2 + 1)^2\,V(x) = x^2 + x + 1$$

93*. Определить многочлены $U(x)$ и $V(x)$ по возможности низкой степени, удовлетворяющие условию

$$(1 - x)^m\,U(x) + x^n\,V(x) = 1$$

94*. Найти многочлен 5-й степени, дающий при на x^4+1 остатке $2x^2-x-2$ и делящийся без остатка на x

95. Найти многочлен 4-й степени, дающий при $(x-1)^3$ равный 8, и при делении на $(x+1)^2$ остаток, равный -8.

96. Общий наибольший делитель функций $f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x) = \delta(x)$. что всегда возможно найти целые функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_m(x)$, творяющие соотношению

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(x)+f_2(x)\cdot\varphi_2(x)+\ldots+f_m(x)\cdot\varphi_m(x)=\delta(x).$$

97. Показать, что многочлен $F(x)$, взаимно простой с многочленами $f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)$, взаимно прост с произведением $f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots f_m(x)$.

$$x^6-x^5-4x^4+2x^3+5x^2-x-2=0$$

имеет кратные корни. Решить уравнение

Решение. Разложим функцию

$$f(x)=x^6-x^5-4x^4+2x^3+5x^2-x-2$$

на множители с простыми корнями. Вычисление производим, как показано в схеме.

Вычисление многочленов $\delta_1(x), \delta_2(x), \ldots \delta_k(x)$.

1. $f'(x)=6x^5-5x^4-16x^3+6x^2+10x-1$; $\mu_0=36$.

$$\begin{array}{l|l}
36x^6-36x^5-144x^4+72x^3+180x^2-36x-72 & 6x^5-5x^4-16x^3+6x^2+10x-1 \\
\underline{36x^6-30x^5-96x^4+36x^3+60x^2-6x} & \overline{6x-1} \\
-6x^5-48x^4+36x^3+120x^2-30x-72 & \\
\underline{-6x^5+5x^4+16x^3-6x^2-10x+1} & \lambda_1=-1. \\
-53x^4+20x^3+126x^2-20x-73 &
\end{array}$$

$\mu_1=53^2=2809.$

$$\begin{array}{l|l}
16\,854x^5-14\,045x^4-44\,944x^3+16\,854x^2+28\,090x-2809 & 53x^4-20x^3-126x^2+20x+73 \\
\underline{16\,854x^5-6\,360x^4-4\,068x^3+6\,360x^2+23\,214x} & \overline{318x-145} \\
-7\,685x^4-4\,876x^3+10\,494x^2\quad 4\,876x-2\,809 & \\
\underline{-7\,685x^4+2\,900x^3+18\,270x^2-2\,900x-10\,585} & \\
-7776x^3-7776x^2+7776x-7776=-7776(x^3+x^2-x-1); &
\end{array}$$

$\lambda_1=-7776$; $\mu_2=1$.

$$\begin{array}{l|l}
53x^4-20x^3-126x^2+20x+73 & x^3+x^2-x-1 \\
\underline{53x^4+53x^3-53x^2-53x} & \overline{53x-73} \\
-73x^3-73x^2+73x+73 & \\
\underline{-73x^3-73x^2+73x+73} & \\
0 &
\end{array}$$

2. $\delta_1(x)=[f(x), f'(x)]=x^3+x^2-x-1.$

$\delta_1'(x)=3x^2+2x-1.$

$\mu_0 = 9$

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 9x^3 + x^2 - 9x - 9 & 3x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-\ 9x^3 + 6x^2 - 3x} & \overline{3x + 1} \\
\qquad 3x^2 - 6x - 9 & \\
\qquad \underline{-\ 3x^2 + 2x - 1} & \\
\qquad\qquad -8x - 8 = -8(x+1) & \lambda_1 = -8
\end{array}
$$

$\mu_1 = 1$

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 3x^2 + 2x - 1 & x + 1 \\
\underline{-\ 3x^2 + 3x} & \overline{3x - 1} \\
\qquad -x - 1 & \\
\qquad \underline{-\ -x - 1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

3. $\delta_2(x) = [\delta_1(x),\ \delta_1'(x)] = x + 1$

$\delta_2'(x) = 1$

$$\delta_3(x) = [\delta_2(x),\ \delta_2'(x)] = 1$$

4. $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x)$

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^6 - x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x - 2 & x^3 + x^2 - x - 1 \\
\underline{-\ x^6 + x^5 - x^4 - x^3} & \overline{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\
\qquad -2x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 & \\
\qquad \underline{-\ -2x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 2x^2} & \\
\qquad\qquad -x^4 + x^3 + 3x^2 - x & \\
\qquad\qquad \underline{-\ -x^4 - x^3 + x^2 + x} & \\
\qquad\qquad\qquad 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\ 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

5. $\varphi_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)(x^2 - 1)$

	1	1	−1	−1
−1	1	0	−1	0

6. $\varphi_3(x) = x^2 - 1$

$$\varphi_3(x) = x + 1$$

Вычисление функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

1.
$$\begin{array}{rrrr|l} & x^3 & -2x^2 & -x+2 & x^2-1 \\ \hline - & x^3 & & -x & x-2 \\ \hline & & -2x^2 & +2 & \\ - & & -2x^2 & +2 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

$$f_1(x) = x - 2,$$

2. $x^2 - 1 = (x+1)x - 1,$ $\qquad f_2(x) = x - 1,$

3. $f_3(x) = x + 1$

В результате всех вычислений находим:

$$f(x) = (x-2)(x-1)^2(x+1)^3.$$

Уравнение имеет три различных корня: 2, 1, -1. Первый корень простой, 2-й двойной и 3-й тройной.

Зная, что уравнение имеет кратные корни, определить их кратность и решить уравнение.

99. $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0.$

100. $x^6 + x^5 - 14x^4 - 8x^3 + 64x^2 + 16x - 96 = 0.$

101. $x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72 = 0.$

102. $144x^4 - 76x^3 - 143x^2 - 12x + 36 = 0.$

103. $9x^7 + 48x^6 + 91x^5 + 102x^4 + 110x^3 + 20x^2 - 72x + 16 = 0.$

104. $24x^4 - 4x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0.$

105. $x^5 - x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 5x - 3 = 0.$

106. Зная, что уравнения

$$2x^4 - 3x^3 - 2x + 3 = 0, \qquad 2x^4 - x^3 - 2x + 1 = 0$$

имеют общие корни, найти эти корни и решить уравнения.

107. Уравнения

$$3x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0, \qquad 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$$

имеют общие корни. Решить уравнения.

108. Решить уравнения

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0, \qquad x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0,$$

зная, что они имеют общие корни.

109. При значении λ уравнение

$$x^3 - 3x + \lambda = 0$$

имеет двойной корень? Найти λ и решить уравнение.

110. Уравнение имеет кратные корни; найти эти корни, зная, один из корней $\frac{+1+i\sqrt{3}}{2}$.

$$x^6 - 11x^5 + 48x^4 - 107x^3 + 133x^2 - 96x + 36 = 0.$$

111. Уравнение имеет кратные корни. Решить уравнение, зная, что один из корней равен $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$:

$$x^9 - 2x^8 + 3x^7 - 5x^6 + 5x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

112. Уравнение

$$2x^{10} + x^9 - 5x^8 - 2x^7 - 4x^6 - 3x^5 + 11x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x - 4 = 0$$

имеет кратные корни. Найти эти корни, зная, что один из корней его равен i.

113*. Многочлены $U(x)$ и $V(x)$ взаимнопростые. $F(u, v)$ есть однородная функция u, v, не имеющая кратных множителей. Показать, что общие корни уравнений

$$F[U(x), V(x)] = 0, \qquad U(x)\ V'(x) - V(x) \cdot U'(x) = 0$$

являются кратными корнями уравнения

$$F[U(x), V(x)] = 0,$$

и наоборот.

114*. Предполагая многочлены $U(x)$, $V(x)$ взаимно простыми, а функцию $F(u, v)$ однородной относительно u, v и не имеющей кратных множителей, показать, что корень a кратности p уравнения

$$F[U(x), V(x)] = 0$$

является корнем кратности $p - 1$ уравнения

$$F[U'(x)\ V'(x)] = 0.$$

115*. Функция $F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)^k$, причем функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно простые и не имеют кратных корней. Положив

$$P(x) = [F(x), F'(x)], \quad Q(x) = \frac{F(x)}{P(x)}, \quad R(x) = \frac{F'(x)}{P(x)},$$

показать, что

$$\varphi(x) = \left[Q(x), R(x) - k\,Q'(x) \right] \qquad k > 1.$$

(Остроградский)

ДРОБНАЯ РАЦІОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ.

1. Рациональная дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, где $\varphi(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot (x-b)^{\beta} \ldots (x-l)$, представлена в виде:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}} = \omega(x) + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{x-a} +$$

$$+ \frac{B_1}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta}}{x-b} + \ldots + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda}} +$$

$$+ \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda}}{x-l} \qquad (1)$$

притом только единственным образом. Функция $\omega(x)$ целая функция, если степень $f(x)$ выше или равна степени $\varphi(x)$ и нуль в противном случае.

2. Рациональная функция $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, числитель и знаменатель которой — многочлены с вещественными коэфициентами, и знаменатель

$$\varphi(x) = (x-a)^{\alpha} \ldots (x-l)^{\lambda} (x^2+px+q)^{\pi} \ldots (x^2+sx+t)^{\sigma}$$

может быть представлена в виде

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \omega(x) + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{x-a} + \ldots + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda}} + \ldots$$

$$+ \frac{L_{\lambda}}{x-l} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{\pi}} + \ldots + \frac{P_{\pi}x+Q_{\pi}}{x^2+px+q} + \ldots$$

$$+ \frac{S_1x+T_1}{(x^2+sx+t)^{\sigma}} + \ldots + \frac{S_{\sigma}x+T_{\sigma}}{x^2+sx+t} \qquad (2)$$

и притом единственным образом. Функция $\omega(x)$ — целая функция или нуль: целая функция, если степень $f(x)$ не меньше степени $\varphi(x)$, и нуль в противном случае. Все коэфициенты в правой части равенства — числа вещественные.

3. Коэфициенты числителей дробей в правой части (1) и (2) равенств могут быть вычислены посредством деления или по методу неопределенных коэфициентов. Функция $\omega(x)$ есть частное, получаемое при делении числителя $f(x)$ на знаменатель $\varphi(x)$.

4. Если a есть простой корень знаменателя, то соответствующий коэфициент A

$$A = \frac{f(a)}{\varphi'(a)}.$$

5. Дробь $\frac{f'(x)}{f}$ представляется в виде:

$$\frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\ldots+\frac{\lambda}{x-l}$$

где

$$f(x)=a_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}$$

6. Рациональная дробь $\frac{\psi(x_1)}{\varphi(x_1)}$ от корня x_1 уравнения

$$f(x)=a_0x_1^{\,n}+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

может быть представлена в виде целой функции степени не выше $n-1$ $\omega(x_1)$ от корня того же уравнения

$$\frac{\psi(x_1)}{\varphi(x_1)}=\omega(\ _1)$$

7. Рациональная дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, знаменатель которой имеет корень $x_0=0$ кратности p, может быть представлена в виде бесконечного ряда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=x^{-p}\,(u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots+u_kx^k+\ldots)$$

Если n степень числителя, и знаменатель

$$\varphi(x)=x^p(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m)\qquad b_m\neq 0,$$

то коэфициенты ряда связаны соотношением

$$b_0u_{k-m}+b_1u_{k-m+1}+\ldots+b_mu_k=0\qquad k>n.$$

Задачи

1. Разложить на простейшие дроби

$$\frac{x^6+5x^3+7x+1}{x^5-2x^4-x+2}$$

Решение. Выделим сначала целую часть

$$\begin{array}{l|l} x^6+5x^3+7x+1 & x^5-2x^4-x+2 \\ \underline{x^6-2x^5-x^2+2x} & x+2 \\ \quad 2x^5+5x^3+x^2+5x+1 & \\ \quad \underline{2x^5-4x^4-2x+4} & \\ \qquad 4x^4+5x^3+x^2+7x-3 & \end{array}$$

Дробь представляется в виде

$$\frac{x^6+5x^3+7x+1}{x^5-2x^4-x+2}=x+2+\frac{4x^4+5x^3+x^2+7x-3}{x^5-2x^4-x+2}$$

Знаменатель

$$x^5 - 2x^4 - x + 2 = (x-2)(x-1)(x+1)$$

содержит только простые корни. Разложение дроби имеет вид

$$\frac{4x^4 + 5x^3 + x^2 + 7x - 3}{x^5 - 2x^4 - x + 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-i} + \frac{D'}{x+i}.$$

Коэфициенты числителей находятся согласно указанной формулы (см. 4). Для вычисления их воспользуемся схемой Горнера

	4,	5,	1,	7,	-3	
2	4,	13,	27,	61,	119	$= f(2)$
1	4,	9,	10,	17,	14	$= f(1)$
-1	4,	1,	0,	7,	-10	$= f(-1)$
i	4,	$5+4i$,	$-3+5i$,	$2-3i$,	$2i$	$= f(i)$
$-i$	4,	$5-4i$,	$-3-5i$,	$2+3i$,	$-2i$	$= f(-i)$

	5,	-8,	0,	0	-1	
2	5,	2,	4,	8,	15	$= \varphi'(2)$
1	5,	-3,	-3,	-3,	-4	$= \varphi'(1)$
-1	5,	-13,	$+13$,	-13,	12	$= \varphi'(-1)$
i	5,	$-8+5i$,	$-5-8i$,	$8-5i$,	$4+8i$	$= \varphi'(i)$
$-i$	5,	$-8-5i$,	$-5+8i$,	$8+5i$,	$4-8i$	$= \varphi'(-i)$

$$A = \frac{119}{15},\ B = \frac{14}{-4} = -\frac{7}{2},\ C = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6},\ D = \frac{2i}{4+8i} =$$

$$= \frac{i+2}{10} \cdot D' = \frac{2-i}{10}.$$

Разложение предложенной дроби на простейшие представляется в виде:

$$\frac{x^5 + 5x^3 + 7x + 1}{x^5 - 2x^4 - x + 2} = x + 2 + \frac{119}{15(x-2)} - \frac{7}{2(x-1)} - \frac{5}{6(x+1)} + \frac{2x-1}{5(x^2+1)}$$

Последний член получается сложением

$$\frac{2+i}{10(x-i)} + \frac{2-i}{10(x+i)} = \frac{2x-1}{5(x^2+1)}.$$

Разложить на простейшие дроби:

2. $\dfrac{2x^2 - 2x - 1}{x(x-2)(x^2-1)}$

3. $\dfrac{x^3 - x^2 - x + 0{,}4}{(x^2-4)(x^2-x)}$

4. $\dfrac{x^6 - x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2 + 4}{x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x}$

5. $\dfrac{5x^2 + 2x - 1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$

6. $\dfrac{1}{x^4 - 1}$

7. $\dfrac{x^6 + 4x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 1}{(x-1)(2x+3)(x-4)(3x-1)}$

8 Разложить на простейшие дроби

$$\frac{4x^6-3x^5+3x^4-2x^3+3x^2-3x+1}{x^3(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

Решение Разложение дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{4x^6-3x^5+3x^4-2x^3+3x^2-3x+1}{x^3(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A_1}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x}+$$
$$+\frac{B_1}{(x-1)^2}+\frac{B_2}{x-1}+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+x+1}$$

Коэфициенты числителей могут быть вычислены посредством деления.

Делим числитель дроби на произведение $(x-1)^2(x^2+x+1)=$ $=x^4-x^3-x+1$ и располагаем действие по возрастающим степеням x. Деление прекратим, когда остаток будет делиться на x^3.

$$\begin{array}{l|l}
1-3x+3x^2-2x^3+3x^4-3x^5+4x^6 & 1-x-x^3+x^4 \\ \cline{2-2}
-\;1-x\qquad\quad -x^3+x^4 & 1-2x+x^2 \\ \cline{1-1}
\quad -2x+3x^2-x^3+2x^4-3x^5 & \\
-\;-2x+2x^2\qquad\quad +2x^4-2x^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad x^2-x^3\qquad\quad -x^5+4x^6 & \\
\qquad x^2-x^3\qquad\quad -x^5+x^6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3x^6 &
\end{array}$$

Дробь можно представить в виде

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{(1-2x+x^2)(1-x-x^3+x^4)+3x^6}{x^3(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1-2x+x^2}{x^3}+$$
$$+\frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

Расположим числитель и знаменатель последней дроби по степеня $(x-1)^2$, положим $x-1=y$. Находим, пользуясь схемой Горнера

$$\begin{array}{c|l}
 & 3,\ +0,\ 0\ \ 0 \\ \hline
1 & 3,\quad 3,\ 3\ \ 3 \\
 & 3,\quad 6,\ 9 \\
 & 3,\quad 9 \\
 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|l}
 & 1,\ 1,\ 1 \\ \hline
1 & 1,\ 2,\ 3 \\
 & 1,\ 3 \\
 & 1
\end{array}$$

$$\frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{3y^3+9y^2+9y+3}{y^2(y^2+3y+3)}$$

Делим числитель на y^2+3y+3 и располагаем действие по возрастающим степеням y:

$$\begin{array}{l|l}
3+9y+9y^2+3y^3 & 3+3y+y^2 \\ \cline{2-2}
3+3y+y^2 & 1+2y \\ \cline{1-1}
\quad 6y+8y^2+3y^3 & \\
\quad 6y+6y^2+2y^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad 2y^2+y^3 &
\end{array}$$

Результат деления дает возможность написать

$$\frac{3y^3+9y^2+9y+3}{y^2(y^2+3y+3)}=\frac{(1+2y)(3+3y+y^2)+2y^2+y^3}{y^2(y^2+3y+3)}=$$

$$=\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}+\frac{2+y}{y^2+3y+3}$$

Заменяя y на $x-1$ и внося полученный результат в предыдущие получим:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

на простейшие дроби

$$\frac{x^7-2x^6-2x^5-6x^4+7x^3+3x^2-5x+4}{(x-1)^5}$$

$$\frac{x^5+2x^4+2x^3-x-2}{(x^2+x+1)^3}$$

11 $$\frac{21x^4-28x^3-5x^2-30x-6}{(x-1)^3(3x+1)^2}$$

12. $$\frac{x^7+2x^6+3x^5+8x^4+7x^3+3x^2+2x+1}{x^4(x+1)^2}$$

$$\frac{x^6-x^5+7x^4-x^3+8x^2+3}{x^3(x^2+1)^2}$$

14. $$\frac{x^5-3x^4+2x^3-x^2+2x}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}$$

$$\frac{x^8+x^7-x^5-2x^3+3x^2-x+1}{x(x+1)(x-1)^3}$$

16. $$\frac{x^7+5x^6+x^5+x^4-7x^3-13x}{(x-2)(x+1)^2(x-1)^3}$$

$$\frac{2x^7-7x^6+8x^5-6x^4+6x^3-7x^2+8x-4}{x^3(x-1)^2(x-2)(x^2+1)}$$

18. $$\frac{x^8+4x^6+6x^4+5x^2}{(x^4-1)^2}$$

Разложить на простейшие дроби

$$\frac{6x}{x^6-1}$$

Решение. Знаменатель разлагается на множители

$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

Разложение на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{6x}{x^6-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Px+Q}{x^2+x+1}+\frac{Rx+S}{x^2-x+1}$$

Коэфициенты A и B находятся сразу согласно известному правилу

$$A=\frac{6\cdot 1}{6\cdot 1}=1 \qquad B=\frac{6\cdot(-1)}{6\cdot(-1)^5}=1$$

Остальные коэфициенты определим путем сравнения правой и левой равенства, которое получим из написанного

$$6x=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)+$$
$$+(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)+$$
$$-(Px+Q)(x^2-x+1)(x^2-1)+(Rx+S)(x^2+x+1)(x^2-1)$$

Отметим коэфициенты при 5-й, 4-й, 1-й и 0-й степени x в обеих частях равенства. Приравнивая их, получаем уравнения для определения неизвестных коэфициентов:

$$P+R+2=0 \qquad Q-S=2 \qquad Q+S=0; \qquad Q=-S=1$$
$$Q-P+S+R=0 \qquad P-R=0 \qquad P+R+2=0; \qquad P=R=-1$$
$$Q-P-S-R+2=6$$
$$Q+S=0$$

Решая эти уравнения, как показано выше, и подставляя полученные значения в разложение данной дроби, находим окончательный результат:

$$\frac{6x}{x^6-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}-\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

Разложить на простейшие дроби:

20 $\dfrac{2x^5+2x^3+x^2}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)^2}$

21 $\dfrac{2x^5+2x^3-x^2}{(x^2+1)^2(x^2-x+1)^2}$

22 $\dfrac{4x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(2x^2+x+1)^2}$

23 $\dfrac{x^8+2x^6+x^5+x^4+x^2+x+1}{x^3(x^2+1)(x^2+x+1)}$

24 $\dfrac{x+2}{(x+1)(x^2+x+1)^2(x^2-2x+2)}$

25 $\dfrac{2x^5+3x^4+2x^3+2x^2}{(x^4-1)(x^2+x+1)^2}$

26 $\dfrac{x^2}{x^4-1}$

27 $\dfrac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

28 $\dfrac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x}$

29 $\dfrac{x^{2n-1}}{x^{2n}-1}$

30 $\dfrac{x^{2n}}{x^{2n+1}-1}$

31 $\dfrac{1}{x^{2n}+1}$

32 $\dfrac{x^2}{x^{2n+1}+1}$

33 $\dfrac{x^3}{x^5-1}$

34 $\dfrac{1}{(x^2-2x\cos a+1)(x^2-2x\cos b+1)}$

35 $\dfrac{x^2}{x^4-2x^2\cos 2a+1}$

36 Представить дробную функцию

$$\frac{5\alpha^2+3\alpha}{\alpha^2+\alpha+1}$$

от корня α уравнения

$$x^3-3x+1=0$$

в виде целой функции от того же корня.

Решение. Задача приводится к отысканию функций $U(x)$ и $V(x)$ удовлетворяющих соотношению

$$U(x)(x^3-3x+1)+V(x)(x^2+x+1)=5x^2+3x$$

Степени $U(x)$, $V(x)$ не превышают единицы и двух соответственно. Функции $U(x)$ и $V(x)$ могут быть найдены путем делений.

Положим

$$U(x)=a_0x+a_1 \qquad V(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$$

Коэфициенты функций определятся из сравнения коэфициентов при одинаковых степенях x в обеих частях равенства (*):

$$a_0 + b_0 = 0 \qquad 4b_0 + b_1 + b_2 = 5 \qquad 3b_0 + 2b_2 = 5$$

$$a_1 + b_0 + b_1 = 0 \qquad b_0 + b_1 - b_2 = 0 \qquad 2b_0 - 5b_2 = -3$$

$$-3a_0 + b_0 + b_1 + b_2 = 5 \qquad -b_0 + b_1 + 4b_2 = 3$$

$$a_0 - 3a_1 + b_1 + b_2 = 3 \qquad b_0 = \frac{-19}{-19} = 1 \qquad b_2 = \frac{-19}{-19} = 1$$

$$a_1 + b_2 = 0 \qquad b_1 = 0$$

Так как значения коэфициентов a_0, a_1 нам не нужны в дальнейшем, то при решении системы мы их исключаем вовсе. Найденные значения b_0, b_1, b_2 дают для $V(x)$ функцию

$$V(x) = x^2 + 1.$$

Положив в равенстве (*) $x = \alpha$, получаем

$$\frac{5\alpha^2 + 3\alpha}{\alpha^2 + \alpha + 1} = \alpha^2 + 1.$$

37. Представить дробную функцию

$$\frac{\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha}{\alpha^3 + \alpha^2 + 1}$$

от корня α уравнения

$$x^4 + x^3 + x + 1 = 0$$

в виде целой функции от того же корня.

38. Представить дробную функцию

$$\frac{\alpha^k}{\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + 1}, \qquad 0 \leqq k < n$$

от корня α уравнения

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + 1 = 0$$

в виде целой функции от того же корня степени не выше $n - 1$.

39. Представить функцию

$$\frac{5\alpha^4 - 2}{\alpha^2 + \alpha + 1}$$

от корня α уравнения

$$3x^5 + x^4 - 3x^2 - 3 = 0$$

в виде целой функции от того же корня.

40. Представить функцию

$$\frac{q\alpha}{\alpha^2 + p}$$

от корня α уравнения

$$x^3 + px + q = 0$$

в виде целой функции от того же корня.

41. Представить в целом виде функцию

$$\frac{2}{(\alpha+1)^2}$$

от корня α уравнения

$$x^3+3x^2+6x+5=0.$$

Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби

42. $$\frac{2\sqrt[3]{2^2}-3}{(\sqrt[3]{2}+1)^2}$$

43. $$\frac{6\sqrt[4]{27}+6\sqrt[4]{9}+3\sqrt[4]{3}-11}{\sqrt[4]{27}+3\sqrt[4]{9}+2\sqrt[4]{3}+1}$$

44. $$\frac{2\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}+1}$$

45. $$\frac{\sqrt{4}+5\sqrt[3]{2}+7}{\sqrt{2+\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{2}+3}$$

46. $$\frac{(1+i)\sqrt[3]{1+i}+3i+1}{\sqrt[3]{1+i}+i+2}$$

47. $$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}-(2-\sqrt{2})\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}+2}{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}}$$

48. Вычислить четыре первые члена разложения в ряд по степеням функции

$$\frac{x^2+1}{3x^3+x+1}$$

Решение. Делим числитель на знаменатель, располагая действие возрастающим степеням x

$$\begin{array}{rl|l}
 & 1+x^2 & 1+x+3x^3 \\ \cline{3-3}
- & 1+x+3x^3 & 1-x+2x^2-5x^3 \\ \cline{2-2}
 & -x+x^2-3x^3 & \\
- & -x-x^2-3x^4 & \\ \cline{2-2}
 & 2x^2-3x^3+3x^4 & \\
- & 2x^2+2x^3+6x^5 & \\ \cline{2-2}
 & -5x^3+3x^4-6x^5 & \\
- & -5x^3-5x^4-15x^6 & \\ \cline{2-2}
 & 8x^4-6x^5+15x^6 &
\end{array}$$

Остановив действие после того, как в частном найдено четыре получаем:

$$\frac{x^2+1}{3x^3+x+1}=1-x+2x^2-5x^3+\omega(x)$$

где

$$\omega(x)=x^4\cdot\frac{8-6x+15x^2}{1+x+3x^3}.$$

49. Вычислить шесть первых членов разложения в ряд по возраст степеням x функции

$$\frac{2x+1}{x^4+x^3+x^2}$$

50. Вычислить четыре первых члена в разложении функции

$$\frac{x^2+1}{2x^3+x-2}$$

ряд по степеням $x+1$.

51. Вычислить семь первых членов разложения дроби

$$\frac{x^4+2x^3-x^2-5x+1}{x^5-7x^4+19x^3-24x^2+14x-3}$$

ряд по возрастающим степеням $x-1$

52. Вычислить пять первых членов разложения в ряд по убывающим x функции

$$\frac{x^4+1}{x^3+x+1}$$

53. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$\frac{\sin a}{x^2-2x\cos a+1}$$

определить область сходимости ряда.

54. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

определить область сходимости ряда.

55. Разложить в ряд по убывающим степеням x функцию

$$\frac{x^2+1}{x^2-6x+8}$$

область сходимости ряда.

56. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}$$

определить область сходимости ряда.

57. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$\frac{1}{(x^4+1)(x^2+1)(x+1)}$$

58. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$\frac{2x\cos a}{x^4-2x^2\cos 2a+1}$$

определить область сходимости ряда.

59. Уравнение третьей степени относительно λ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0$$

имеет три корня λ_1, λ_2, λ_3. Выразить x^2, y^2, z^2 и сумму x^2+y^2 λ_1, λ_2, λ_3.

60. Коэфициенты бесконечного ряда

$$1+2x+2x^2-4x^4+\ldots+U_nx^n+\ldots$$

удовлетворяют соотношению

$$2U_s-U_{s+2}+U_{s+3}=0; \qquad s\geqq 0$$

Вычислить сумму ряда.

Решение. Умножим бесконечный ряд на многочлен $2x^3-x+1$. во внимание соотношение, связывающее коэфициенты ряда,

$$(1-x+2x^3)(1+2x+2x^2-4x^4+\ldots+U_nx^n+\ldots)=1+x,$$

откуда следует, что

$$1+2x+2x^2-4x^4+\ldots=\frac{x+1}{2x^3-x+1}$$

61. Коэфициенты ряда

$$U+U_1x+U_2x^2+\ldots+U_nx+\ldots$$

связаны соотношением

$$U_s+U_{s+1}+U_{s+2}+U_{s+3}=0;$$
$$s\geqq 1 \quad U_0=1,\ U_1=-1,\ U_2=0,\ U_3=1.$$

Вычислить сумму ряда и определить область сходимости.

62. Коэфициенты ряда

$$U_0+U_1x+U_2x^2+\ldots+U_nx+\ldots$$

удовлетворяют условию

$$U_s+U_{s+1}+U_{s+2}=0, \quad s>3 \quad U_0=U_1=U_2=0 \quad U_3=1$$

Вычислить сумму ряда и определить область сходимости.

63. Коэфициенты ряда

$$U_0+U_1x+\ldots+U_nx^n+\ldots$$

удовлетворяют условию

$$U_s-3U_{s+1}+U_{s+3}=0; \quad s\geqq 0 \quad U_0=U_1=1 \quad U_2=3$$

Вычислить сумму и определить область сходимости ряда.

64*. Вычислить сумму ряда

$$1+4x+7x^2+\ldots+(3n+1)x^n+\ldots \qquad |x|<1$$

65. Вычислить сумму ряда

$$1 + 2x + 5x^2 + \ldots + (n^2 + 1)x^n + \ldots \qquad |x| < 1$$

66. Вычислить сумму ряда

$$1 + 3x + 11x^2 + \ldots + (n^3 + n + 1)x^n + \ldots \qquad |x| < 1$$

67*. Определить коэфициенты в разложении функции

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}$$

ряд по убывающим степеням x, предполагая, что корни знаменателя

68*. Предполагая, что функция

$$\frac{x + a}{x^2 + 2ax + 1} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots + u_nx^n + \ldots$$

числить сумму ряда

$$u_0^3 + u_1^3x + u_2^3x^2 + \ldots + u_n^3x^n + \ldots$$

69*. Последовательность чисел $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}, u_n \ldots$ составлена соотношения

$$u_{s+n} + a_1u_{s+n-1} + \ldots + a_nu_s = 0; \; s \geqq 0.$$

Первые n чисел $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ заданы.

Показать, что когда корни уравнения

$$x^n + a_1x^{n+1} + a_2x^{n+2} + \ldots + a_n = 0$$

различны и наибольшему по модулю корню x_1 нет равного по модулю, то

$$x_1 = \underset{p \leftarrow \infty}{\text{пред}} \frac{u_{p+1}}{u_p}$$

70*. Определить сумму бесконечного ряда, представляющего рациональную дробь

$$u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots + u_nx^n + \ldots,$$

если известно, что коэфициенты ряда могут равняться только одному из чисел -1, 0, $+1$. Лагэр (Laguerre).

71*. Вычислить сумму

$$\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \ldots + \frac{1}{x_n - 1},$$

где $x_1, x_2 \ldots x_n$ корни уравнения

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + 1 = 0.$$

72*. Изображения корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

на плоскости комплексных чисел либо все лежат на прямой, проведенной через точку, изображающую один из корней уравнения

$$na_0x^{n-1} + (n - 1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0,$$

либо располагаются по разные ее стороны.

73*. Все корни целого многочлена имеют мнимую часть одного Показать, что корни производной имеют мнимую часть того же знака.

74*. Все корни целой функции $f(x)$ вещественны и отрицательны. можно сказать о корнях $f'(x)$?

75*. Показать, что внутри выпуклого многоугольника, содержаще изображение всех корней целой функции $f(x)$, содержатся и изображен всех корней производной.

76*. Окружность содержит внутри себя изображения всех корней функции $f(x)$. Показать, что она содержит и изображения корней $f'(x)$.

77*. Все корни функции $f(x)$ степени n вещественны. Показать, в промежутке

$$\left(-\frac{x_i - x_{i-1}}{n} + x_i, \qquad \frac{x_{i+1} - x_i}{n} + x_i\right),$$

где x_{i-1}, x_i, x_{i-1} обозначают три последовательных корня функции, не корней $f'(x)$.

78*. Все корни функции $f(x)$ степени n вещественны. Показать, что все корни уравнения

$$f(x) + kif'(x) = 0, \ k \text{ — число вещественное,}$$

комплексные числа и имеют мнимую часть, меньшую $n \cdot |k|$ по абсолютной величине.

ОТДЕЛ V.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ. ИСКЛЮЧЕНИЕ.

§ 1. Вычисление симметрических функций.

1. Функции

$$\varphi_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n, \quad \varphi_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \ldots \varphi_n = \\ = x_1x_2 \ldots x_n$$

называются основными симметрическими функциями. Функции φ_k приписывается вес, равный k. Вес произведения $\varphi_1^{\alpha_1} \cdot \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_n^{\alpha_n}$ определяется числом

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n.$$

2. Всякая целая симметрическая функция $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ выражается в виде целой функции $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ от основных симметрических функций.

3. Степень функции $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ относительно $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ равна показателю наивысшей степени, с которой отдельные переменные x_k входят в выражение $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

4. Если функция $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ есть однородная функция $x_1, x_2, \ldots x_n$ измерения m, то $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ — изобарическая функция $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ веса m.

5. Всякая целая симметрическая функция $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ от корней $x_1, x_2, \ldots x_n$ уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

будучи умножена на a_0^i, где i показатель наивысшей степени, с которым отдельные корни x_k входят в выражение симметрической функции, может быть представлена в виде целой однородной функции $\Phi(a_0, a_1, \ldots a_n)$ измерения i от коэфициентов уравнения.

6. Если $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ — однородная симметрическая функция измерения m, то $\Phi(a_0, a_1, \ldots a_n)$ — изобарическая функция от $a_0, a_1, \ldots a_n$ веса m.

7. Между суммами одинаковых степеней

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$$

корней уравнения и его коэфициентами существует зависимость

$$a_0 s_k + a_1 s_{k-1} + \ldots + a_{k-1} s_1 + k a_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$
$$a_0 s_k + a_1 s_{k-1} + \ldots + a_{n-1} s_{k-n+1} + a_n s_{k-n} = 0.$$

8. Дробная симметрическая функция корней выражается в виде дробной функции от коэфициентов.

Задачи.

1. Выразить симметрическую функцию

$$Sx_i^2 x_k = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + \ldots + x_i^2 x_k + \ldots + x_n^2 x_{n-1}$$

через основные симметрические функции.

Решение. 1-й способ. Предложенная симметрическая функция—однородная измерения 3. Отдельные переменные входят в выражение функции с показателем не бо́льшим 2. Функция $Sx_i^2 x_k$ представляется в виде суммы слагаемых вида $\varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta$ или φ_γ, умноженных на числовые коэфициенты. При этом $\alpha + \beta = 3$, $\gamma = 3$, так как вес каждого слагаемого равен 3.

Разбирая отдельные возможные значения для чисел α и β, легко убедиться, что

$$Sx_i^2 x_k = A\varphi_1 \cdot \varphi_2 + B\varphi_3.$$

Для определения коэфициентов поступим следующим образом. Пользуясь тем, что полученное равенство — тожество, справедливое при всяких значениях $x_1, x_2, \ldots x_n$, положим сначала

α) $x_1 = x_2 = 1, \qquad x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$

В этом случае, выписывая в выражение рассматриваемых симметрических функций только члены неравные нулю, находим:

$$Sx_i^2 x_k = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = 2 \qquad \varphi_1 = x_1 + x_2 = 2 \qquad \varphi_2 = x_1 \cdot x_2 = 1$$
$$\varphi_3 = 0; \; 2 = A \cdot 2 \cdot 1 + B \cdot 0 \qquad A = 1$$

β) Положим: $x_1 = x_2 = x_3 = 1, \qquad x_4 = x_5 = \ldots = x_n = 0$

Находим: $Sx_i^2 x_k = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 = 6$

$\varphi_1 = 1 + 1 + 1 = 3, \quad \varphi_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3, \quad \varphi_3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$$6 = 3 \cdot 3 + B \cdot 1 \qquad B = -3$$

Окончательно получаем:

$$Sx_i^2 x_k = \varphi_1 \varphi_2 - 3\varphi_3$$

2-й способ. Выразим симметрическую функцию через суммы одинаковых степеней

$$Sx_i^2x_k = s_2 \cdot s_1 - s_3.$$

Между функциями s_1, s_2, s_3 и основными симметрическими функция существует зависимость:

$$s_1 = \varphi_1, \qquad s_2 - \varphi_1 \cdot s_1 + 2\varphi_2 = 0, \qquad s_3 - \varphi_1 s_2 + \varphi_2 s_1 - 3\varphi_3 = 0,$$

откуда находим выражения s_1, s_2, s_3 через φ_1, φ_2, φ_3:

$$s_1 = \varphi_1, \qquad s_2 = \varphi_1^2 - 2\varphi_2, \qquad s_3 = \varphi_1^3 - 3\varphi_1\varphi_2 + 3\varphi_3.$$

Окончательно получаем:

$$Sx_i^2x_k = \varphi_1\varphi_2 - 3\varphi_3.$$

Замечание. Иногда вычисления, производимые изложенным способом, выгодно несколько видоизменять с целью сокращения числа необходимых действий. Это можно достичь тем, что вместо того, чтобы выражать искомую функцию через S_k, даем ее выражения через s_k и φ_k и тем уменьшаем число s_k, подлежащих вычислению.

Так в рассматриваемой задаче получаем сразу:

$$Sx_i^2x_k = s_1 \cdot \varphi_2 - 3\varphi_3 = \varphi_1 \cdot \varphi_2 - 3\varphi_3.$$

Коэфициент 3 взят нами потому, что при перемножении функций

$$\varphi_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \qquad \varphi_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_n \cdot x_{n-1}$$

произведение $x_ix_kx_e$ встречается три раза при умножении x_i на x_kx_e, x_k на x_ix_e, x_e на x_ix_k.

Применяя указанный прием сокращения, нужно быть очень внимательным, чтобы не ошибиться в определении числовых коэфициентов.

Выразить симметрическую функцию через основные:

2. $Sx_i^2x_k^2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + \ldots + x_i^2x_k^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \cdot x_n^2.$

3. $Sx_i^3x_k = x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + \ldots + x_i^3x_k + \ldots + x_n^3x_{n-1}.$

4. $Sx_i^2x_k^2x_l = x_1^2x_2^2x_3 + x_1^2x_2^2x_4 + \ldots + x_n^2x_{n-1}^2x_{n-2}.$

5. $(x_2 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2 + (x_3 - x_1)^2(x_2 - x_4)^2 + (x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2.$

6. $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2.$

7. $S(x_i - x_k)^2x_l \cdot x_m \ldots x_t = (x_1 - x_2)^2x_3x_4 \ldots x_n + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2x_1x_2 \ldots x_{n-2}.$

8. Выразить функции $S(x_i + x_k - x_s)^2$ от корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

через его коэфициенты.

Решение. Функция $S(x_i + x_k - x_s)^2$ однородная измерения 2. Отдельные переменные входят с показателем, не превышающим 2.

$$a_0^2S(x_i + x_k - x_s)^2 = \sum M_{\alpha\beta}a_\alpha \cdot a_\beta, \quad \alpha + \beta = 2$$

Возможные значения α, β

$$\alpha = \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

$$\beta = \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

Функция имеет вид:

$$a_0^2 S(x_i + x_k - x_s)^2 = A a_0 a_2 + B a_1^2$$

α) $x_1 = 1, \qquad x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0, \qquad a_0 = 1$

В выражении функции $S(x_i + x_k - x_s)^2$ корень x_1 содержится в $(x_1 + x_k - x_s)^2$. Число таких слагаемых равно числу размещений из $n-1$ элементов по 2, т. е. $(n-1)(n-2)$. Сумма их при указанных значениях $x_1, x_2 \ldots x_n$ равна $(n-1)(n-2)$, так как каждое слагаемое равно единице. Кроме указанных слагаемых, x_1 содержится еще в слагаемых $(x_i + x_k - x_1)^2$

Число таких слагаемых и их сумма при выбранных нами значениях корней равны

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$$

Таким образом получаем, что

$$S(x_i + x_k - x_s)^2 = \frac{3}{2}(n-1)(n-2)$$

и далее

$$a_1 = -(1 + 0 + \ldots + 0) = -1, \qquad a_2 = 1 \cdot 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

Отсюда следует, что

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2) = B(-1)^2, \qquad B = \frac{3}{2}(n-1)(n-2)$$

β) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1. \qquad a_0 = 1$

Число членов суммы $S(x_i + x_k - x_s)^2$ равно $(n-2) \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ отдельное слагаемое при указанных значениях $x_1, x_2 \ldots x_n$ равно 1.

$$S(x_i + x_k - x_s)^2 = (n-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2}, \qquad a_1 = -n, \qquad a_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

и далее

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} = A \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{3}{2} n^2 (n-1)(n-2)$$

$$A = -(3n-1)(n-2)$$

Окончательно получаем:

$$a_0^2 S(x_i + x_k - x_s)^2 = -(3n-1)(n-2) a_0 a_2 + \frac{3(n-1)(n-2)}{2} a_1^2$$

Выразить через коэфициенты уравнения следующи функции корней:

9. $Sx_i^2x_kx_l = x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + \ldots + x_i^2x_kx_l + \ldots + x_n^2x_{n-2}x_{n-1}$

10. $S(x_i - x_k)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-2} - x_n)^2.$

11. $S(X - x_i)^2(x_k - x_l)^2 = (X - x_1)^2(x_2 - x_3)^2 + \ldots$
$\ldots + (X - x_n)^2(x_{n-1} - x_{n-2})^2.$

12. $Sx_i^2x_k^2x_lx_m = x_1^2x_2^2x_3x_4 + x_1^2x_2^2x_3x_5 + \ldots + x_n^2x_{n-1}^2 \cdot x_{n-2}x_{n-3}.$

13. $Sx_i^2x_k^2x_l^2 = x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + \ldots + x_{n-2}^2 \cdot x_{n-1}^2x_n^2.$

14. $Sx_i^4x_kx_l = x_1^4x_2x_3 + x_1^4x_2x_4 + \ldots + x_n^4x_{n-1}x_{n-2}.$

15. Вычислить функцию $Sx_i^3x_k^2x_l^2$ от корней уравнения

$$x^4 + 2x^2 - x + 1 = 0.$$

Решение. Выразим функцию $Sx_i^3x_k^2x_l^2$ через суммы одинаковых степеней

$$S\,x_i^3x_k^2x_l^2 = s_3 \cdot Sx_k^2x_l^2 - Sx_k^5x_l^2;$$

$$2\,S\,x_k^2x_l^2 = s_2^2 - s_4; \qquad Sx_k^5x_l^2 = s_5 \cdot s_2 - s_7.$$

Окончательный результат будет

$$Sx_i^3x_k^2x_l^2 = \frac{1}{2}\,s_3s_2^2 - \frac{1}{2}\,s_3s_4 - s_2s_5 + s_7.$$

1	0	2	-1	1
	0	-4	3	-4
0	0	0	0	0
-4	0	8	-4	4
3	0	-6	3	-3
4	0	-8	4	
-10	0	20		
-1	0			
21				

Рис. 1.

Теперь вычислим значения $s_1, s_2 \ldots s_7$, пользуясь формулами, связующими эти функции с коэфициентами уравнения. Вычисления расположим в виде таблицы (см. рис. 1), причем в первой строчке выписываются коэфициенты a_i уравнения. Во второй строчке под каждым коэфициентом подписывается произведение ia_i коэфициента на его номер в уравнении, взятый с обратным знаком. В третьей помещаются произведения $-s_1a_i$ и т. д.

Суммы $s_1, s_2, \ldots$ вычисляются путем сложения элементов таблицы, расположенных на одной диагонали. Сначала находят s_1, после чего составляют третью строчку. Затем находят s_2, складывая элементы второй диагонали, и составляют четвертую строку и т. д. После небольшой практики вычисления с таблицей производятся очень быстро. Вычисления по указанной схеме дают

$$S\,x_i^3 \cdot x_k^2x_l^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 - (-10)(-4) + 21 = -1$$

16. Вычислить сумму шестых степеней корней уравнения

$$x^3 + 3x^2 - x - 7 = 0$$

17. Вычислить $S\,x_i^2x_k^2x_lx_m$ для уравнения

$$x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0$$

18. Вычислить функцию $(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2$ от корней x_1, x_3 уравнения

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

19. Вычислить функцию $Sx_i^3 x_k^2 x_l x_m$ от корней уравнения

$$x^5 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

20. Вычислить функцию $S x_i^3 x_k^3$ от корней уравнения

$$x^4 + 2x^2 - x + 1 = 0$$

21. Вычислить функцию $S(x_i - x_k)^4$ от корней уравнения

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 120 = 0$$

22. Вычислить сумму p-ых степеней корней уравнения

$$x^m = 1$$

23* Вычислить s_m $(m \leqq n)$ от корней уравнения

$$x^n + (a+b)x^{n-1} + (a^2 + ab + b^2)x^{n-2} + \ldots + a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n = 0$$

24* Вычислить сумму m-ых степеней s_m от корней уравнения

$$x^n + ax^{n-1} + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \ldots + \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1 \cdot 2 \ldots n} = 0,$$

$$0 < m \leq n + 1$$

25. Вычислить функцию $S \frac{x_i^2 + x_k^2}{x_i x_k}$ от корней уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

Решение. Последовательными преобразованиями предложенной функции находим

$$S \frac{x_i^2 + x_k^2}{x_i x_k} = S \frac{x_i}{x_k} = S \frac{x_1 \cdot x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{k-1} x_{k+1} \ldots x_n \cdot x_i^2}{x_1 x_2 \ldots x_n} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{a_n} [\varphi_1 \cdot \varphi_{n-1} - n\varphi_n]$$

Откуда следует, что

$$S \frac{x_i^2 + x_k^2}{x_i x_k} = \frac{a_1 a_{n-1} - n a_0 a_n}{a_0 a_n}$$

26. Вычислить функцию $S \frac{x_i}{x_k^2}$ от корней уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

27. Вычислить функцию $S \frac{x_i}{x_k x_l}$ от корней уравнения

$$x^8 + x^6 - 1 = 0$$

28. Вычислить функцию

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}+\frac{x_1^2+x_3^2}{x_1+x_3}+\frac{x_2^2+x_3^2}{x_2+x_3}$$

от корней уравнения

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

29. Вычислить функцию

$$\left(\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}\right)^2+\left(\frac{x_1-x_3}{x_1+x_3}\right)^2+\left(\frac{x_2-x_3}{x_2+x_3}\right)^2$$

от корней уравнения

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0.$$

30. Вычислить функцию

$$\frac{x_1^2+x_2x_3}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2+x_1x_3}{x_1+x_3}+\frac{x_3^2+x_1x_2}{x_1+x_2}$$

от корней уравнения

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

31 Вычислить функцию $S\frac{x_ix_k}{x_m^2}$ от корней уравнения

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$$

32 При каком условии произведение двух корней $x_i\cdot x_k$

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$$

равно единице?

33 При каком условии корни уравнения

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$$

удовлетворяют соотношению

$$x_1\cdot x_2+x_3\cdot x_4=0?$$

34 Вычислить произведение

$$(x_1^2+2)\,(x_2^2+2)\,(x_3^2+2)\,(x_4^2+2),$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 — корни уравнения

$$x^4-7x^3+8x^2-5x+10=0$$

35 Вычислить площадь треугольника

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

36 Сумма трех чисел равна 2. Сумма их квадратов равна 6 Сумма их кубов равна 8. Найти эти числа.

37* Показать, что симметрическая функция $\Phi(x_1)+\Phi(x_2)+\ldots+\Phi(x_n)$ от корней уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

коэфициент при x^{-1} в разложении в ряд по убывающим степеням x

$$\frac{\Phi(x)\cdot f'(x)}{f(x)}$$

38. Вычислить симметрическую функцию s_2 от корней уравнения

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

разложением в ряд по убывающим степеням x

39. Вычислить величину симметрической функции $S(x_i^3 + x_i + 1)$ уравнения

$$x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$$

Решение. Определим коэфициент при x^{-1} в разложении в ряд степеня x функции

$$\frac{(x^3+x+1)(3x^2+2x+2)}{x^3+x^2+2x+1} = \frac{3x^5+2x^4+5x^3+5x^2+4x+2}{x^3+x^2+2x+1}$$

производим деление

$$\begin{array}{l|l}
3x^5+2x^4+5x^3+5x^2+4x+2 & x^3+x^2+2x+1 \\
\hline
3x^5+3x^4+6x^3+3x^2 & 3x^2-x+\frac{4}{x} \\
\quad -x^4-x^3+2x^2+4x & \\
\quad -x^4-x^3-2x^2-x & \\
\qquad 4x^2+5x+2 & \\
\qquad 4x^2+4x+8+\frac{4}{x} & \\
\qquad\qquad x-6-\frac{4}{x} &
\end{array}$$

$$S(x_i^3 + x_i + 1) = 4$$

40. Вычислить величину симметрической функции от $S(x_i^4 + x_i^2 - 1)$ корней уравнения

$$x^8 - 1 = 0$$

41. Вычислить величину симметрической функции

$$S(3x_i^5 + 2x_i^4 - 3x_i + 1)$$

от корней уравнения

$$x^3 + 2x - 1 = 0$$

42*. Показать, что сумма

$$S_m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$$

от корней $x_1, x_2, \ldots x_n$ уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

равна коэфициенту при x^m в разложении функции

$$-m\log(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)$$

в ряд по возрастающим степеням x.

43*. Выразить s_m как явную функцию коэфициентов уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

44*. Показать, что a_m есть коэфициент при x^m в разложении по степеням x функции

$$e^{-s_1 x_1 - \frac{1}{2} s_2 x^2 - \ldots - \frac{1}{m} s_m x^m \ldots}$$

45*. Выразить коэфициент a_m уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

в виде явной функции от $s_1, s_2, \ldots s_m$.

46*. Показать, что функция

$$a_m = \varphi_m(s_1, s_2, \ldots s_m)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial s_m} = -\frac{1}{m}, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial s_k} = -\frac{1}{k} \varphi_{m-k}(s_1, s_2, \ldots s_k) \qquad m > k$$

и не зависит от s_{p+m} $(p > 0)$.

47. Вычислить функцию $Sx_i^2 \cdot x_k^2 \cdot x_e^2 \cdot x_m^2$ от корней уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

Решение. Применяя известные приемы (см. задачу 2), находим функции выражение

$$a_0^2 Sx_i^2 \cdot x_k^2 \cdot x_l^2 \cdot x_m^2 = A_0 a_0 a_8 + A_1 a_1 a_7 + A_2 a_2 a_6 + A_3 a_3 a_5 + A_4 a_4^2$$

С целью сократить необходимые для определения коэфициентов A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 вычисления, воспользуемся результатом предыдущей задачи.

Выразим рассматриваемую функцию через суммы одинаковых степеней. Не вычисляя самого выражения, не трудно заметить, что в выражение $Sx_i^2 x_k^2 x_e^2 x_m^2$ войдут только суммы четных степеней:

$$Sx_i^2 x_k^2 x_l^2 x_m^2 = \Phi(s_2, s_4, s_6, s_8)$$

Имея это в виду, составим производную

$$\frac{\partial \Phi(s_2, s_4, s_6, s_8)}{\partial s_3} =$$

$$= A_0 a_0 \frac{\partial a_8}{\partial s_3} + A_1 a_1 \frac{\partial a_7}{\partial s_3} + A_2 a_2 \frac{\partial a_6}{\partial s_3} + A_3 \left(a_5 \frac{\partial a_3}{\partial s_3} + a_3 \frac{\partial a_5}{\partial s_3} \right) + 2A_4 a_4 \frac{\partial a_4}{\partial s_3}$$

и примем в расчет соотношения предыдущей задачи

$$\frac{\partial a_m}{\partial s_m} = -\frac{1}{m}, \quad \frac{\partial a_m}{\partial s_k} = -k a_{m-k} \qquad k < m$$

Получаем тождество

$$A_0 a_0 a_5 + A_1 a_1 a_4 + A_2 a_2 a_3 + A_3 (a_0 a_5 + a_2 a_3) + 2A_4 a_1 a_4 = 0,$$

с помощью которого легко установить соотношения между искомыми коэфициентами:

$$A_0 + A_3 = 0, \quad A_1 + 2A_4 = 0, \quad A_2 + A_3 = 0$$

Составляя $\frac{\partial S}{\partial s_7}$, находим подобным же образом, что

$$A_0 a_0 a_1 + A_1 a_1 a_0 = 0,$$

получаем еще одно соотношение между коэфициентами

$$A_0 + A_1 = 0.$$

Из уравнений, связующих коэфициенты, следует, что

$$A_0 = +2A_4, \qquad A_1 = -2A_4, \qquad A_2 = 2A_4, \qquad A_3 = -2A_4$$

Коэфициент A_4 определим, положив

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, \qquad x_i = 0 \quad \text{при } i > 4, \quad a_0 = 1.$$

этих значениях $S = 1$, $a_s = 0$ при $s > 4$, и основное равенство дает

$$1 = A_4$$

Окончательный результат вычислений представляет равенство

$$a_0^2 S x_i^2 x_k^2 x_e^2 x_m^2 = 2a_0 a_8 - 2a_1 a_7 + 2a_2 a_6 - 2a_3 a_5 + a_4^2.$$

48. Вычислить функцию $S x_i^3 x_k^2 x_l$ от корней уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

49. Вычислить функцию $S x_i^2 x_k^2 x_l^2$ от корней уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

2. Результант.

1. Результант двух функций

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad \varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + bm$$

есть симметрическая функция

$$R(f, \varphi) = a_0^m \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \ldots \varphi(x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ суть корни первой функции.

2. Результант $R(f, \varphi) = R(a_0, a_1, \ldots a_n, b_0, b_1, \ldots b_m)$ есть однородная функция степени m относительно коэфициентов $a_0, a_1, \ldots a_n$ и однородная функция степени n относительно коэфициентов $b_0, b_1, \ldots b_m$.

3. Результант есть изобарическая функция коэфициентов $a_0, a_1, \ldots a_n$, $b_0, b_1, \ldots b_m$, веса mn.

4. Равенство нулю результанта выражает необходимое и достаточное условие существования общего корня уравнений $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$

$$R(f, \varphi) = a_0^m b_0^n \Pi(x_i - y_k);$$

$x_1 \ldots x_n$ — корни первой, а $y_1 \ldots y_m$ — корни второй функции.

50. Составить результант функций

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \qquad \varphi(x) = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$$

Решение.

$$R(f, \varphi) = a_0^3 (b_0 x_1^3 + b_1 x_1^2 + b_2 x_1 + b_3)(b_0 x_2^3 + b_1 x_2^2 + b_2 x_2 + b_3)$$

где x_1 и x_2 суть корни первой функции.

Задача приведена к вычислению симметрической функции умножение и заменяя $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$ их выражениями через коэф первой функции, получаем последовательно

$$R(f, \varphi) = a_0^3 [b_0^2 x_1^3 x_2^3 + b_0 b_1 x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) + b_0 b_2 x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) + b_0 b_3 (x_1^3 + x_2^3) + b_1 b_2 x_1 x_2 (x_1 + x_2) + b_1 b_3 (x_1^2 + x_2^2) + b_2 b_3 (x_1 + x_2) + b_1^2 x_1^2 x_2^2 + b_2^2 x_1 x_2 + b_3^2] = b_0^2 a_2^3 - b_0 b_1 a_1 a_2^2 + b_0 b_2 a_1^2 a_2 - 2 a_0^3 x_1^2 x_2^2 b_0 b_2 - b_0 b_3 a_1^3 - 3 b_0 b_3 a_0^3 x_1 x_2 (x_1 + x_2) - b_1 b_2 a_0 a_1 a_2 + b_1 b_3 a_0 a_1^2 - 2 b_1 b_3 a_0^3 x_1 x_2 - b_2 b_3 a_0^2 a_1 + b_1^2 a_0 a_2^2 + b_2^2 a_0^2 a_1 + b_3^2 a_0^3 = b_0^2 a_2^3 - b_0 b_1 a_1 a_2^2 + b_0 b_2 a_1^2 a_2 - 2 b_0 b_2 a_0 a_2^2 - b_0 b_3 a_1^3 + 3 b_0 b_3 a_0 a_1 a_2 - b_1 b_2 a_0 a_1 a_2 + b_1 b_3 a_0 a_1^2 - 2 b_1 b_3 a_0^2 a_2 - b_2 b_3 a_0^2 a_1 + b_1^2 a_0 a_2^2 + b_2^2 a_3^2 a \quad a_2 + b_3^2 a_0^2.$$

51. Составить результант функций

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad \varphi(x) = b_0 x + b_1.$$

52. Составить результант функций

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \qquad \varphi(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2.$$

53. Вычислив результант, узнать, имеют ли функции

$$f(x) = x^2 + x + 1, \qquad \varphi(x) = x^3 + x - 1$$

общий корень.

54. Имеют ли общий корень функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1, \qquad \varphi(x) = 2x^3 - 4x + 2?$$

55. Вычислить результант функций

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad \varphi(x) = x^m - 1$$

56. Показать, что

$$R(f, \varphi_1 \cdot \varphi_2) = R(f, \varphi_1) \cdot R(f, \varphi_2),$$

где $f(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ суть целые функции.

57. Показать, что

$$R(f, \varphi + \lambda f) = R(f, \varphi).$$

58*. Убедиться, что

$$R(\alpha f + \beta\varphi, \gamma f + \delta\varphi) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^m R(f, \varphi),$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть целые функции степени m.

59*. Показать, что результант $R(a_0, a_1, \ldots a_n, b_0, b_1, \ldots b_m)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$m a_0 \frac{\partial R}{\partial a_1} + (m-1) a_1 \frac{\partial R}{\partial a_2} + \ldots + a_{m-1} \frac{\partial R}{\partial a_m} + n b_0 \frac{\partial R}{\partial b_1} + \ldots + b_{n-1} \frac{\partial R}{\partial b_n} = 0$$

60*. Показать, что результант удовлетворяет дифференциальному

$$b_0 \frac{\partial R}{\partial a_k} + b_1 \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} + \ldots + b_m \frac{\partial R}{\partial a_{k+m}} = 0 \qquad k + m \leqq n \qquad k \geqq 0.$$

61*. Показать, что результант $R(a_0, a_1 \ldots a_n, b_0, b_1 \ldots b_m)$ есть функция $a_0, a_1, \ldots a_n, b_0, b_1, \ldots b_m$.

3. Исключение. Способ Эйлера.

1. Исключить x из уравнений

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

$$\varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m = 0$$

установить такое соотношение между коэффициентами уравнений, выражает необходимое и достаточное условие существования общего корня.

2. Равенство нулю результанта функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ выражает результ исключения x из уравнений $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$.

3. Результат исключения x из уравнений $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$ можно ставить в виде (рис. 2)

$$R = \begin{array}{l} m \text{ строк} \left\{ \begin{array}{l} a_0, \ a_1 \ldots a_n, \ 0 \ 0 \ldots 0 \\ 0, \ a_0 \ldots a_{n-1}, \ a_n, \ 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n \text{ строк} \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, \ b_0 \ldots b_{m-1}, \ b_m, \ 0 \ldots 0 \\ b_0, \ b_1 \ldots b_m, \ 0 \ 0 \ldots 0 \end{array} \right. \end{array} = 0$$

4. Пусть $R_1, R_2, \ldots R_k, \ldots$ обозначают определители, получаемые из таблицы вычеркиванием из нее последовательно верхней и нижней строки

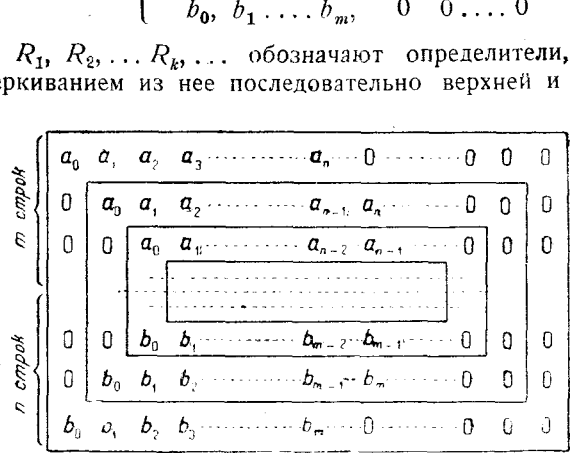

Рис. 2.

первого и последнего столбца. Необходимое и достаточное условие существования общего делителя степени p функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ или — что то же

самое — p общих корней уравнений $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ выражается ствами

$$R=0,\ R_1=0\ \ldots,\ R_{p-1}=0,\quad R_p \text{ не } =0$$

5. Общий наибольший делитель функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ получает первого неравного нулю определителя R_p, если в нем к элементам него столбца, умноженным на x^p, прибавить элементы следующих в основной таблице столбцов, умноженные соответственно на

$$x^{p-1},\ x^{p-2},\ \ldots 1$$

62. Исключить x из уравнений

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,\qquad b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

63. При каких условиях уравнения

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2=0,\qquad b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

имеют один общий корень? Найти выражение их общего наибольшего

64. При каком условии функции

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 \quad \text{и} \quad b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4$$

имеют общего делителя второй степени? Найти его выражение.

Найти общий наибольший делитель функций

65. $f(x)=x^4-x^3-x^2+1,\qquad \varphi(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+1$

66. $f(x)=x^3+5x^2+5x+4,\quad \varphi(x)=x^3-x^2-x-2$

67. $f(x)=x^3-4x^2+4x-3,\quad \varphi(x)=3x^4-2x^3+4x^2-x+2$

68. $f(x)=2x^3+5x^2-6x-9,\quad \varphi(x)=3x^3+7x^2-11x-5$

69. Известно, что кубические уравнения

$$x^3+a_1x^2+b_1x+c_1=0,\qquad x^3+a_2x^2+b_2x+c_2=0$$

имеют два общих корня. Найти квадратное уравнение, которому эти корни удовлетворяют, и определить третий корень каждого из кубических уравнений.

70. Исключить x из уравнений

$$x^4+ax+b=0,\qquad x^3+a'x+b'=0$$

71. При каких значениях λ и μ уравнения

$$x^3-6x^2+\lambda x-3=0,\qquad x^3-x^2+\mu x+2=0$$

имеют два общих корня?

72. Решить систему уравнений

$$5x^2-5y^2-3x+9y=0,\qquad 5x^3+5y^3-15x^2-13xy-y^2=0$$

73. Решить систему уравнений

$$3x^3+9x^2y+9xy^2+3y^3+2x^2-4xy+2y^2=5,$$
$$4x^3+12x^2y+12xy^2+4y^3-x^2+2xy-y^2=3$$

4. Способ исключения Безу.

1. Результат исключения x из уравнений

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

$$\varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0 \qquad n \geqq m$$

равенство

$$P = \begin{matrix} c_{01}, & c_{02}, & \ldots & c_{0n} \\ c_{11}, & c_{12}, & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,1}, & c_{n-1,2} & \ldots & c_{n-1,n} \end{matrix} = 0.$$

Элементы c_{0k} определяются из равенств

$$x^{n-m}f_0 \cdot \varphi(x) - \varphi_0 \cdot f(x) = c_{01}x^{n-1} + c_{02}x^{n-2} + \ldots + c_{0n}$$

$$x^{n-m}f_1(x) \cdot \varphi(x) - \varphi_1(x) \cdot f(x) = c_{11}x^{n-1} + c_{12}x^{n-2} + \ldots + c_{1n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{n-m}f_{n-1}(x) \cdot \varphi(x) - \varphi_{n-1}f(x) = c_{n-1,1}x^{n-1} + c_{n-1,2}x^{n-2} + \ldots + c_{n-1,n},$$

$$f_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k, \quad \varphi_k(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_k,$$

$$b_k = 0 \text{ при } k > m.$$

2. Необходимое и достаточное условие существования общего наибольшего делителя степени p функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ выражается равенствами

$$P = P_1 = \ldots = P_{p-1} = 0, \quad P_p \neq 0,$$

где P_k обозначает определитель, получаемый из P зачеркиванием в нем k нижних строк и k последних столбцов.

3. Общий наибольший делитель $[f(x), \varphi(x)]$ получается из первого неравного нулю определителя P_p посредством прибавления к элементам последнего столбца, умноженным на x^0, соответствующих элементов столбцов, следующих за последним столбцом определителя P_p в основном определителе P, умноженных на x^{p-1}, x^{p-2} ..., 1 соответственно

Задачи

74. Исключить x из уравнений

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \quad b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0.$$

Решение. Из равенств

$$a_0(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3) - b_0(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3) =$$
$$= (a_0b_1 - a_1b_0)x^2 + (a_0b_2 - a_2b_0)x + (a_0b_3 - a_3b_0),$$

$$(a_0x_1 + a_1)(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3) - (b_0x + b_1)(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x$$
$$= (a_0b_2 - a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 - a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)x + a_1b_3 - a_3b_1.$$
$$(a_0x^2 + a_1x + a_2)(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3) - (b_0x^2 + b_1x + b_2)(a_0x^3$$
$$+ a_1x^2 + a_2x + a_3) = (a_0b_3 - a_3b_0)x^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)x + a_2b_3 - a_3b_2$$

следует, что результат исключения выражается равенством

$$\begin{vmatrix} \mu_{01}, & \mu_{02}, & \mu_{03} \\ \mu_{02}, & \mu_{03} + \mu_{12}, & \mu_{13} \\ \mu_{03}, & \mu_{13}, & \mu_{23} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\mu_{ik} = a_ib_k - a_kb_i.$$

75. Исключить x из уравнений

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0.$$

76. Убедиться, что при $m = n$

$$c_{ik} = \mu_{0,\,i+k} + \mu_{1,\,i+k-1} + \ldots + \mu_{ik}, \quad i = 0, 1 \ldots n-1, \quad k = 1, 2 \ldots n,$$

считая, что

$$b_k = 0 \quad \text{при } k > m \quad \text{и} \quad a_k = 0 \quad \text{при } k > n.$$

77*. Показать, что числа c_{ik} удовлетворяют соотношению

$$c_{i,\,k} = c_{k-1,\,i+1}.$$

78. При каком условии функции

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3, \quad \varphi(x) = b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4$$

имеют общий наибольший делитель второй степени? Найти этот делитель

79. Найти общий наибольший делитель функций

$$f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1, \quad \varphi(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

80. Найти общий наибольший делитель функций

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 11x - 6, \quad \varphi(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

81. Исключить x из уравнений

$$x^3 + (m-1)x^2 + (3m-10)x + 12 = 0,$$
$$x^3 + (m-8)x^2 + (m+16)x - 3 = 0$$

82. Исключить x из уравнений

$$x^3 + mx^2 - 4 = 0, \quad x^3 + mx + 2 = 0$$

83. Исключить x из уравнений

$$x^3 + 4mx^2 - 3x + 2 = 0, \quad 2x^3 + (m+2)x^2 - 5x + 1 = 0$$

84. Исключить x из уравнений

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0, \quad x^2 + m'x + n' = 0$$

5. Дискриминант.

1. Дискриминант уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ есть функция

$$D = a_0^{2n-2}\Pi(x_i - x_k)^2,$$

произведение распространяется на все возможные разности $x_i - x_k$ уравнения: $x_1, x_2, \ldots x_n$.

2. Равенство нулю дискриминанта выражает необходимое и достаточное существования кратных корней.

Задачи.

85. Указать степень и вес дискриминанта $D(a_0, a_1, \ldots a_n)$ от корней равнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

86. Показать, что дискриминант функции

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

результант функции и ее производной, деленный на $a_0(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$a_0D(a_0, a_1, \ldots a_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(f, f').$$

87. Вычислить дискриминант уравнения

$$x^n + a = 0.$$

88. Показать, что в выражение дискриминанта $D(a_0, a_1, \ldots a_n)$ входит $M a_0^{n-1} a_n^{n-1}$, и определить коэффициент M.

89. Пользуясь способом Эйлера, найти выражение дискриминанта $D(a_0, a_1, \ldots a_n)$ в форме определителя.

90. Вычислить дискриминант уравнения

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

способом Безу.

91*. Показать, что $D(a_0, a_1, \ldots a_n)$ есть неприводимая функция $a_0, a_1 \ldots a_n$.

92. При каком условии уравнение

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

тройной корень?

93. При каком значении λ уравнение

$$\lambda x^3 + \lambda^2x^2 + x + \lambda = 0$$

двойной корень?

Имеет ли кратные корни уравнение

94. $x^4 - x^3 - 104x^2 + 514x - 720 = 0$?

95. $x^4 - x^3 - 30x^2 - 76x - 56 = 0$?

96. $x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24 = 0$?

97. При каком условии уравнение

$$x^5 + px^4 + q = 0$$

имеет двойной корень?

98. При каком значении λ уравнение

$$3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + \lambda = 0$$

имеет двойной корень?

99. При каких значениях m и n уравнение

$$x^4 + mx^3 + 2x + n = 0$$

имеет тройной корень?

100. При каких значениях m, n, p уравнение

$$x^6 + mx^4 + 10x^3 + nx + p = 0$$

имеет корень четвертой кратности?

101. При каких значениях m и n уравнение

$$x^5 - 35x^3 + 30x^2 + mx + n = 0$$

имеет только три различных корня?

102. При каких значениях p и q уравнение

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + px + q = 0$$

имеет только два различных корня?

ОТДЕЛ VI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

Рациональная функция $y = F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ от корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

принимающая m различных значений

$$y_1 = F(x_1, x_2, \ldots x_m), \quad y_2 = F_1(x_1, x_2 \ldots x_m), \ldots \quad y_m = F_{m-1}(x_1, x_2 \ldots x_m)$$

при перестановках корней $x_1, x_2, \ldots x_m$, удовлетворяет уравнению степени m:

$$A_0y^m + A_1y^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

коэффициенты которого суть целые рациональные функции от коэффициентов данного уравнения.

§ 1. Преобразование $y = x + a$.

1. Преобразовать уравнение

$$x^4 - x^3 + 3x - 1 = 0$$

посредством подстановки

$$y = x - 1$$

и выразить корни данного уравнения через корни преобразованного.

Решение. Расположим левую часть уравнения по степеням $x-1$ и заменим $x-1$ через y.

Получаем преобразованное уравнение:

$$y^4+3y^3+3y^2+4y+2=0$$

Корень данного уравнения x_i выражается через корень преобразованного y_i равенством

$$x_i=y_i+1$$

2. Построить уравнение, корни которого y_i выражаются через корни y_i равнения

$$x^5+3x-1=0$$

равенства

$$y_i=x_i+1$$

3. Преобразовать уравнение

$$x^4-8x^3+x^2-1=0$$

посредством подстановки $y=x-a$ так, чтобы второй коэффициент преобразованного уравнения обратился в нуль.

4. Найти условие вещественности корней уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

зная, что корни уравнения

$$x^3+px+q=0$$

вещественны при условии

$$4p^3+27q^2\leq 0.$$

5. При каком условии уравнение

$$a_0x^n+\binom{n}{1}a_1x^{n-1}+\binom{n}{2}a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

подстановкой $x=y+\alpha$ может быть преобразовано в уравнение, не содержащее членов с x^{n-1} и x^{n-m}, $m>1$?

6. Преобразовать уравнение

$$x^4+4x^3+11x^2+14x+12=0$$

подстановкой $x=y+\alpha$ и решить его, выбрав надлежащим образом α.

7. Решить уравнение

$$x^4+16x^3+72x^2+64x-129=0,$$

уничтожив преобразованием $x=y+\alpha$ член, содержащий третью степень неизвестного

8. При каком значении λ уравнение

$$x^4+12x^3+49x^2+\lambda x+40=0$$

подстановкой $x=y+\alpha$ приводится к биквадратному? Определить λ и найти корни.

9. Преобразовать уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 3x + 2 = 0$$

подстановкою $x = y + \alpha$ в такое, в котором отсутствует третий член.

§ 2. Преобразование $y = ax$.

10. Построить уравнение, корни которого выражаются через уравнения

$$x^4 - 1{,}5x^2 + 7x - 0{,}25 = 0$$

посредством равенства

$$y_i = -2x_i \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Искомое уравнение получается из данного посредств подстановки

$$x = -\frac{1}{2}y$$

Преобразованное уравнение имеет вид:

$$y^4 - 6y^2 - 56y - 4 = 0$$

11. Преобразовать уравнение

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

подстановкой $y = 3x$ и выразить его корни через корни преобразованного уравнения.

12. Преобразовать посредством подстановки $y = ax$ уравнение

$$3x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$$

в такое, в котором коэффициент при старшей степени неизвестного равен единице, а прочие коэффициенты целые числа.

13. Преобразовать уравнение

$$\frac{5}{18}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$$

в уравнение с целыми коэффициентами посредством подстановки $y = ax$, так чтобы коэффициент при старшей степени был единица

14. Привести уравнение

$$x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^2 - \frac{13}{900} = 0$$

к уравнению с целыми коэффициентами посредством подстановки $y = ax$.

15. Определить наиболее общий вид уравнения, корни которого равняются корням уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

с обратными знаками.

16. Показать, что уравнение

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-2} + \ldots + a_n = 0$$

мнимые корни, если уравнение

$$a_0x^{2n} - a_1x^{2n-2} + \ldots + (-1)^n a_n = 0$$

вещественные.

§ 3. Преобразование $y = x^m$.

17. Построить уравнение, корни которого равны квадратам корней уравнения

$$x^4 - 7x^3 + 1 = 0.$$

С помощью преобразованного уравнения решить вопрос: имеет ли уравнение мнимые корни?

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 корни данного уравнения. Составим ведение функции

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = x^4 - 7x^3 + 1$$

$$(x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) = x^4 + 7x^3 + 1$$

Находим

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)(x^2 - x_4^2) = x^8 - 49x^6 + 2x^4 + 1$$

Положим теперь $x^2 = y$. Приравнивая нулю, получим уравнение

$$y^4 - 49y^3 + 2y^2 + 1 = 0,$$

корни которого

$$y_i = x_i^2 \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Если все корни данного уравнения вещественны, то все корни преобразованного положительны, и из соотношений между корнями и коэффициентами следует, что знаки коэффициентов преобразованного уравнения должны чередоваться. Этого нет в рассматриваемом примере. Данное уравнение должно иметь мнимые корни.

18. Построить уравнение, корни которого равны квадратам корней уравнения

$$x^5 + x^3 + x^2 + 2x + 3 = 0,$$

и решить вопрос: имеет ли данное уравнение мнимые корни?

19. Имеет ли уравнение

$$x^3 - 3x^2 + x - 2 = 0$$

мнимые корни?

20. Один из корней уравнения

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

равен квадрату другого. Решить уравнение.

21. Показать, что в случае, когда все корни уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

вещественны, все числа $b_1, b_2, \ldots b_n$, где

$$(-1)^k b_k = 2a_0a_{2k} - 2a_1a_{2k-1} + \ldots + (-1)^{k-1} 2a_{k-1} a_{k+1} + (-1)^k a_k^2$$

положительны.

22. Составить уравнение, корни которого равны кубам корней

$$x^3 + px + q = 0.$$

Решение. 1-й способ. Преобразованное уравнение имеет вид

$$(y - x_1^3)\ (y - x_2^3)\ (y - x_3^3) = 0,$$

где x_1, x_2, x_3 суть корни данного уравнения.

Представив его в виде

$$y^3 + A_1y^2 + A_2y + A_3 = 0,$$

имеем:

$$A_1 = -Sx_i^3 = -s_3, \quad A_2 = Sx_i^3x_k^3 = \frac{1}{2}(s_3^2 - s_6), \quad A_3 = -x_1^3x_2^3x_3^3 = +q$$

	1	0	p	q
	1	0	$-2p$	$-3q$
	0	0	0	0
	$-2p$	0	$2p^2$	$2pq$
$s_3 =$	$-3q$	0	$3pq$	$3q^2$
	$2p^2$	0	$-2p^3$	
	$5pq$	0		
$s_6 =$	$3q^2 - 2p^3$			

Вычисление s_3 и s_6 производим, пользуясь таблицей. — Для s_3 и s_6 получаем значения:

$$s_3 = -3q, \quad s_6 = 3q^2 - 2p^3$$

для коэффициентов A_1, A_2, A_3 находим, что

$$A_1 = 3q, \quad A_2 = 3q^2 + p^3, \quad A_3 = q^3.$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$y^3 + 3qy^2 + (3q^2 + p^3)y + q^3 = 0.$$

2-й способ. Искомое уравнение получается из уравнения

$$(u^3 - x_1^3)\ (u^3 - x_2^3)\ (u^3 - x_3^3) = 0$$

$y = u^3$. Последнее уравнение можно представить в виде

$$f(u) \cdot f(\omega u) \cdot f(\omega^2 u) = 0,$$

$$f(u) = (u - x_1)\ (u - x_2)\ (u - x_3), \quad \omega^3 = 1, \quad \left(\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Произведение, стоящее в левой части, легко может быть вычислено. Перемножая $f(u)$, $f(\omega u)$, $f(\omega^2 u)$, находим

$$f(\omega u) \cdot f(\omega^2 u) = (u^3 + pu + q)\ (u^3 + p\omega u + q)\ (u^3 + p\omega^2 u + q) = (u^3 + q)^3 + (pu)^3.$$

Отсюда следует, что преобразованное уравнение имеет вид

$$y^3 + 3qy^2 + (3q^2 + p^3)\, y + q^3 = 0.$$

23. Составить уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения

$$x^5 + 2x^3 - 1 = 0.$$

Составить уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения:

24. $x^2 + x + 1 = 0.$ **25.** $x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$

26. Составить уравнение, корни которого равны четвертым степеням уравнения

$$x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

27. Составить уравнение, корни которого равны m-ым степеням корней уравнения

$$x^n + px^m + q = 0. \qquad \text{общ. наиб. дел. } (m, n) = 1.$$

28. Составить уравнение, корни которого равны квадратным корням корней уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

§ 4. Преобразование $y = ax + \frac{b}{x}$.

29. Составить уравнение, корни которого выражаются через корни уравнения

$$x^5 - 3{,}5x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$y_i = -\frac{2}{x_i}. \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

30. Найти наиболее общий вид уравнения, не изменяющегося от подстановки $y = \frac{\lambda}{x}$. Что можно сказать о его корнях?

31. Показать, что решение уравнения степени n, не изменяющего подстановки $y = \frac{\lambda}{x}$, может быть приведено к решению уравнения степени $\frac{n-1}{2}$ при n нечетном и уравнения степени $\frac{n}{2}$ при n четном.

32. Решить уравнение

$$x^4 - 6mx^3 + 2(4m^2 + n)x^2 - 6mnx + n^2 = 0.$$

33. Решить уравнение

$$(x+1)^7 - x^7 - 1 = 0.$$

34. Решить уравнение

$$4(x^2 - x + 1)^3 - 27x^2(x-1)^2 = 0.$$

35. Решить уравнение

$$4x^4 - 85x^3 + 357x^2 - 340x + 64 = 0.$$

36. Составить уравнение, корни которого выражаются через уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

посредством равенства

$$y_i = x_i + \frac{1}{x_i}. \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

37. Взаимное уравнение

$$x^{2m} + a_1x^{2m-1} + \ldots + 1 = 0$$

преобразовано посредством подстановки

$$2u = x + \frac{1}{x}$$

в уравнение

$$u^m + b_1u^{m-1} + \ldots + b_m = 0.$$

Вычислить b_m.

38*. Взаимное уравнение с вещественными коэффициентами

$$x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \ldots + 1 = 0$$

в котором коэфициент a_n удовлетворяет неравенству $|a_n| \leqq 2$, имеет по крайней мере одну пару мнимых корней.

39*. Показать, что уравнение с вещественными коэфициентами

$$x^{2n+1} + a_1x^{2n-1} + \ldots + a_nx + a_{n+1} = 0,$$

в котором $|a_{n+1}| \leqq 2$, имеет корень в промежутке $(-2, +2)$.

40*. Показать, что уравнение с вещественными коэффициентами

$$x^{2n+1} + a_1x^{2n-1} + \ldots + a_nx = m$$

имеет корень в промежутке $\left(-2\sqrt[2n+1]{\frac{|m|}{2}}, 2\sqrt[2n+1]{\frac{|m|}{2}}\right)$. (Чебышев).

41*. Показать, что уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

котором все коэффициенты одного знака и $|a_0| \geqq |a_1| \geqq \ldots \geqq |a_n|$, корень по модулю равный единице лишь только в том случае, когда коэффициенты равны между собой.

42*. Показать, что уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

котором все коэффициенты одного знака и $|a_0| \geqq |a_1| \geqq \ldots \geqq |a_n|$, не иметь корней по модулю больших единицы (Какеуа).

43*. Показать, что подстановкой

$$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

решение взаимного уравнения

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

к решению уравнения степени n и ряда квадратных уравнений.

44. Уравнение взаимное

$$x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \ldots + 1 = 0$$

преобразовано посредством подстановки

$$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

уравнение

$$y^n + b_1y^{n-1} + \ldots + b_n = 0$$

Вычислить b_n.

§ 5. Преобразование Чирнгаузена.

1. Уравнение, получаемое из уравнения

$$a_0x^n + a_1x^n + \ldots + a_n = 0$$

посредством преобразования $y = p_0x^{n-1} + p_1x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}$, есть результант функций $f(x)$ и $\varphi(x) - y$, где $f(x)$ обозначает левую часть уравнения, а $\varphi(x)$ функцию, стоящую в правой части равенства, определяющего y.

2. Если преобразованное уравнение $F(y) = 0$ не имеет кратных корней, то корни данного уравнения выражаются рационально через корни преобразованного уравнения.

3. Простому корню y_i преобразованного уравнения отвечает простой корень x_i данного при этом

$$x - x_i = [f(x), \quad \varphi(x) - y_i].$$

4. Кратному корню y_i преобразованного уравнения кратности α соответствует α корней $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_\alpha}$ данного, причем

$$(x - x_{i_1})(x - x_{i_2}) \ldots (x - x_{i_\alpha}) = [f(x), \quad \varphi(x) - y_i].$$

45. Преобразовать уравнение

$$x^3 + 3x - 1 = 0$$

посредством подстановки

$$y = x^2 + x + 1.$$

Решение. 1-й способ. Преобразованное уравнение есть исключения x из уравнений

$$x^3 + 3x - 1 = 0, \qquad x^2 + x + 1 - y = 0.$$

Составим результант, пользуясь методом Безу. Из равенств

$$x^3 + 3x - 1 - [x^3 + x^2 + (1 - y)x] = -x^2 + (y + 2)x - 1,$$

$$(x + 1)(x^3 + 3x - 1) - x[x^3 + x^2 + (1 - y)x] = (2 + y)x^2 + 2x - 1,$$

$$[x^2 + x + (1 - y)](x^3 + 3x - 1) - (x^2 + 3)[x^3 + x^2 + \\ + (1 - y)]x = -x^2 - x + y - 1$$

выводим

$$\begin{vmatrix} -1, & 2 + y, & -1 \\ 2 + y, & 2, & -1 \\ -1 & -1, & y - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Развернув определитель, получаем преобразованное уравнение

$$y^3 + 3y^2 - 9 = 0.$$

2-й способ. Можно получить преобразованное уравнение, пользуясь симметрическими функциями корней данного уравнения.

Корни y_i преобразованного уравнения

$$y^3 + A_1 y^2 + A_2 y + A_3 = 0$$

выражаются через корни данного уравнения посредством равенств $y_i = x_i^2 + x_i + 1$. Установим связь между суммами одинаковых степеней корней уравнений данного и преобразованного. Для этого отметим, что

$$y_i^2 = x_i^4 + 2x_i^3 + 3x_i^2 + 2x_i + 1 = (x_i + 2)(x_i^3 + 3x_i - 1) - 3x_i + 3 = \\ = -3(x_i - 3),$$

$$y_i^3 = -(3x_i - 3)(x_i^2 + x_i + 1) = -3(x_i^3 + 3x_i - 1 - 3x_i) = +9x_i.$$

Обозначив через S_k сумму k-ых степеней преобразованного уравнения, находим эту связь в виде равенств

$$S_1 = s_2 + s_1 + 3, \qquad S_2 = -3s_1 + 9, \qquad S_3 = 9s_1.$$

Вычислив $s_1 = 0$, $s_2 = -6$ по коэффициентам данного уравнения, получаем

$$S_1 = -3, \qquad S_2 = 9, \qquad S_3 = 0,$$

и наконец с помощью формул Ньютона находим для коэффициентов значения

$$A_1 = 3, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = -9.$$

46. Преобразовать уравнение

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$y = x^2 + x - 1.$$

47. Преобразовать уравнение

$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$$

подстановки

$$y = 2x^2 + 3x - 1.$$

48. Построить уравнение, корни y_i которого выражаются через корни уравнения

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$$

средством равенства

$$y_i = x_i^2 + 2x_i - 2$$

49. Преобразовать уравнение

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 4$$

решить уравнение.

50. Преобразовать уравнение

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 28x + 16 = 0$$

подстановкой

$$y = 0{,}4x^3 - 2{,}6x^2 + 5{,}4x - 4{,}6$$

решить его.

51. Преобразовать уравнение

$$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 48 = 0$$

подстановкой

$$y = x^2 + x - 7$$

решить его.

52. Выбрать λ и μ так, чтобы преобразование

$$x^3 + px + q = 0$$

двучленному.

53. Преобразовать уравнение

$$x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

посредством подстановки

$$y = \frac{x}{x^4 - x^2 + 1}$$

54. Вычислить симметрическую функцию

$$S \frac{x_i x_k}{(x_i^4 - x_i^2 - 1)(x_k^4 - x_k^2 - 1)}$$

от корней уравнения

$$x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

55*. Между двумя корнями уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

существует зависимость

$$x_i = \varphi(x_k),$$

где $\varphi(x)$—рациональная функция x. Показать, что решение данного ура ния приводится к уравнению низшей степени, предполагая, что для корня x_s величина $\varphi(x_s)$ не равняется ни одному из корней

56. Показать, что уравнение

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0,$$

имея корень x_i, имеет также и корень

$$x_k = 2 - x_i^2. \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

§ 6. Преобразования $y_0 = F(x_1, x_2, \ldots x_k)$.

57. Корни $y_1, y_2 \ldots y_m$ уравнения

$$b_0y^m + b_1y^{m-n} + \ldots + b_m = 0$$

суть суммы по два корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Выразить суммы $S_k = y_1^k + y_2^k + \ldots + y_m^k$ одинаковых степеней первого уравнения через суммы s_k одинаковых степеней корней и определить m.

Решение. Число различных пар x_i, x_k корней второго равно $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$

$$m = \frac{n(n-1)}{2}$$

Отметим равенство

$$\sum_{i=1}^{n} (x + x_i)^k = s_0x^k + \binom{k}{1} x^{k-1}s_1 + \binom{k}{2} x^{k-2}s_2 + \ldots + s_k.$$

Придадим в этом равенстве x последовательно значения $x_1, x_2, \ldots$ и сложим полученные равенства

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (x_j + x_i)^k = s_0s_k + \binom{k}{1} s_{k-1}s_1 + \binom{k}{2} s_{k-2}s_2 + \ldots + s_ks_0.$$

Приняв во внимание, что

$$S_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_j)^k - 2^{k-1}s_k,$$

находим:

$$S_k = \frac{1}{2} \left[s_0s_k + \binom{k}{1} s_1s_{k-1} + \binom{k}{2} s_2s_{k-2} + \ldots + s_ks_0 \right] - 2^{k-1}s_k.$$

Пользуясь этим соотношением и формулами Ньютона, легко по уравнению найти преобразованное.

58. Составить уравнение, корни которого суть суммы по два корней

$$x^3 - 2x + 5 = 0.$$

Решение. Преобразованное уравнение напишем в виде

$$y^3 + A_1 y^2 + A_2 y + A_3 = 0.$$

Вычислим сначала s_1, s_2, s_3. Находим: $s_1 = 0$, $s_2 = 4$, $s_3 = -15$.

	1	0	−2	5
	1	0	4	−15
$s_1 =$	0	0	0	
$s_2 =$	4	0		
$s_3 =$	−15			

Пользуясь соотношением между суммами S_k одинаковых степеней преобразованного уравнения и суммами S_k одинаковых степеней корней уравнения, получаем:

$$2S_1 = 2s_0 s_1 - 2s_1 = 6 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0; \qquad S_1 = 0.$$

$$2S_2 = 2s_0 s_2 + 2s_1^2 - 2^2 s_2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 2^2 \cdot 4 = 8; \qquad S_2 = 4.$$

$$2S_3 = 2s_0 s_3 + 2s_1 s_2 - 2^3 s_3 = 2 \cdot 3 \cdot (-15) - 8 \cdot (-15) = 30; \qquad S_3 = 15.$$

С помощью формул Ньютона находим наконец

$$0 + A_1 = 0; \qquad A_1 = 0. \qquad 4 + 0 \cdot A_1 + 2A_2 = 0; \qquad A_2 = -2.$$

$$15 + 0 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 3A_3 = 0; \qquad A_3 = -5.$$

Преобразованное уравнение

$$y^3 - 2y - 5 = 0.$$

Замечание. Изложенный способ может быть приложен к любому уравнению. Полезно иметь в виду, что во многих случаях можно, пользуясь специфическими особенностями уравнения, произвести вычисления гораздо короче. Покажем это на нашем примере. В силу уравнения имеем

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

откуда следует, что

$$x_1 + x_2 = -x_3, \qquad x_1 + x_3 = -x_2, \qquad x_2 + x_3 = -x_1.$$

Корни преобразованного уравнения равны корням данного с обратными знаками. Искомое уравнение получается из данного заменой x на $-y$.

59. Составить уравнение, корни которого равны суммам по два корней уравнения

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 4 = 0$$

60. Составить уравнение, корни которого равны суммам по два уравнения

$$x^4 - 3x^2 + 7 = 0.$$

61. Составить уравнение, корни которого равны суммам по два уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

62. При каком условии два корня кубического уравнения отлич только знаком?

63. Составить уравнение, корни которого равны суммам по два уравнения

$$x^4 + x^3 - 1 = 0.$$

64*. Составить уравнение, корни которого равны суммам по два уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

65. Корни уравнения

$$x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0$$

равны произведениям по два корней уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Выразить суммы S_k одинаковых степеней корней первого уравн через суммы одинаковых степеней второго и определить m.

66. Построить кубическое уравнение, корни которого равны по два корней уравнения

$$x^3 + 2x - 1 = 0.$$

67. Составить уравнение, корни которого равняются произведениям два корней уравнения

$$x^4 - x + 2 = 0.$$

68*. Составить уравнение, корни которого равны произведениям по корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

69. Корни уравнения

$$x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0$$

равны суммам квадратов по два корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Найти m и выразить суммы S_k одинаковых степеней корней первого уравнения через суммы одинаковых степеней корней второго уравнения.

70. Составить уравнение, корни которого равны суммам по два квадратов корней уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

71. Корни уравнения

$$b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0$$

квадратам разностей корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Найти m и выразить суммы S_k одинаковых степеней корней первого уравнения через суммы s_k одинаковых степеней корней второго уравнения.

72. Составить уравнение квадратов разностей корней уравнения

$$x^3 + px + q = 0.$$

73. Составить уравнение квадратов разностей корней уравнения

$$x^3 + 6x^2 + 7x + 2 = 0.$$

74. Составить уравнение квадратов разностей корней уравнения

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0.$$

75*. Показать, что уравнение

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{1}, & \binom{n}{2}t, & \ldots & \binom{n}{n}t^{n-1} \\ \binom{n}{2}t, & \binom{n}{3}t^2, & \ldots & \binom{n}{1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{n}{n}t^{n-1}, & \binom{n}{1}, & \ldots & \binom{n}{n-1}t^{n-2} \end{vmatrix} = 0$$

содержит только четные степени t и при замене t^2 на y обращается в уравнение квадратов разностей корней уравнения

$$x^n - 1 = 0.$$

76*. Составить уравнение квадратов разностей корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

77. Составить уравнение, корни которого y_i выражаются через корни x_1, x_2, x_3 уравнения

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

посредством равенств

$$y_i = x_k \cdot x_l + \frac{1}{x_i}, \qquad i \neq k, \qquad k \neq l, \qquad l \neq i, \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

78. Составить уравнение, корнями которого служат функции

$$y_1 = x_1x_2 + x_1x_3, \qquad y_2 = x_1x_2 + x_2x_3, \qquad y_3 = x_1x_3 + x_2x_3$$

от корней x_1, x_2, x_3 уравнения

$$x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0.$$

79. Составить уравнение, корни которого суть функции

$$y_1 = \frac{x_1}{x_2 + x_3 - x_1}, \qquad y_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_3 - x_2}, \qquad y_3 = \frac{x_3}{x_1 + x_2 - x_3}$$

от корней x_1, x_2, x_3 уравнения

$$x^3 - x^2 - 3 = 0.$$

80. Составить уравнение, корни которого выражаются функциями

$$y_1 = x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2, \quad y_2 = x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2, \quad y_3 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

от корней x_1, x_2, x_3 уравнения

$$x^3 + px + q = 0.$$

81. Составить уравнение, корни которого равны

$$y_1 = x_2^2 + x_3^2 - x_1^2, \qquad y_2 = x_3^2 + x_1^2 - x_2^2, \qquad y_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

где x_1, x_2, x_3 суть корни уравнения

$$x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0.$$

82. Составить уравнение, корни которого выражаются через уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 4x + 3 = 0$$

посредством равенств

$$y_1 = \frac{x_2x_3 - x_1^2}{x_2 + x_3 - 2x_1}, \qquad y_2 = \frac{x_3x_1 - x_2^2}{x_3 + x_1 - 2x_2}, \qquad y_3 = \frac{x_1x_2 - x_3^2}{x_1 + x_2 - 2x_3}$$

83. Составить уравнение, корни которого равны функциям

$$y_1 = \frac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_2 + x_3 - x_1 - x_4}, \qquad y_2 = \frac{x_3x_1 - x_4x}{x_3 + x_1 - x_2 - x_4}, \quad y_3 = \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}$$

от корней уравнения

$$x^4 + x^3 - 2x + 1 = 0.$$

84. Корни уравнения

$$b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0$$

равны отношениям $\frac{x_i}{x_k}$ корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Найти m и выразить суммы S_k одинаковых степеней корней первого уравнения через суммы s_k одинаковых степеней корней второго уравнения.

85. Составить уравнение, корни которого равны отношениям корней уравнения

$$x^3 + x - 1 = 0.$$

86*. Составить уравнение, корни которого равны отношению корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

87. Составить уравнение, зная, что его корни выражаются через корни равнения

$$x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$y_1 = \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}, \qquad y_2 = \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}, \qquad y_3 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

88. Составить уравнение, корни которого равны функциям

$$y_1 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3), \quad y_2 = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3), \quad y_3 = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

от корней x_1, x_2, x_3 уравнения

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0.$$

89. Составить уравнение, корни которого равны

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \qquad y_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \qquad y_3 = x_1x_4 + x_2x_3,$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 суть корни уравнения

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

90. При каком условии уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ есть уравнение квадратов разностей корней уравнения $x^3 + px + q = 0$?

ОТДЕЛ VII.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-й и 4-й СТЕПЕНИ.

§ 1. Уравнение третьей степени.

1. Решение уравнения $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$ подстановкой $y = a_0x + a_1$ приводится к уравнению $y^3 + py + q = 0$, где $p = 3(a_0a_2 - a_1^2)$ и $q = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3$.

2. Общее решение уравнения

$$x^3 + px + q = 0$$

находится по формуле

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ (формула Кардана),}$$

причем значения, которые следует придавать одновременно кубическим корням, связаны соотношением

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -\frac{p}{3} \quad \text{(способ Гудде).}$$

3. Указанный способ решения уравнения 3-й степени не единственный. Основная мысль разнообразных способов решения уравнений 3-й степени основывается на использовании функции $F(x_1, x_2, x_3)$ от корней уравнения, получающей несколько значений при различных перестановках корней.

Через значения этой функции корни данного уравнения выражаются посредством кубических радикалов. Значения функции по коэфициентам уравнения посредством решения квадратного урав Выбором функции $F(x_1, x_2, x_3)$ и подробностями вычислений и отлич способы.

1. Решить уравнение

$$x^3 - 3ax^2 + (2a^2 - 3b^2)x - 2a^2b + 3ab^2 + 2b^3 = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение подстановкой $y = x - a$ зованное уравнение

$$y^3 - (a^2 + 3b^2)y + 2(b^3 - a^2b) = 0.$$

В рассматриваемом случае

$$p = -(a^2 + 3b^2), \qquad q = 2(b^3 - a^2b).$$

Вычисляем сначала

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{a^2}{27}(a^2 - 9b^2)^2, \qquad \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \frac{i\sqrt{3}}{9}(a^3 - 9ab^2)$$

и далее

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -b^3 + a^2b + \frac{ia^3}{3\sqrt{3}} - iab^2\sqrt{3} = -\left(b + \frac{ia}{\sqrt{3}}\right)^3,$$

$$-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -b^3 + a^3b - \frac{ia^3}{3\sqrt{3}} + iab^2\sqrt{3} = -\left(b - \frac{ia}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Имея в виду правило выбора значений радикала, берем кубические корни

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -\left(b + \frac{ia}{\sqrt{3}}\right)\omega^s,$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -\left(b - \frac{ia}{\sqrt{3}}\right)\omega^{3-s},$$

где

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad s = 1,\ 2,\ 3 \quad (\omega^3 = 1).$$

Придавая s значение 1, 2, 3 и складывая соответствующие значения корня, находим корни преобразованного уравнения:

$$y_1 = -\left(b + \frac{ia}{\sqrt{3}}\right)\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} - \left(b - \frac{ia}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = a + b,$$

$$y_2 = -\left(b + \frac{ia}{\sqrt{3}}\right)\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} - \left(b - \frac{ia}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -a + b,$$

$$y_3 = -\left(b + \frac{ia}{\sqrt{3}}\right) - \left(b - \frac{ia}{\sqrt{3}}\right) = -2b.$$

Корни данного уравнения получаются из корней преобразованного

$$x_1 = y_1 + a = 2a + b, \quad x_2 = b, \quad x_3 = a - 2b.$$

Решить уравнение

2. $x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - b^2)x - a^3 + ab^2 = 0.$

3. $x^3 - 3(a+b)x^2 + (3a^2 + 6ab + 2b^2)x - a^3 - 3a^2b - 2ab^2 = 0.$

4. $x^3 - 6ax^2 + (9a^2 - b^2)x + 4ab^2 - 4a^3 = 0.$

5. $x^3 - 3(a-b)x^2 + (3a^2 - 6ab - b^2)x - a^3 + 3a^2b + 5ab^2 - 3b^3 = 0.$

6. $x^3 - 3(a^2 + ab + b^2)x^2 + (a^4 + 5a^3b + 7a^2b^2 + 5ab^3 + 2b^4)x -$
$- 2a^5b - 4a^4b^2 - 4a^3b^3 - 4a^2b^4 - 2ab^5 = 0.$

7. $x^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right)x^2 + (2a^2 + 9)x - 6a = 0.$

8. $abx^3 - (a+b)(ab+1)x^2 + (a^2 + 2ab + b^2 + 1)x - a - b = 0.$

9. $abx^3 - (a^2b^2 + a + b)x^2 + (a^2b + ab^2 + 1)x - ab = 0.$

10. $x^3 - (a+1)^2x^2 + (2a^3 + a^2 + 2a - 1)x - a^4 + 1 = 0.$

11. $x^3 - 3(1+i)x^2 + (1+6i)x + 1 - 3i = 0.$

12. $x^3 - 6ix^2 - 10x + 8i = 0.$

13. $x^3 - 3(2-i)x^2 + (13 - 12i)x - 10 + 15i = 0.$

14*. Решить уравнение

$$x^3 + px + q = 0,$$

положив $x = uv^2 + u^2v$ и ограничив выбор u, v условием $u^3v^3 = -\frac{p}{3}$. Показать, что величина x не меняется от замены u на $u\omega$ и v на $v\omega$, и сделать из этого соответствующий вывод относительно выбора возможных значений u, v. (Способ Кейли.)

15*. Выразить u^3, v^3 предыдущей задачи через корни кубического уравнения и определить функцию $F(x_1, x_2, x_3)$, характеризующую указанный способ решения.

16*. Выразить величины u и v, входящие в преобразование $x = u + v$ и связанные соотношением $u \cdot v = -\frac{p}{3}$, через корни кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0.$$

Определить функцию $F(x_1, x_2, x_3)$, характеризующую этот способ решения уравнения.

17*. Дать решение кубического уравнения

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$

взяв в качестве вспомогательной функцию

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3. \quad \text{(Способ Лагранжа.)}$$

18*. Дать решение уравнения

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$

взяв в качестве вспомогательной функцию

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2x_3 + \omega x_1x_3 + \omega^2x_1\omega_2}{x_1 + \omega x_2 + \omega^2x_3}$$

§ 2. Уравнение четвертой степени.

1. Уравнение четвертой степени

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

подстановкой $y = a_0x + a_1$ приводится к уравнению

$$y^4 + 6A_2y^2 + 4A_3y + A_4 = 0,$$

где

$$A_2 = a_0a_2 - a_1^2, \qquad A_3 = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3$$
$$A_4 = a_0^3a_4 - 4a_0^2a_1a_3 + 3a_1^4 + 6a_0a_1^2a_2.$$

2. Корни уравнения (*) определяются по формуле

$$y_i = \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w},$$

в которой квадратные радикалы из корней u, v, w уравнения

$$\begin{cases} 4(z + A_2)^3 - a_0^2(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)(z + A_2) + \\ + a_0^3(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3) = 0, \end{cases}$$

принимают все возможные значения, удовлетворяющие соотношению

$$\sqrt{u} \cdot \sqrt{v} \cdot \sqrt{w} = -\frac{1}{2}(a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3). \text{ (Способ Эйлера).} \qquad (***)$$

Задачи.

19. Решить уравнение

$$x^4 - 4ax^3 + 2a^2(1 - a^2)x^2 + 4a^3(a + 1)^2x + a^8 - 6a^6 - 8a^5 - 3a^4 = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение подстановкой $y = x - a$:

$$y^4 - 2a^2(a^2 + 2)y^2 + 8a^4y + a^8 - 4a^6 = 0.$$

Составляем уравнение третьей степени, через корни которого выражаются корни преобразованного уравнения

$$\left[z - \frac{1}{3}(a^4 + 2a^2)\right]^3 - \frac{1}{3}(a^8 - 2a^6 + a^4)\left[z - \frac{1}{3}(a^4 + 2a^2)\right] -$$
$$- \frac{2}{27}(a^4 - a^2)^3 = 0.$$

Положив для краткости

$$z - \frac{1}{3}(a^4 + 2a^2) = t,$$

отыщем корни уравнения

$$t^3 - \frac{1}{3}(a^4 - a^2)^2t - \frac{2}{27}(a^4 - a)^3 = 0.$$

Заметим, что, преобразовав последнее уравнение подстановкой

$$t = s \cdot (a^4 - a^2),$$

значительно облегчим задачу нахождения его корней, приведя ее к отысканию корней уравнения

$$s^3 - \frac{1}{3} s - \frac{2}{27} = 0.$$

Составляем последовательно

$$\Delta = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{27}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{27} = 0,$$

$$\sqrt[3]{+\frac{1}{27} + \sqrt{\Delta}} = +\frac{1}{3}\omega^i, \quad \sqrt[3]{+\frac{1}{27} - \sqrt{\Delta}} = +\frac{1}{3}\omega^{2i}$$

Значения радикалов, берущиеся одновременно, удовлетворяют условию

$$\sqrt[3]{+\frac{1}{27} + \sqrt{\Delta}}\,\omega^i \cdot \sqrt[3]{+\frac{1}{27} - \sqrt{\Delta}}\,\omega^{2i} = \frac{1}{9}.$$

Корни уравнения с s:

$$s_1 = +\frac{1}{3} \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{3}, \quad s_2 = -\frac{1}{3}, \quad s_3 = \frac{2}{3}.$$

Корни уравнения с t:

$$t_1 = t_2 = -\frac{1}{3}(a^4 - a^2), \quad t_3 = \frac{2}{3}(a^4 - a^2).$$

Корни уравнения с z:

$$z_1 = a^2, \qquad z_2 = a^2, \qquad z_3 = a^4.$$

Найдя корни последнего уравнения, вычисляем корни уравнения с y согласно равенствам

$$y_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = a - a + a^2 = a^2, \quad y_2 = -a + a + a^2 = a^2,$$

$$y_3 = +a + a - a^2 = -a^2 + 2a, \quad y_4 = -a - a - a^2 = -2a - a^2,$$

выбирая знаки корней квадратных $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ так, чтобы произведение

$$\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = -a^4.$$

Вычислив корни уравнения с y, уже легко найти корни данного уравнения

$$x_1 = a^2 + a, \qquad x_2 = a^2 + a, \qquad x_3 = 3a - a^2, \qquad x_4 = -a^2 - a.$$

Решить уравнение:

20. $x^4 - 12ax^3 + (45a^2 - b^2)x^2 - 2a(29a^2 - 5b^2)x + 24a^2(a^2 - b^2) = 0$

21. $x^4 - 4ax^3 + (3a^2 - a - 7)x^2 + (3a^2 + 27a + 6)x - 18a^2 - 18a = 0$

22. $x^4 - (4a + 4)x^3 + (5a^2 + 14a + 4)x^2 - (2a^3 - 14a^2 - 12a)x + 4a^3 + 8a^2 = 0$

23. $x^4 - 4(a+1)x^3 + (5a^2 + 12a + 5)x^2 -$
$- (2a^3 + 10a^2 + 10a + 2)x + 2a^3 + 5a^2 + 2a = 0$

24. $x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 22x - 6 = 0$

25. Выразить корни уравнения (**) через корни данного уравн четвертой степени

Решение. Выберем определенные значения корней $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{}$ удовлетворяющие соотношению (***) Решая уравнения

$$y_1 = \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w},\ y_2 = \sqrt{u} - \sqrt{v} - \sqrt{w},$$
$$y_3 = -\sqrt{u} + \sqrt{v} - \sqrt{w},\ y_4 = -\sqrt{u} - \sqrt{v} + \sqrt{w},$$

находим

$$u = \frac{1}{16}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)^2,\ v = \frac{1}{16}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)^2,$$
$$w = \frac{1}{16}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)^2.$$

Подставив вместо y_i его выражение $y_i = a_0 x_i + a_1$, получим окончательно

$$a_0^2 u = \frac{1}{16}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,\ a_0^2 v = \frac{1}{16}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2,$$
$$a_0^2 w = \frac{1}{16}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2$$

26. Показать, что, когда уравнение 4-й степени имеет кратные корни, уравнения (*) и (**) имеют кратные корни, и наоборот.

27. Показать, что в случае, когда уравнение 4-й степени имеет корень третьей кратности, уравнение (**) имеет три равных корня, и обратно.

28. Убедиться, что в том случае, когда уравнение 4-й степени имеет два двукратных корня, два корня уравнения (**) равны нулю.

29. Показать: α) Если все корни уравнения 4-й степени вещественны, то все корни уравнения (**) положительны.

β) Если все корни уравнения 4-й степени комплексные, то все корни уравнения (**) вещественные.

γ) Если уравнение 4-й степени имеет два вещественных и два мнимых корня, то уравнение (**) имеет два комплексных и один вещественный корень.

30*. Каким условиям следует подчинить выбор величин t, P, Q, чтобы уравнение

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0$$

можно было представить в виде

$$(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 + 2a_0 t)^2 - (2Px + Q)^2 = 0$$

Вывести отсюда способ решения уравнения 4-й степени. (Феррари.)

Приложить способ решения уравнения 4-й степени, предложенный в задаче 30, к решению уравнений

31. $x^4 - (3a+5)x^3 + (3a^2 + 12a + 5)x^2 - (a^3 + 9a^2 + 11a - 5)x +$
$+ 2a^3 + 6a^2 - 2a - 6 = 0$

32. $x^4 - 4(a+b)x^3 + (5a^2 + 16ab - b^2)x^2 - 2(a^3 + 10a^2b - ab^2 - 2b^3)x + 8ab(a^2 - b^2) = 0.$

33. $x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 60x + 63 = 0.$

34. $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0.$

35. $x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 66x - 22 = 0.$

36*. Выразить корни уравнения t задачи 30 через корни уравнения 4-й степени.

37*. Выразить корни уравнения 4-й степени через корни уравнения, которому удовлетворяет t задачи 30.

38*. Показать:

α) Все корни уравнения с t вещественны, если все корни уравнения 4-й степени вещественны или все мнимы, и наоборот.

β) Уравнение с t имеет мнимый корень, если уравнение 4-й степени имеет два вещественных и два мнимых корня.

39*. Каким условиям следует подчинить выбор величин p, q, q', чтобы уравнение

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

можно было представить в виде

$$(x^2 + px + q)(x^2 - px + q') = 0?$$

Вывести отсюда способ решения уравнения 4-й степени. (Декарт.)

Приложить способ решения уравнения 4-й степени, предложенный в задаче 39, к решению следующих уравнений:

40. $x^4 + 3ax^3 + (2a^2 + 3)x^2 + 5ax + 2 = 0.$

41. $ax^4 + (a^2 + b)x^3 + (2ab + a)x^2 + (a^2 + b^2)x + ab = 0$

42. $2x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 11x + 6 = 0$

43. $x^4 + 12x + 3 = 0.$

44. $x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 84x - 63 = 0.$

45. Выразить корни уравнения, которому удовлетворяет p задачи (39), через корни уравнения 4-й степени.

46. Определить вид вспомогательной функции для способов Эйлера, Феррари и Декарта.

47. Составить уравнение резольвенты $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$ для 4-й степени

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0.$$

ОТДЕЛ V

ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ С ВЕЩЕСТ ВЕННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Непрерывность функции и ее приложение.

1. Целая функция есть функция непрерывная.

2. При переходе через корень четной кратности функция не измен знака. При переходе через корень нечетной кратности функция меняет Произведение $f(x) \cdot f'(x)$ при переходе через корень функции $f(x)$ меняет знак с — на +.

3. Если на границах промежутка (a, b) функция имеет противо ложные знаки, то она имеет внутри промежутка нечетное число корней.

4. Если при $x = a$ функция $f'(x)$ положительна, то функция $f(x)$ воз растает при переходе через $x = a$; и обратно, если $f(x)$ возрастает при пере ходе x через a, то $f'(a) \geqq 0$. Если при $x = a$ функция $f'(x)$ отрицательна то $f(x)$ при переходе x через a убывает; и обратно, если $f(x)$ убывает переходе x через a, то $f'(a) \leqq 0$.

5. Знак функции при достаточно большом (x) совпадает со знаком старшего члена.

Задачи

1. Многочлены

$$(x) = (x - a_1)\ (x - a_2) \ldots (x - a_n), \quad \varphi(x) = (x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_n),$$

имеют все корни вещественные при этом $a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n$

Сколько вещественных корней имеет многочлен

$$F(x) = f(x) + \lambda\varphi(x), \qquad \lambda > 0$$

и как эти корни расположены?

Решение. Подставим b_k вместо x в выражение функции $F(x)$. Имея в виду, что $a_i < b_k$ при $i \leqq k$ и $a_i > b_k$ при $i > k$, найдем

$$F(b_k) = f(b_k) + \lambda\varphi(b_k) = f(b_k) \text{ и } (-1)^{n-k} F(b_k) = (-1)^{n-k} f(b_k) > 0$$

Точно так же получим

$$(-1)^{n-k+1} F(a_k) = (-1)^{n-k+1} \varphi(a_k) > 0.$$

Выведенные неравенства позволяют сделать заключение, что

$$F(a_k) \cdot F(b_k) < 0,$$

т. е. что на границах промежутков (a_k, b_k) функция $F(x)$ имеет противоположные знаки. Внутри каждого из таких промежутков лежит по крайней мере один корень x_k функции. Все корни функции вещественны и различны, и внутри каждого промежутка a_k, b_k лежит только один корень функции $F(x)$.

Замечание. К полученному результату можно притти и иначе, пользуясь графическим изображением функций. Задача о нахождении корней уравнения

$$F(x) = 0 \qquad \text{или} \qquad f(x) = -\lambda\varphi(x)$$

равносильна задаче отыскания точек пересечения кривых $y = f(x)$ и $y = -\lambda\varphi(x)$.

Построив на чертеже эти кривые, легко получить сделанный уже вывод.

2. Все корни многочленов

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n), \quad \varphi(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_n)$$

ственны и при этом $a_1 < b_1 < a_2 \ldots < b_{n-1} < a_n < b_n$. Сколько вещественных корней имеет функция $F(x) = f(x) + \lambda\varphi(x)$, $\lambda < 0$, и как эти корни расположены?

3. Сколько вещественных корней имеет функция $F(x) = f(x) + \lambda\varphi(x)$, где

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n), \quad \varphi(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_{n-1}),$$

все числа a_i, b_k вещественны и $a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_{n-1} < a_n$?

Как расположены корни $F(x)$?

4*. Корни функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ вещественные, простые, и корни одной функции перемежаются с корнями другой. Показать, что корни уравнений

$$f(x) + \lambda\varphi(x) = 0, \qquad f(x) + \mu\varphi(x) = 0$$

тоже вещественные, простые и корни одного уравнения перемежаются с корнями другого.

5*. Как изменяются корни уравнения

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) + \lambda(x - b_1) \ldots (x - b_n) = 0,$$

где

$$a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n,$$

при возрастании λ?

6. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{2n}) + \lambda(x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_{2n}) = 0, \quad \lambda > 0$$

если

$$a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 \ldots < b_{2n-1} < b_{2n} < a_{2n}$$

и как эти корни расположены?

7. Показать, что корни $x_1, x_2 \ldots x_{2n}$ и $y_1, y_2 \ldots y_{2n}$ уравнений

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{2n}) + \\ + \lambda(x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_{2n}) = 0, \qquad \mu > \lambda > 0$$

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{2n}) + \\ + \mu(x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_{2n}) = 0, \qquad \mu > \lambda > 0$$

при условии

$$a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 \ldots < b_{2n-1} < b_{2n} < a_{2n},$$

удовлетворяют наравенствам

$$x_1 < y_1 < y_2 < x_2 < x_3 < y_3 < \ldots < y_{2n-1} < y_{2n} < x_{2n}$$

8. Как изменяются при возрастании λ корни уравнения

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{2n}) + \lambda(x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_{2n}) = 0, \quad \lambda > 0$$

$$a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 \ldots < b_{2n-1} < b_{2n} < a_{2n}$$

9. Функция $\varphi(x)$ определена равенством

$$\varphi(x) = (\lambda - x) f'(x) + nf(x).$$

Показать, что произведение $\varphi(x)\, f(x)$ при переходе через корень функ $f(x)$, бо́льший λ, меняет знак с плюса на минус и при переходе корень, меньший λ, с минуса на плюс.

10. При каких значениях p и q все корни функции $f(x) = x^3 + px +$ вещественны?

Решение. Составим производную

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

Если $p \geqq 0$, то $f'(x)$ остается положительной. Функция $f(x)$ постоян возрастает и только при одном значении x обращается в нуль.

Предположим, что $p < 0$. Ход изменения функции характеризуется таб — лицей:

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
	$-$	возраст.	max	убыв.	min	возр.	$+$

В первой строке таблицы отмечены значения x, во второй знаки функции $f'(x)$ и, наконец, в третьей характер изменения $f(x)$. Если min функции положителен или max отрицателен, то функция имеет только один вещественный корень. В первом случае этот корень меньше $-\sqrt{-\frac{1}{3}p}$, во втором больше $\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Для вещественности всех корней необходимо и достаточно, чтобы

$$f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \geqq 0, \quad \text{или} \quad f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \leqq 0$$

Оба неравенства объединяются в одно

$$f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \cdot f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \geqq 0.$$

Последнее неравенство можно представить так:

$$q^2 + \frac{1}{3}p\left(p - \frac{1}{3}p\right)^2 \leqq 0 \quad \text{или} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leqq 0.$$

Выше отмеченное условие $p < 0$ есть лишь следствие последнего неравенства, и потому последнее выражает необходимое и достаточное условие вещественности корней. В том случае, когда имеет место знак $=$, функция $f(x)$ имеет двойной корень $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$. В этом случае простой корень равен $\mp 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$

11. При каких значениях λ все корни уравнения

$$x^3 + 3x + \lambda = 0$$

12. При каких значениях p и q уравнение

$$x^5 + px + q = 0$$

три вещественных корня.

13. При каком значении μ уравнение

$$x^5 + \mu x + 4 = 0$$

три вещественных корня?

14. Какому условию должны удовлетворять коэфициенты уравнения

$$x^7 + px^2 + q = 0,$$

уравнение имело три вещественных корня?

15. При каких значениях λ уравнение

$$x^7 - 7x^2 + \lambda = 0$$

три вещественных корня?

16. Какому условию следует подчинить p и q, чтобы уравнение

$$x^m + px^n + q = 0$$

один вещественный корень? Числа m и n нечетные.

17. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$x^5 - x^3 + 1 = 0?$$

18. При каких значениях λ все корни уравнения

$$3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + \lambda = 0$$

19. Сколько положительных корней имеет уравнение

$$1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^m - (\beta x)^n = 0 \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0$$

что

$$\frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}} > (\alpha\beta)^{mn}?$$

Числа m и n нечетные.

20. Показать, что в том случае, когда все корни x_1, x_2, x_3 уравнения

$$x^3 - 3px + q = 0 \qquad p > 0$$

суть числа вещественные,

$$|x_i| < 2\sqrt{p};$$

если же корни x_2 и x_3 мнимы, то

$$|x_1| > 2\sqrt{|p|}$$

21, Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n-1}}{n-1}+\ldots+\frac{x}{1}+1=0?$$

22*. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{x}{1}+1=0? \qquad \text{(Эрмит.)}$$

§ 2. Теорема Ролля и ее приложения.

1. Если на границах промежутка (a, b) функция

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

имеет равные значения, то ее производная $f'(x)$ обращается в нуль промежутка (a, b).

2. Если функция $f(x)$, принимая равные значения на концах не принимает этого значения внутри, то $f'(x)$ имеет нечетное чис корней в промежутке.

23. Функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\omega(x)$, $\omega_1(x)$ связаны соотношением

$$f(x)\cdot\omega_1(x)=f'(x)\cdot\omega(x)\cdot\varphi(x)+\psi(x).$$

Показать, что между двумя последовательными корнями функции $f(x)$ в промежутке (a, b) лежит нечетное число корней функции $\varphi(x)$, если известно, что функции $\omega(x)$ и $\psi(x)$ не обращаются в нуль в этом промежутке.

Решение. Пусть α и β — два последовательные корня $f(x)$ в промежутке (a, b). Знак функции $f'(x)$ при $x=\alpha$ противоположен знаку функции при $x=\beta$. Положив $x=\alpha$ и затем $x=\beta$ в предложенном равенстве получим

$$f'(\alpha)\ \omega(\alpha)\cdot\varphi(\alpha)=-\psi(\alpha),\quad f'(\beta)\cdot\omega(\beta)\cdot\varphi(\beta)=-\psi(\beta).$$

Так как функции $\omega(x)$ и $\psi(x)$ сохраняют свой знак в промежутке (a, b), то полученные равенства дают право заключить, что знак $\varphi(\alpha)$ противоположен знаку $\varphi(\beta)$. Функция $\varphi(x)$ обращается в нуль между α и β нечетное число раз.

24. Функция $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ имеет s вещественных корней. Показать, что число σ вещественных корней $f'(x)$

$$\sigma=s-1+2h,\ h\geqq 0.$$

25. Все корни функции $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ суть числа вещественные. Показать, что все корни функции $f^{(k)}(x)$ суть числа вещественные.

26. Сколько вещественных корней имеет многочлен

$$\frac{d^nx^n(x-1)^n}{dx^n},$$

и в каком промежутке они содержатся?

27. Все корни функции $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ вещественных корней имеет уравнение

$$(n+1)^s a_0x^n + n^s a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0?$$

28. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$(m+1)^m x^m + m^m x^{m-1} + \frac{m(m-1)^m}{1 \cdot 2} x^{m-2} + \ldots + 1 = 0,$$

как эти корни расположены?

29*. Сколько вещественных корней имеет многочлен $U_n(x)$, где

$$e^{-x^2} U_n(x) = \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}?$$

30*. Изучить корни уравнения

$$P_n(x) = x^n - \binom{n}{1}^2 x^{n-1} + \binom{n}{2}^2 2!\, x^{n-2} + \ldots + (-1)^n n! = 0.$$

31*. Все корни функции $f(x) = a_0x^n + \binom{n}{1} a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ суть числа вещественные. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$a_1x^{n-1} + \binom{n-1}{1} a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

32*. Все корни уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

вещественны. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$a_sx^k + \binom{k}{1} a_{s+1} x^{k-1} + \ldots + a_{s+k} = 0? \quad s + k \leqq n.$$

33*. Все корни уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

вещественны. Показать, что

(I) $a_k^2 \geqq a_{k-1} \cdot a_{k+1}$,

(II) $(a_{k+3} \cdot a_k - a_{k+1} \cdot a_{k+2})^2 \leqq 4(a_{k+1}^2 - a_k a_{k+2})(a_{k+2}^2 - a_{k+1} a_{k+3})$

34*. Все корни функции $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ вещественны и различны. Показать, что все корни уравнения

$$nf(x) \cdot f''(x) - (n-1) f'(x)^2 = 0$$

мнимы.

35. Все корни функции $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ вещественны. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$f(x) + \lambda f'(x) = 0?$$

36. Корни многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ степени n вещественны и перемежаются корнями многочлена $\omega(x)$ той же степени. Сколько перемен знака в ряду чисел

$$f(x_1)\,\varphi(x_1),\quad f(x_2) \cdot \varphi(x_2), \ldots f(x_n) \cdot \varphi(x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ суть корни многочлена $\omega(x)$?

37. Корни многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть числа вещественные Сколько перемен знака в ряду между числами

$$f(x_1)\varphi'(x_1),\quad f(x_2)\varphi'(x_2),\ldots f(x_n)\varphi'(x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ суть корни многочлена $\varphi(x)$? [Корни $f(x)$ и $\varphi(x)$

38*. Все корни $x_1, x_2, \ldots x_n$ многочлена $\varphi(x)$ вещественны и личны. Сколько вещественных корней имеет многочлен $f(x)$ степени n, в ряду чисел

$$f(x_1)\varphi'(x_1),\quad f(x_2)\varphi'(x_2),\ldots f(x_n)\cdot\varphi'(x_n)$$

нет перемен знака? Как расположены корни многочлена $f(x)$,

39*. Все корни уравнения $f(x)=0$ вещественны. Уравнение $f(x)+k$ имеет m мнимых корней. Сколько вещественных корней имеет уравнение

$$f'(x)^2-f(x)\cdot f''(x)-kf''(x)=0?$$

40. Все корни функции $f(x)$ вещественны. Сколько веществен корней может иметь уравнение $f(x)=a$, и как эти корни расположены отношению к корням многочлена $f(x)$?

41. Если все корни многочлена $f(x)$ вещественны, то и многочлена $\lambda f(x)+xf'(x)$—числа вещественные при $\lambda>0$

42*. В разложении функции

$$\frac{\operatorname{sh}\lambda+x\operatorname{ch}\lambda}{\operatorname{ch}\lambda+x\operatorname{sh}\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\cdot\lambda^n$$

в ряд по степеням λ коэфициент при λ^n есть многочлен степени $n+1$ Сколько вещественных корней имеет этот многочлен? (Эрмит.)

§ 3. Правило знаков Декарта.

1. Правило Декарта. Число положительных корней многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

либо равно числу перемен знака в ряду $a_0, a_1, \ldots a_n$ между коэфициентами многочлена, либо меньше на число четное.

2. Для определения верхней границы числа отрицательных корней многочлена $f(x)$ следует приложить правило Декарта к многочлену $f(-x)$.

3. Число мнимых корней меньше на четное число или равно числу пропущенных в многочлене $f(x)$ членов, измененному так, что всякий раз, как между двумя последовательными членами отсутствует нечетное число промежуточных, к числу пропущенных прибавляется единица, если коэфициенты рядом стоящих членов одного знака, или от числа пропущенных отнимается единица, если коэфициенты рядом стоящих членов противоположных знаков.

Задачи

43. Найти верхнюю границу положительных и нижнюю границу числа мнимых корней уравнения

$$x^5+3x^2-1=0$$

Решение. Число перемен знака между коэфициентами уравнения единице. Уравнение имеет один положительный корень. Между члеи x^5 и $3x^2$ пропущены члены с x^4 и x^3. Между членами $3x^2$ и -1 опущен член с x. Знаки коэфициентов 3 и 1 противоположны. Число опущенных членов следует уменьшить на единицу. Число мнимых корней равно $2+1-1=2$.

Определить верхнюю границу для числа положительных и нижнюю границу для числа мнимых корней уравнения

44. $x^6-x^2-3x+2=0$

45. $x^4+11x^2+7x-11=0$

46. $x^9-3x^2+4=0$

47. $x^{10}+7x-2=0$

48. $x^{11}-5x-3=0$

49. $x^6+4x^4-2=0$

50. $x^{2n}-1=0$

51. $x^{2n+1}+1=0$

52. Коэфициенты a_{k-1}, a_k, a_{k+1} трех последовательных членов

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

бразуют геометрическую прогрессию. Показать, что уравнение имеет корни.

Решение. Умножим $f(x)$ на $x-a$, где a — знаменатель прогрессии a_{k-1}, a_k, a_{k+1}

Произведя умножение, легко убедиться, что в произведении

$$F(x)=(x-a)f(x)=b_0x^{n+1}+b_1x^n+\ldots+b_n$$

коэфициенты $b_k=a_k-a_{k-1}a=0$, $b_{k+1}=a_{k+1}-a_ka=0$ и стало быть члены с x^{n+1-k}, x^{n-k} отсутствуют.

Функция $F(x)$, а вместе с нею и $f(x)$ имеет по крайней мере два мнимых корня.

53*. Коэфициенты a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2} четырех последовательных членов уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

образуют арифметическую прогрессию.

Показать, что уравнение имеет мнимые корни. (Эрмит.)

54*. Показать, что уравнение

$$x^n+(a+b)x^{n-1}+(a^2+ab+b^2)x^{n-2}+\ldots$$
$$+(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)=0$$

имеет не больше одного вещественного корня. Числа a и b вещественные.

55*. Убедиться, что уравнение

$$F(a+n)\cdot x^n+F(a+n-1)x^{n-1}+\ldots+F(a)=0,$$

где $F(x)$ обозначает многочлен степени не выше $n-2$, имеет мнимые корни.

56. Имеет ли мнимые корни уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

в котором

$$a_{k-1} = a_{k+1}, \qquad a_k = a_{k+2}?$$

57. Имеет ли мнимые корни уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

в котором

$$a_k = a_{k+4}, \quad a_{k+1} = a_{k+5}, \quad a_{k+2} = a_{k+6}, \quad a_{k+3} = a_{k+7}$$

§ 4. Правило Лагерра

1. Число s положительных корней уравнения

$$ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \ldots + lx^\lambda + \ldots = 0,$$

где $\alpha<\beta<\gamma<\ldots<\lambda<\ldots$ и число v перемен знака между коэфициентами ряда конечное, определяется равенством

$$v = s + 2h, \qquad h \geqq 0.$$

2. Число положительных корней уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ больших числа $a > 0$, либо равно числу перемен знака между числами ряд

$$f_0(a), \quad f_1(a), \quad f_2(a), \ldots f_n(a),$$

где

$$f_k(a) = a_0a^k + a_1a^{k-1} + \ldots + a_k,$$

либо меньше его на четное число.

3. Число положительных корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

меньших $a>0$, либо равно числу перемен знака между числами ряда

$$\varphi_0(a), \quad \varphi_1(a), \quad \varphi_2(a), \ldots \varphi_n(a),$$

где $\varphi_k(a) = a_na^k + a_{n-1}a^{k-1} + \ldots + a_{n-k}$, либо меньше его на число четное.

4. Число положительных корней уравнения

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

бо́льших $a > 0$, либо равно числу перемен знака между коэфициентами $A_0, A_1, A_2, \ldots A_{p+k}$, входящими в правую часть равенства

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k} = A_0x^{n-k} + A_1x^{n-k-1} + \ldots$$
$$+ A_px^{n-p} + x^{n-p}\left[\frac{A_{p+1}}{x-a} + \ldots + \frac{A_{p+k}}{(x-a)^k}\right],$$

либо меньше его на число четное.

5. Числа $A_0 A_1 \ldots A_{p+k}$ могут быть вычислены по коэфициентам $a_1, \ldots a_n$ согласно правилу Горнера, как показано в таблице.

	a_0,	a_1,	$\ldots$	a_n,	$0 \ldots$	$0 \ldots$	
a	b_0,	b_1	$\ldots$	b_n	$\ldots$	b_{p+k-1}	A_{p+k}
	c_0,	c_1	$\ldots$				A_{p+k-1}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$				
	A_0,	A_1,	$\ldots$	A_{p+1}			

Задачи.

58. Определить число положительных и отрицательных корней уравнения

$$x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 3 = 0$$

Решение. Определяем сначала число положительных корней бо́льших 1.

	1	-5	9	-7	$+3$
1	1	-4	5	2	1
	1	-3	2	0	
	1	-2	0		
2	1	-3	3	-1	1
	1	-1	1	1	
	1	1	3		

Правило Декарта дает для верхней границы 4. Вычисления, произведенные согласно правилу Лагерра, показывают, что число положительных корней, бо́льших единицы, 0 или 2 и что уравнение не имеет корней бо́льших 2. Чтобы найти число положительных корней меньших единицы, следует образовать уравнение, заменив x на $\frac{1}{x}$, и приложить к преобразованному уравнению

$$3x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1 = 0$$

то же правило.

	3,	-7,	9,	-5,	1
1	3,	-4,	5,	0,	1
	3,	-1,	4,	4	
	4,	2,	6		

Вычисления показывают, что в преобразованном уравнении нет корней больших единицы. Данное уравнение не имеет корней меньших единицы.

Отрицательных корней уравнение не имеет вовсе. В этом легко убеди заменив в данном уравнении x на $-x$

Определить число вещественных корней уравнения

59. $3447x^6 + 14\,560x^5 + 22\,430x^4 + 25\,857x^3 +$
$+ 29\,193x^2 + 11\,596x + 5602 = 0$ [1])

60. $x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 15x + 9 = 0$

61. $x^4 - 3x^3 + 9x - 9 = 0$

62. $x^5 + 15x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0$

63. $x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0.$

64. $4x^5 + 24x^4 + 37x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0$

65*. Функция $f(x)$ разложена в ряд

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k x^k,$$

сходящийся в промежутке (r, R). Число перемен знака между коэф циентами ряда конечное. Показать, что число σ положительных корн уравнения

$$xf'(x) + \lambda f(x) = 0,$$

лежащих в области сходимости ряда, либо равно числу $s - 1$, где s числ корней $f(x)$, заключенных в той же области, либо меньше на числ четное.

Пользуясь произволом в выборе числа λ, выбрать его так, чтобы числ перемен знака в левой части уравнения было меньше числа перемен знак в ряду, представляющем $f(x)$. Вывести отсюда теорему Декарта для рядо $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k x^k$, заключая от n к $n+1$

66*. Показать, что число положительных корней уравнения

$$f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n = 0,$$

лежащих в промежутке (a, b), равно числу перемен знака между коэфициентами в разложении функции

$$\frac{f(x)}{(x-a)(b-x)} = \varphi(x) + \frac{f(a)}{b-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{x^{k+1}} + \frac{f(b)}{b-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{b^{k+1}}, \qquad b > a > 0$$

расположенном по возрастающим степеням x или меньше его на число четное.

67. Определить число корней уравнения

$$x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0$$

в промежутке $(0, 1)$.

[1]) Leverier. Mèmoire sur la planete Uranus. Conn. d. tem., 1849

Решение. Разлагаем дробь

$$\frac{x^5-5x^4-16x^3+12x^2-9x-5}{x(1-x)}=-x^3+4x^2+20x+8-\frac{22}{1-x}-\frac{5}{x}=$$

$$=-\frac{5}{x}-14-2x-18x^2-23x^3-22x^4-22x^5\ldots$$

ряд по возрастающим степеням x. В ряду нет перемен знака между коэфициентами. Уравнение не имеет корней в промежутке (0, 1).

68. Определить число корней уравнения

$$x^5-5x+1=0$$

в промежутке (1, 2).

69. Показать, что число корней уравнения

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

в промежутке (a, b) либо равно числу перемен знака в ряду чисел

$$\mu_0,\ \mu_1,\ldots\mu_n,$$

где

$$\mu_k=a_0a^k+a_1a^{k-1}+\ldots+a_k+\frac{a_{k+1}}{b}+\frac{a_{k+2}}{b^2}+\ldots+\frac{a_n}{b^{n-k}},$$

$$b>a>0$$

либо меньше на число четное.

70. Показать, что число положительных корней уравнения

$$A_1e^{\alpha_1x}+A_2e^{\alpha_2x}+\ldots+A_ne^{\alpha_nx}=0,\quad \alpha_1>a_2>\ldots>\alpha_k,$$

либо равно числу перемен знака в ряду чисел

$$M_1,\ M_2,\ldots M_n,\ M_k=A_1+A_2+\ldots+A_k$$

либо меньше на число четное.

ОТДЕЛ IX.

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С ЦЕЛЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ.

§ 1. Вычисление рациональных корней.

1. Вычисление рациональных корней уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

с целыми коэфициентами подстановкой $a_0x=y$ приводится к вычислению рациональных корней уравнения с целыми коэфициентами, в котором коэфициент при старшей степени y равен единице.

2. Уравнение

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0 \qquad (*)$$

с целыми коэфициентами не может иметь дробных корней.

3. Целые корни уравнения (*) делят a_n.

4. Если α есть корень уравнения (*), то $f(\beta)$ где β целое делится на $\beta-\alpha$. В частности $f(1)$ делится на $a-1$ и $f(-1)$ делит на $a+1$.

5. Испытание делителей δ числа a_n производится согласно

	a_n,	a_{n-1},	. . .	a_s,	. . .	a_1, 1
δ		b_{n-1},	. . .	b_s,	. . .	
		c_{n-1},	. . .			

В первой строчке выписываются коэфициенты уравнения в обратном порядке. Число a_n делится на δ. Частное b_{n-1} помещается под a_{n-1} и складывает с a_{n-1}. Результат c_{n-1} записывается в третьей строчке. Число c_{n-1} делится на δ. Частное b_{n-2} записывается под a_{n-2}, складывается с ним, и результат c_{n-2} записывается в третьей строчке и т. д.

Если в течение вычислений встретится число c_s, не делящееся на δ, то действие прекращается. Делитель δ не является корнем уравнения.

Если же все c_s разделятся на δ и $c_0=0$, то δ служит корнем данного уравнения и коэфициенты частного от деления левой части уравнения на $x-\delta$ равны числам второй строки написанным в обратном порядке и с обратными знаками.

Задачи

1. Отыскать целые корни уравнения

$$x^4-2x^3-19x^2+68x-60=0.$$

Решение. Целые корни уравнения делят 60. Число делителей, которых следует подвергнуть испытанию, достаточно велико. Оно равно 24:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5,\ \pm 6,\ \pm 10,\ \pm 12,\ \pm 15,\ \pm 20,\ \pm 30,\ \pm 60$$

С целью сокращения числа делителей подвергнем их предварительным испытаниям.

Предварительные испытания.

1. $f(+1)=-12$. Если число δ есть корень, то $\delta-1$ должно делить 12

Непосредственная поверка показывает, что целые корни заключаются среди чисел

$$\underline{-1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5.}$$

2. $f(-1)=-144$. Число $\delta+1$ должно делить 144. Возможные значения целого корня заключаются среди чисел

$$\pm 2,\ \pm 3,\ 4,\ \pm 5$$

Окончательные испытания.

1. Начнем с числа 5.

	— 60,	68,	— 19,	— 2, 1
5		— 12		
		56		

Результатом первого сложения является 56, не делящееся на 5. Число 5 не годится.

2. Число — 5.

	— 60,	68,	— 19,	— 2, 1
— 5		12	— 16	7 — 1
		80	— 35	5 0

Один из корней равен — 5. Частное от деления левой части уравнения на $x + 5$ равно:

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12.$$

3. Число 4.

С целью сокращения числа действий будем испытывать, не является ли 4 корнем функции $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

	— 12,	16	— 7 1
4		— 3	
		13	

Испытание показывает, что 4 не является корнем.

4. Число 3.

	— 12,	16	— 7 1
3		— 4	4 — 1
		12	— 3 0

3 есть корень функции $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$, а стало-быть и данного уравнения.

Частное от деления на $x - 3$ равно

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$$

Окончательный результат:

$$x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 68x - 66 = (x - 2)^2 (x - 3) (x + 5).$$

Вычислить целые корни уравнений

2. $x^5 - 29x^4 - 31x^3 + 31x^2 - 32x + 60 = 0.$

3. $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 30 = 0$

4. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

5. $x^4 - x^3 - 104x^2 + 564x - 720 = 0$

6. $x^5 - 2x^4 - 22x^3 + 68x^2 - 3x - 90 = 0$

7. $x^5 + 3x^4 - 21x^3 - 7x^2 + 60x - 36 = 0$

8. $x^5 - 23x^4 + 160x^3 - 281x^2 - 257 - 440 = 0$

9. $x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24 = 0.$

10. $3x^4 - 23x^3 + 35x^2 + 31x - 30 = 0.$

11. $x^4 - x^3 - 30x^2 - 76x - 56 = 0.$

12. $x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 24x + 4 = 0.$

13. $x^5 - x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 28x + 12 = 0$

14. $x^4 - 30x^2 - 31x - 30 = 0$

15. Вычислить рациональные корни уравнения

$$6x^5 - 29x^4 - 45x^3 + 231x^2 - 161x + 30 = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение подстановкой $6x = y$.

$$y^5 - 29y^4 - 270y^3 + 8\,316y^2 - 34\,776y + 38\,880 = 0$$

Предварительные испытания.

$$38\,880 = 6^5 \cdot 5.$$

Возможные значения корня: ± 1, ± 2, ± 3, ± 5 $\pm 6, \ldots \pm 38\,880$

1. $f(+1) = 12\,122 = 2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 29$. Число $\delta - 1$ делит $f(+1)$. Возможные значения

$$-1,\ 2,\ 3,\ -10,\ +1,\ -18,\ 20, \ldots$$

2. $f(-1) = 82\,212 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 17$. Число $\delta + 1$ делит $f(-1)$

$$2,\ 3,\ 12\ -18$$

Окончательные испытания.

1. Число 2.

	38 880,	−34 776,	8 316,	−270	−29	1	
2		19 440	−7 668	324	27	−1	корень $y_1 = 2$
		−15 336	648	54	−2		

2. Число 3.

	19 440,	7 668,	−324,	−27	1	
3		−6 480	396	24	−1	корень $y_2 = 3$
		1 188	72	−3	0	

3. Число 12.

	6 480,	—396,	—24,	1
12		540	12,	—1	корень $y_3 = 12$
		144	—12	0

4. Число —18.

	—540,	—12	1	корень $y_4 = -18$.
—18		30	—1	
		18	0	корень $y_5 = 30$

Данное уравнение имеет корни

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -3, \quad x_5 = 5.$$

В целях большей краткости мы начали прямо с преобразования уравнения. Заметим, что во многих случаях полезно предварительно вычислить целые корни уравнения и уже потом перейти к отысканию дробных, предварительно упростив уравнение делением.

Вычислить рациональные корни уравнений.

16. $8x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 6x - 1 = 0.$

17. $12x^5 - 32x^4 + 9x^3 + 16x^2 - 3x - 2 = 0.$

18. $12x^5 - 28x^4 - x^3 + 24x^2 - 13x + 2 = 0.$

19. $15x^4 - 8x^3 + 31x^2 - 16x + 2 = 0.$

20. $10x^5 + 17x^4 + 13x^3 + 2x^2 - 5x - 1 = 0.$

21. $9x^4 - 12x^3 - 71x^2 - 40x + 16 = 0.$

22. $800x^4 - 102x^2 - x + 3 = 0.$

23. $55x^5 + 83x^4 - 213x^3 - 237x^2 + 144x - 36 = 0.$

24. $2x^5 - x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 4x - 2 = 0.$

25. $9x^5 - 33x^4 + 58x^3 - 144x^2 + 88x - 48 = 0.$

26*. Показать, что функция $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ не имеет целых корней, если числа $f(0)$, $f(1)$ оба нечетные.

27. Корни многочлена четвертой степени равны числам

$$p^2, \quad p^2 + 2pq, \quad q^2, \quad q^2 + 2pq,$$

где p и q суть рациональные числа.

Найти рациональные корни производной.

28*. Показать, что уравнение

$$x^3 - (\beta - \gamma)x + \alpha\gamma = 0,$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha^2 \geqq \beta > (\alpha - 1)^2$ или $\alpha^2 < \beta \leqq (\alpha + 1)^2$ имеет несоизмеримый корень. Числа α, β, γ—целые.

29*. Может ли уравнение

$$x^3 - 6\alpha\beta x - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0$$

иметь несоизмеримые корни. Числа α, β, γ целые.

§ 2. Разложение на множители с целыми коэфициентами.

1. Целая функция с целыми коэфициентами либо разлагается с целыми коэфициентами, либо не имеет вовсе делителей с коэфициентами.

2. Вопрос о том, допускает ли данная целая функция $f(x)$ делите степени m, решается так.

Вычисляется $m+1$ значение функции $f(a_i) = A_i$ $(i = 1, 2, \ldots m+1$ выбирается какая-нибудь система $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{m+1}$ делителей чисел $A_i = \sigma_i$

Строится многочлен $\varphi(x)$ степени m, определяемый по условиям

$$\varphi(x_i) = \sigma_i, \qquad i = 1, 2, \ldots m+1.$$

Непосредственным делением проверяется, является ли $\varphi(x)$ действительно делителем $f(x)$ или нет.

С целью сократить число необходимых действий полезно иметь в виду что выбранная в качестве частных значений $\varphi(x)$ система делителей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{m+1}$ должна удовлетворять условию, что все числа

$$\frac{\sigma_k - \sigma_i}{x_k - x_i}$$

целые.

Задачи

30. Разложить функцию $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 5$ на множители с целыми коэфициентами.

Решение. Определим сначала делителей первой степени. Функция $f(x)$ в качестве целых корней может иметь только числа ± 1, ± 5. Произведя испытания, как показано в задаче 1, легко убедиться, что данная функция целых корней не имеет. Перейдем к дробным корням. Положим $2x = y$.

$$y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 32y^2 + 40y + 80 = 0.$$

Так как нас интересуют дробные корни функции $f(x)$, то нам следует ограничиться только нечетными значениями y.

Возможные значения y: ± 1, ± 5.

Непосредственно испытывая ± 1, ± 5, убеждаемся, что нечетные y не могут быть корнями.

Функция $f(x)$ не имеет дробных корней и следовательно не допускает делителей первой степени с рациональными коэфициентами. Она либо имеет делителя второй степени с целыми коэфициентами, либо вовсе не разлагается на множители с целыми коэфициентами.

В первом случае вторым множителем служит функция 3-й степени, не разлагающаяся на множителей с целыми коэфициентами.

Займемся теперь разысканием делителей второй степени. Вычислим несколько значений многочлена $f(x)$ с целью взять в основу для дальнейших вычислений те из них, для которых число делителей по возможности мало. Имеем:

$$f(1) = 30, \quad f(0) = 5, \quad f(-1) = 6, \quad f(-2) = 3$$

Выбираем три из них:

$$f(0)=5,\quad f(-1)=6,\quad f(-2)=3.$$

Возможные значения:

$$\sigma_1=\pm 1,\ \pm 5;\quad \sigma_2=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6;\quad \sigma_3=\pm 1,\ \pm 3.$$

Искомый множитель

$$\varphi(x)=\varphi(0)\ \frac{(x+2)(x+1)}{2}+\varphi(-1)\cdot\frac{x(x+2)}{-1}+\varphi(-2)\cdot\frac{x(x+1)}{2}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[\varphi(0)-2\varphi(-1)+\varphi(-2)]\,x^2+$$
$$+\frac{1}{2}[3\varphi(0)-4\varphi(-1)+\varphi(-2)]\,x+\varphi(0).$$

Приступим теперь к испытаниям. Согласимся последний коэфициент (x) считать положительным. Это нисколько не изменит общности и вдвое сократит число испытаний. Значения σ_1, σ_2, σ_3, уже будем заносить в таблицу, чтобы не повторить одного и того же

	1	1	1	1	1
σ_2	1	−1	1	−1	1
σ_3	+1	1	−1	−1	3

В одном столбце таблицы помещаются значения, которые мы придаем делителям σ_1, σ_2, σ_3 одновременно

1-е испытание

$$\varphi(x)=1$$

2-е испытание

$$\varphi(x)=2x^2+4x+1$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^5+5x^4+5x^3+8x^2+5x+5 & 2x^2+4x+1 \\
\underline{2x^5+4x^4+\ \ x^3} & \overline{x^3} \\
\quad x^4+4x^3+8x^2 &
\end{array}$$

3-е испытание

$$\varphi(x)=-x^2-x+1$$

$$\begin{array}{l}
2x^5+5x^4+5x^3+8x^2+5x+5 \\
-\ \underline{2x^5+2x^4-2x^3} \\
\quad 3x^4+7x^3+8x^2 \\
-\ \underline{3x^4+3x^3-3x^2} \\
\quad 4x^3+11x^2+5x \\
-\ \underline{4x^3+\ \ 4x^2-4x} \\
\quad 7x^2+9x+\ \ 5 \\
-\ \underline{7x^2+7x-\ \ 7} \\
\quad 2x+12
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
x^2+\ \ x-1 \\
\overline{2x^3+3x^2+4x+7}
\end{array}$$

4-е испытание.

$$\varphi(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 5 & x^2 + 3x + 1 \\
\cline{2-2}
-\underline{2x^5 + 6x^4 + 2x^3} & 2x^3 - x^2 + 6x - 9 \\
\quad -x^4 + 3x^3 + 8x^2 & \\
-\underline{\quad -x^4 - 3x^3 - x^2} & \\
\qquad 6x^3 + 9x^2 + 5x & \\
-\underline{\qquad 6x^3 + 18x^2 + 6x} & \\
\qquad\quad -9x^2 - x + 5 & \\
-\underline{\qquad\quad -9x^2 - 27x - 9} & \\
\qquad\qquad 26x + 14 &
\end{array}$$

5-е испытание.

$$\varphi(x) = x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 5 & x^2 + x + 1 \\
\cline{2-2}
-\underline{2x^5 + 2x^4 + 2x^3} & 2x^3 + 3x^2 + 5 \\
\quad 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 & \\
\quad \underline{3x^4 + 3x^3 + 4x^2} & \\
\qquad 5x^2 + 5x + 5. &
\end{array}$$

Первая система не годится потому, что для старшего коэфициента $\varphi(x)$ получается 0.

Второе испытание останавливаем потому, что в частом должны получиться дробные коэфициенты.

Делитель $\varphi(x) = -x^2 - x + 1$ тоже не годится.

Четвертое испытание тоже ничего не дает.

Пятое испытание дает делитель

$$\varphi(x) = x^2 + x + 1.$$

Второй делитель функции равен

$$2x^3 + 3x^2 + 5.$$

Он не разложим на множители с целыми коэфициентами.

Разложить на множители с целыми коэфициентами функцию

31. $x^4 + 7x^3 + 12x^2 + x - 1.$

32. $x^4 - 4x^3 + x + 6.$

33. $2x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 1.$

34. $2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 3x + 3.$

35. $x^6 + x^5 - 11x^4 - 2x^3 + x^2 - 11x - 3.$

36. $x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 10x + 4.$

37. $x^5 - x^4 + 2x^2 - 2x + 1$.

38. $x^5 - x^4 + x^3 + 1$.

39. $x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

40. $x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

41. Показать, что целая функция с целыми коэфициентами

$$x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + 1 = 0$$

иметь делителей 2-й степени исключительно вида

$$x^2 + \alpha x + 1 \text{ или } x^2 + \beta x - 1,$$

α делит $1 - a_2 + a_4$, $1 + a_1 - a_3$ и β делит $1 + a_2 + a_4$, $1 + a_1 + a_3$. Числа α и β—целые.

ОТДЕЛ X.

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ.

1. Определение верхней и нижней границы корней уравнения.

1. Верхняя граница положительных корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad a_0 > 0 \qquad (*)$$

принята равной одному из чисел

$$1 + \frac{|a_m|}{a_0} \text{ (Маклорен)}, \quad 1 + \sqrt[r]{\frac{|a_m|}{a_0}} \text{ (Лагранж)}, \quad 1 + \sqrt[r-p]{\frac{|a_m|}{a_0}} \text{ (Тилло)},$$

a_m—наибольший по модулю отрицательный коэфициент уравнения, a_r— от начала отрицательный коэфициент; a_p—наибольший по величине эфициент, предшествующий a_r.

2. Вычисляя верхнюю границу положительных корней уравнения (*) годно разбить левую часть уравнения на группы по нескольку членов каждой так, чтобы коэфициент при старшей степени x в каждой группе положителен, и определить верхнюю границу положительных корней равнений, образованных членами каждой группы. Наибольшее из полученных чисел можно принять за верхнюю границу корней уравнения (*).

3. *Правило Лагерра.* Число a есть верхняя граница положительных корней уравнения (*), если все числа $f_0(a)$, $f_1(a), \ldots f_n(a)$ одного знака. $[f_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k.]$

4. *Правило Ньютона.* Число a есть верхняя граница положительных корней уравнения (*), если все функции $f(x)$, $f'(x), \ldots f^{(n)}(x)$ имеют при $x = a$ одинаковые знаки.

5. Нижняя граница корней уравнения (*) равна верхней границе корней уравнения

$$a_0x^n - a_1x^{n-1} + \ldots + (-1)^n = 0.$$

6. Нижняя граница положительных корней и верхняя граница корней уравнения (*) равны верхней и нижней границе уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

1. Найти верхнюю и нижнюю границу корней уравнения

$$x^8 + 2x^7 - 2x^6 + 6x^5 - 80x^4 + 100x^3 - 400x^2 + 15x + 30 = 0.$$

Решение. Непосредственно приложение правила Лагранжа даст верхней границы положительных корней уравнения величину

$$1 + \sqrt{400} = 21.$$

Согласно правилу Тилло для верхней границы получится величина

$$1 + \frac{400}{2} = 201$$

значительно менее точная, чем найденная по правилу Лагранжа.

Применим способ группировки. Разобьем сумму в левой части на группы

$$\varphi_1(x) = x^8, \ \varphi_2(x) = 2x^7 - 2x^6, \ \varphi_3(x) = 6x^5 - 80x^4,$$
$$\varphi_4(x) = 100x^3 - 400x^2 + 15x + 30.$$

Верхняя граница положительных корней уравнения $\varphi_1(x) = 0$ равна Уравнение $2x^7 - 2x^6 = 0$ не может иметь корней бо́льших единицы Уравнение $6x^5 - 80x^4 = 0$ не может иметь корней бо́льших

$$\frac{80}{6} = 13\frac{1}{3}$$

Уравнение $100x^3 - 400x^2 + 15x + 30$ не может иметь корней 4.

За верхнюю границу положительных корней предложенного уравнен можно принять число $13\frac{1}{3}$

Посмотрим, нельзя ли и эту величину уменьшить. Испытаем число 1 пользуясь правилом Лагерра. Вычисление значений функции $f_0(x)$ $f_1(x), \ldots f_n(x)$ произведем по правилу Horner'a, помня что значения функций при $x = 10$ равны коэфициентам частного и остатку, получаем при делении левой части уравнения на двучлен $x - 10$.

	1,	2,	−2,	6,	−80,	100,	−400,	15,	30
10	1,	12,	118,	1186,	11 780,	117 900,	+	+	+
5	1,	7,	33,	171,	775,	+	+	+	+
3	1,	5,	13,	45,	55,	265,	+	+	+

Все эти числа положительны, и число 10 можно принять за верхнюю границу.

Желая понизить дальше, испытаем 5.

Вычисления показывают, что за верхнюю границу можно принять 5.

Попробуем число 3.

Оказывается, что верхнюю границу можно понизить до 3.

Дальнейшее понижение, как не трудно проверить, невозможно.

Вычислим нижнюю границу для корней данного уравнения.

Заменяем x на $-x$:

$$x^8 - 2x^7 - 2x^6 - 6x^5 - 80x^4 - 100x^3 - 400x^2 - 15x + 30 = 0$$

определим верхнюю границу корней полученного уравнения.

Легко видеть, что способы Лагранжа, Тилло, Маклорена и способ уппировки дадут слишком высокую верхнюю границу.

Испытаем число 10 согласно правилу Лагерра.

	1,	-2,	-2,	-6,	-80,	-100,	-400,	-15,	30
10	1,	8,	78,	+	+	+	+	+	
5	1,	3,	13,	59,	215,	975,	+	+	+

Число 10 можно принять за верхнюю границу. Верхняя граница вычислениям может быть уменьшена до 5. Дальнейших понижений делать нельзя.

Корни данного уравнения расположены в промежутке $(-5, 3)$.

Найти верхнюю и нижнюю границу корней уравнения.

2. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0$.

3. $x^3 - 18x^2 + 2x - 7 = 0$.

4. $x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 48x - 32 = 0$.

5. $x^4 - 4x^3 + x + 4 = 0$.

6. $4x^5 - 8x^4 + 22x^3 + 98x^2 - 73x + 5 = 0$.

7. $x^4 + 9x^2 - 6x + 5 = 0$.

8. $x^4 - 9x^3 - 9x + 1000 = 0$.

9. $x^4 - 4{,}1x^3 + 14{,}2x^2 - 20{,}1x + 26 = 0$.

10. $x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 12 = 0$.

11. $x^3 - 0{,}6x^2 + 0{,}6x - 0{,}05 = 0$.

12. $7x^4 - 14x^3 + 9x^2 - 2x + 0{,}1 = 0$.

13. $x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{20}{9}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{42}x - \frac{1}{252} = 0$.

14. $3432x^7 - 12\,012x^6 + 16\,632x^5 - 11\,550x^4 + 4200x^3 - 756x^2 + 56x - 1 = 0$.

15. $x^6 - 7x^4 + 14x - 7 = 0$.

16. $5x^5 - 7x^4 - 10x^3 - 32x^2 - 90x - 317 = 0$.

17. $x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24 = 0$.

18. $x^8 + 20x^7 + 4x^6 - 11x^5 - 120x^4 + 13x - 25 = 0.$

19*. Показать, что все корни уравнения [1])

$$5797x^4 + 4591x^3 + 5892x^2 + 2876x + 6942 = 0$$

мнимы.

20*. Число отрицательных коэфициентов $a_\alpha, a_\beta, \ldots a_\lambda$ уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

равно k.

Показать, что за верхнюю границу положительных корней можно наибольшее из чисел

$$\sqrt[\alpha]{k \cdot \frac{|a_\alpha|}{a_0}}, \quad \sqrt[\beta]{k \cdot \frac{|a_\beta|}{a_0}}, \ldots \sqrt[\lambda]{k \cdot \frac{|a_\lambda|}{a_0}} \qquad \text{(Коши.)}$$

21*. Коэфициенты a_λ, a_μ являются наибольшими по абсолютной из отрицательных коэфициентов уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad a_0 > 0.$$

Показать, что

$$\sqrt[\lambda]{\frac{|a_\lambda|}{a_0}} + \sqrt[\mu]{\frac{|a_\mu|}{a_0}}$$

можно принять за верхний предел корней уравнения. (Лагранж.)

22*. Суммы положительных коэфициентов уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \; a_0 > 0,$$

предшествующих отрицательным коэфициентам $a_\alpha, a_\beta, \ldots a_\lambda$, равны $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \ldots \sigma_\lambda$. Показать, что наибольшее из чисел

$$1 + \frac{|a_\alpha|}{\sigma_\alpha}, \quad 1 + \frac{|a_\beta|}{\sigma_\beta}, \quad \ldots 1 + \frac{|a_\lambda|}{\sigma_\lambda}$$

может быть принято за верхнюю границу корней уравнения.

§ 2. Способ Штурма.

1. Число s корней уравнения $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, расположенного в промежутке (a, b), равно разности

$$s = |v(a) - v(b)|, \qquad (*)$$

где $v(x)$ обозначает число перемен знака в ряду

$$f(x), f_1(x), \ldots f_n(x), \qquad (**)$$

обладающем свойствами:

α) Последняя функция $f(x)$ не обращается в нуль в промежутке (a, b).

β) Две рядом стоящие функции не обращаются в нуль при одинаковых значениях x в промежутке (a, b).

[1]) Leverier. Mémoire sur la planete Uranus. Conn. d. tem., 1849.

γ) Если какая-либо функция $f(x)$ обращается в нуль при некотором x в промежутке (a, b), то функции $f_{k-1}(x)$ и $f_{k+1}(x)$ принимают значении x противоположные знаки.

δ) Произведение $f(x)\, f_1(x)$ при переходе через корень функции $f(x)$ меняет знак с — на + или всегда с + на —.

2. Если ряд функций (**) обладает только стойствами α), β), γ), то стоящая в правой части равенства (*), выражает разность между корней функции $f(x)$, расположенных в промежутке (a, b), при ходе через которые произведение $f(x) \cdot f_1(x)$ меняет знак с — на +, числом корней, при переходе через которые произведение меняет знак — на —

3. Ряд функций (**) можно составить для данной функции $f(x)$ путем следовательных делений, положив: $\mu_0 f_1(x) = f'(x)$, $\mu_0 > 0$

$$\lambda_0 f(x) = f_1(x)\, q_1(x) - \mu_1 f_2(x), \ \lambda_0 > 0, \ \mu_1 > 0$$

$$\lambda_1 f_1(x) = f_2(x)\, q_2(x) - \mu_2 f_3(x), \ \lambda_1 > 0, \ \mu_2 > 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{k-1} f_{k-1}(x) = f_k(x)\, q_k(x) - \mu_k f_{k+1}(x), \ \lambda_{k-1} > 0, \ \mu_n > 0$$

$$f_{k+1}(x) = 1.$$

Последнее равенство конечно возможно только в том случае, когда функция $f(x)$ не имеет кратных корней, что обычно и предполагается применения метода.

Числа λ_s, μ_s можно выбирать по произволу. На практике этим произволом следует распоряжаться так, чтобы коэфициенты функций $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_{k+1}(x)$ были по возможности проще.

4. При вычислении функций ряда (**) важно помнить, что нет необходимости проделывать все деления до последнего, т. е. до тех пор, пока не получится функция $f_{k+1}(x)$ равная единице. Деление следует прекратить на функции $f_m(x)$, относительно которой будет ясно, что она не имеет вещественных корней в промежутке (a, b). Ее следует принять за последнюю функцию ряда. В частности, получив остаток второй степени, полезно испытать, не окажутся ли его корни мнимыми.

5. Если функция $f(x)$ имеет кратные корни, то общий наибольший делитель $[f(x), f'(x)]$ не равен единице. Последняя функция $f_{k+1}(x)$ отлична от единицы. Разность $v(a) - v(b)$ дает число различных корней $f(x)$ в промежутке $(a, b$ Каждый корень, какова бы ни была его кратность, считается один раз.

6. Способ составления функций ряда (**), изложенный выше, не является единственным. Во многих случаях, важных по своим приложениям, ряд (**) можно получить иначе, пользуясь особенностями заданной функции $f(x)$.

Задачи.

23. Отделить корни уравнения

$$x^6 - 6x^5 - 30x^2 + 12x - 9 = 0.$$

Решение. Отделение корней расположим по схеме.

Предварительные вычисления.

$$f'(x) = 6x^5 - 30x^4 - 60x + 12 \qquad f_1(x) = x^5 - 5x^4 - 10x +$$

$$\begin{array}{l|l}
x^6 - 6x^5 - 30x^2 + 12x - 9 & x^5 - 5x^4 - 10x + 2 \\ \cline{2-2}
x^6 - 5x^5 - 10x^2 + 2x & x - 1 \\
\quad - x^5 - 20x^2 + 10x - 9 & \\
\quad - x^5 + 5x^4 + 10x - 2 & \\
\qquad - 5x^4 - 20x^2 - 7 &
\end{array}$$

$$f_2(x) = 5x^4 + 20x^2 + 7$$

Корни $f_2(x)$ мнимы. Ее можно принять за последнюю функц ряда (**).

Окончательные вычисления.

$f(x)$		1,	−6,	0,	0,	−30,	12,	−9
	7	1,	+1,	7,	49,	+	+	+
	−2	1,	−8,	16,	−32,	34,	−56,	+103

$f_1(x)$		1,	−5,	0,	0,	−10,	2,
	7	1,	2,	14,	98,	+	+
	−2	1,	−7,	14,	−28,	+46,	−

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$
7	+	+	+
0	−		
−2	+	−	+

Определяем верхнюю и нижнюю границу корней данного уравнения. Корни данного уравнения лежат в промежутке $(-2, 7)$.

Определяем знаки функций $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ на верхней и нижней границе. Промежуток $(-2, 7)$ содержит два корня.

При $x = 0$ функция $f(x)$ отрицательна.

Не вычисляя значений $f_1(x)$ и $f_2(x)$, заключаем, что в промежутках $(0, 7)$ и $(-2, 0)$ лежит по одному корню уравнения.

24. Отделить корни уравнения

$$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0.$$

Решение. Вычисления, как и в предыдущем примере, расположены по схеме.

[1]) Значения функции $f_2(x)$ не вычисляем потому, что эта функция, имея мнимые корни, сохраняет свой знак.

Предварительные вычисления.

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 6 \qquad f_1(x) = 5x^4 - 30x^2 + 6$$

$$\begin{array}{l|l} 5x^5 - 50x^3 + 30x + 5 & 5x^4 - 30x^2 + 6 \\ \hline 5x^5 - 30x^3 + 6x & x \\ \hline \quad -20x^3 + 24x + 5 & \end{array}$$

$$f_2(x) = 20x^3 - 24x - 5$$

$$\begin{array}{l|l} 20x^4 - 120x^2 + 24 & 20x^3 - 24x - 5 \\ \hline 20x^4 - 24x^2 - 5x & x \\ \hline \quad -96x^2 + 5x + 24 & \end{array}$$

$$f_3(x) = 96x^2 - 5x - 24$$

Корни вещественные

$$\begin{array}{l|l} 92\,160x^3 - 110\,592x - 23\,040 & 96x^2 - 5x - 24 \\ \hline 92\,160x^3 - 4\,800x^2 + 23\,040x & 960x + 50 \\ \hline \quad 4\,800x^2 - 133\,632x - 23\,040 & \\ \quad 4\,800x^2 - \quad 250x - \quad 1\,200 & \\ \hline \qquad -133\,382x - 21\,840 & \end{array}$$

$$f_4(x) = 66\,691x + 10\,920$$

$$f_5(x) = 1$$

Совершая первое деление, умножаем делимое на 5, чтобы получить в остатке многочлен с целыми коэфициентами. С тою же целью при втором делении умножаем делимое на 20 и при третьем на $96 \cdot 48 = 4\,608$

Остаток второго деления имеет вещественные корни, и потому на нем остановиться нельзя.

Третье деление дает остаток, корень которого отрицательное число, заключенное в промежутке $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$.

Корень $f_4(x)$ рационален, в то время как корни $f_3(x)$ несоизмеримы, ибо

$$96 < \sqrt{25 + 4 \cdot 24 \cdot 96} < 97.$$

Многочлены $f_3(x)$ и $f_4(x)$ не имеют общих корней. Их общий наибольший делитель $f_5(x)$ равен $+1$ или -1.

Для определения знака $f_5(x)$ нет необходимости производить деление $f_3(x)$ на $f_4(x)$, действие в данном случае утомительное в виду величины коэфициентов функции $f_4(x)$.

Знак $f_5(x)$ противоположен знаку $f_3(x)$ при x равном корню $f_4(x)$.

Корни $f_3(x)$ разных знаков, и отрицательный корень меньше $-\frac{1}{6}$ $\left[\text{ибо } f_3\left(-\frac{1}{6}\right) < 0\right]$.

Корень $f_4(x)$ лежит между корнями $f_3(x)$, и поэтому знак $f_3(x)$ при x равном корню $f_4(x)$ отрицательный. Знак $f_5(x)$ положительный.

Окончательные вычисления.

Корни уравнения заключены в промежутке $(-4, 4)$, в чем легко найдя верхнюю и нижнюю границу корней уравнения правила Лагерра.

$f(x)$	1,	0,	−10,	0,	6,	1
4	1,	4,	6,	24,	102,	+
−4	1,	−4,	6,	−24,	102,	−
1	1,	1,	−9,	−9,	−3,	−2
−1	1,	−1,	−9,	9,	−3,	4
−0,5	1,	−0,5,	−9,75,	4,875,	3,5625,	−0,78125

$f_1(x)$	5,	0,	−30,	0,	6
4	5,	20,	50,	+	+
−4	5,	−20,	50,	−200,	+
−1	5,	−5,	−25,	+25,	−19

$f_2(x)$	20,	0,	−24,	−5
4	20,	80,	+	+
−4	20,	−80,	+	−
−1	20,	−20,	−4,	−1

$f_3(x)$	96,	−5,	−24
4	96,	+	+
−4	96,	−	+
−1	96,	−	+

$f_4(x)$	66 691,	10 920
4	+	+
−4	+	−
−1	+	−

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$
4	+	+	+	+	+	+
1	−					
0	+	+	−	−	+	+
−0,5	−					
−1	+	−	−	+	−	+
−4	−	+	−	+	−	+

Разность $v(-4)-v(4)=5$ показывает, что все корни уравнения ественны.

Дробим промежуток $(-4, 4)$, вставляя число 0. В промежутке $(0, 4)$, показывает разность $v(0)-v(4)=2$, расположено два корня. При $x=1$ функция $f(x)$ меньше нуля.

Нет нужды вычислять значений $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ при $x=1$, заключить, что в промежутках $(1, 4)$, $(0, 1)$ лежит по одному корню равнения.

Промежуток $(-4, 0)$ содержит три корня. Подразделив его на $(-4, -1)$, $(-1, 0)$, легко усмотреть, что в первом из них содержится один, а во втором два корня уравнения. Деля этот последний промежуток на два, получаем, что в промежутках $(-1, -0{,}5)$, $(-0{,}5, 0)$ лежит по одному корню.

Корни уравнения разделены. Они содержатся в промежутках:

$$(-4, -1),\ (-1, -0{,}5),\ (-0{,}5, 0),\ (0, 1),\ (1, 4).$$

25. Отделить корни уравнения

$$x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1=0.$$

Решение. Предварительные вычисления.

$$f'(x)=5x^4+8x^3+3x^2-2x-2$$

$f_1(x)=5x^4+8x^3+3x^2-2x-2$

$$\begin{array}{l|l}
25x^5+50x^4+25x^3-25x^2-50x-25 & 5x^4+8x^3+3x^2-2x-2 \\ \cline{2-2}
25x^5+40x^4+15x^3-10x^2-10x & 5x+2 \\ \cline{1-1}
\quad 10x^4+10x^3-15x^2-40x-25 & \\
\quad 10x^4+16x^3+6x^2-4x-4 & \\ \cline{1-1}
\qquad -6x^3-21x^2-36x-21 &
\end{array}$$

$f_2(x)=2x^3+7x^2+12x+7$

$$\begin{array}{l|l}
20x^4+32x^3+12x^2-8x-8 & 2x^3+7x^2+12x+7 \\ \cline{2-2}
20x^4+70x^3+120x^2+70x & 10x-19 \\ \cline{1-1}
\quad -38x^3-108x^2-78x-8 & \\
\quad -38x^3-133x^2-228x-133 & \\ \cline{1-1}
\qquad 25x^2+150x+125 &
\end{array}$$

$f_3(x)=-x^2-6x-5$

Корни вещественны

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+7x^2+12x+7 & -x^2-6x-5 \\ \cline{2-2}
2x^3+12x^2+10x & -2x+5 \\ \cline{1-1}
\quad -5x^2+2x+7 & \\
\quad -5x^2-30x-25 & \\ \cline{1-1}
\qquad 32x+32 &
\end{array}$$

$f_4(x)=-x-1$

При подстановке -1 корня функции $f_4(x)$, функция $f_3(x)$ обращается в нуль. Функция $f_4(x)$ делит $f_3(x)$ и является общим наибольшим делителем $f(x)$ и $f'(x)$. Рассматриваемое уравнение имеет кратный корень -1

Окончательные вычисления.

$f(x)$	1,	2,	1,	— 1,	— 2,	— 1
2	1,	4,	9,	17,	+	+
— 2	1,	0,	1,	— 3,	+ 4,	— 9

Корни $f(x)$ лежат в промежутке (— 2, 2).

$f_1(x)$	5,	8,	3,	— 2,	— 2
2	5,	18,	+	+	+
— 2	5,	— 2,	7,	— 16,	30

$f_2(x)$	2,	7,	12,	7
2	+	+	+	+
— 2	2,	3,	6,	— 5

$f_3(x)$	— 1,	— 6,	— 5
2	— 1,	— 8,	—
— 2	— 1,	— 4,	3

$f_4(x)$	— 1,	— 1
2	— 1,	— 3
— 2	— 1,	+ 1

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
2	+	+	+	—	—
0	—	—	+	—	—
— 2	—	+	—	+	+

Разность $v(-2) - v(2) = 2$.

Уравнение имеет два различных корня в промежутке (— 2, 2).

Дробим промежуток, вставляя в него 0.

Разность $v(0) - v(2) = 1$.

Уравнение имеет один корень в промежутке (0, 2).

Другой корень уравнения лежит в промежутке (— 2, 0). Этот корень, как легко сообразить, двукратный и равняется —1.

Отделить корни уравнения

26. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$.

27. $2x^4 - 13x^2 + 10x - 19 = 0$.

28. $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 6x + 11 = 0$.

29. $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 4 = 0$.

30. $x^4 + 4x^3 + 30x^2 + 40x - 32 = 0.$

31. $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0.$

32. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0.$

33. $x^4 - 4x^3 + 4x + 4 = 0.$

34. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 10x - 4 = 0.$

35. $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0.$

36. $12x^5 - 25x^3 + 15x + 3 = 0.$

37. $x^5 + 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x - 5 = 0.$

38. $x^5 + 4x^4 - x^3 - 29x^2 - 14x - 1 = 0.$

39. $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 0.$

40. $x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0.$

41. $x^6 - 12x^5 + 28x^4 + 120x^3 - 491x^2 + 228x + 322 = 0.$

42. $x^6 - 8x^5 + 17x^4 + 8x^3 - 56x^2 + 48x - 12 = 0.$

43. $x^6 - 6x^5 - 30x^2 + 12x - 9 = 0.$

44. $x^6 - 7x^5 + 15x^4 - 40x^2 + 48x - 16 = 0.$

45. $2x^6 - 18x^5 + 60x^4 - 120x^3 - 30x^2 + 18x - 5 = 0.$

Отделить корни уравнения

46. $c^2x^4 - 2c^2x^3 + 2x - 1 = 0, \ c > 0.$

47. $x^5 - 5p^2x^3 + 5p^4x + 2p^5 = 0.$

48. Пользуясь методом Штурма, найти условие вещественности корней уравнения

$$x^3 + px + q = 0.$$

49. Пользуясь методом Штурма, найти условие вещественности корней уравнения

$$x^5 - 5px^3 + 5p^2x + 2q = 0.$$

Сколько вещественных корней может иметь уравнение, если это условие не соблюдено?

50. Показать, что когда коэфициент при старшей степени x в одной из функций ряда (**), составленного посредством последовательных делений, отрицательный, функция $f(x)$ имеет мнимые корни.

51. Показать, что все корни многочлена $p_n(x)$, где

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = e^{-x^2} \cdot p_n(x),$$

вещественны.

Решение. Многочлены $p_k(x)$ связаны соотношениями

$$p_{k+1}(x) + 2xp_k(x) = p_k'(x) \quad (k = 1, 2, \cdots n) \tag{1}$$

$$p_{k+1}(x) + 2xp_k(x) + 2kp_{k-1}(x) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots n), \tag{2}$$

$$p_0(x) = 1.$$

Первое получается посредством дифференцирования из равенства, определяющего $p_k(x)$, второе по формуле Лейбница из соотношения

$$e^{-x^2} p_{k+1}(x) = \frac{d^k(-2x \cdot e^{-x^2})}{dx^k}$$

Второе из полученных равенств показывает, что две рядом функции $p_{k+1}(x)$ и $p_k(x)$ могут обращаться одновременно в нуль при таких значениях x, которые в то же самое время обращают в $p_{k-1}(x)$ и все ей предшествующие функции $p_s(x)$ $(s < k-1)$.

Таких значений x быть не может, так как $p_0 = 1$.

То же соотношение позволяет заключить, что для значений x, функцию $p_k(x)$ в нуль, функции $p_{k+1}(x)$, $p_{k-1}(x)$ значения, противоположные по знаку.

Первое соотношение показывает наконец, что при переходе корень функции $p_k(x)$ произведение $p_{k+1}(x) \cdot p_k(x)$ меняет знак с — на что в связи с отмеченным выше свойством рассматриваемых многочлен приводит к заключению о том, что произведение $p_k(x) \cdot p_{k-1}(x)$ при ходе через корень функции $p_k(x)$ меняет знак с + на —

Ряд

$$p_n(x), p_{n-1}(x), \ldots p_1(x), \; p_0(x) = 1$$

обладает всеми свойствами ряда (**).

Из соотношения (2) или (1) легко усмотреть, что коэфициент старшей степени x у многочлена $p_{k+1}(x)$ равен коэфициенту при старшей степени x у многочлена $p_k(x)$ умноженному на —2.

Отсюда уже сразу следует, что коэфициент при старшей степени x у многочлена $p_k(x)$ равен $(-2)^k$.

Знак многочлена при очень больших положительных значениях x определяется знаком коэфициента при старшей степени x.

При положительных и очень больших значениях x ряд

$$p_n(x), \; p_{n-1}(x), \ldots p_1(x), \; p_0(x)$$

имеет одни перемены знака. При отрицательных весьма больших значениях x ряд дает только постоянства знака.

В этом легко убедиться, заметив, что при замене x на $-x$ во многочлене $p_k(x)$ старший член многочлена получает коэфициент равный 2^k.

Полученный результат запишем в виде равенства

$$v(+\infty) - v(-\infty) = n,$$

показывающего, что число вещественных корней многочлена $p_n(x)$ равно n.

52. Отделить корни многочлена $p_7(x)$, где

$$\frac{d^7 e^{-x^2}}{dx^7} = e^{-x^2} \cdot p_7(x).$$

Решение. Для отделения корней многочлена $p_7(x)$ воспользуемся рядом

$$p_7(x), \; p_6(x), \; p_5(x), \; p_4(x), \; p_3(x), \; p_2(x), \; p_1(x), \; p_0(x).$$

Вычисления можно сократить вдвое, приняв во внимание, что многочлены $p_{2k}(x)$ содержат только четные, а многочлены $p_{2k+1}(x)$ содержат только нечетные степени x.

В этом можно убедиться, заключая от n к $n+1$ с помощью равенства (2) предыдущей задачи.

Займемся отделением положительных корней.

Частные значения многочленов $p_k(x)$ будем вычислять с помощью соотношения (2) предыдущей задачи. Вычисления расположим по схеме, ниже приложенной.

Первая таблица дает частные значения полиномов $p_k(x)$ при значениях 3, 2, 1, 0 аргумента.

Вторая таблица показывает распределение знака в ряду

$$p_7(x),\ p_6(x),\ \ldots\ p_1(x),\ p_0(x)$$

при частных значениях x.

Так как при $x=0$ некоторые из функций ряда и $p_7(x)$ равны нулю, то в таблице взяты знаки функций при $x=h$, где h—весьма малое положительное число.

Знаки функций $p_k(x)$ при $x=h$ можно получить из соображений непрерывности и пользуясь тем обстоятельством, что при переходе через корень $p_k(x)$ произведение $p_{k-1}(x)\ p_k(x)$ меняет знак с $+$ на $-$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$-2(k-1)p_{k-2}(3)$		0	-2	24	-204	1 440	$-8\,760$	45 792
$-6p_{k-1}(3)$		-6	36	-204	1 080	$-5\,256$	22 896	$-84\,816$
$p_k(3)$	1	-6	34	-180	876	$-3\,816$	14 136	$-39\,024$
$-2(k-1)p_{k-2}(0)$		0	-2	0	12	0	-120	0
$p_k(0)$	1	0	-2	0	12	0	-120	0
$-2(k-1)p_{k-2}(2)$		0	-2	16	-84	320	-760	-192
$-4p_{k-1}(2)$		-4	16	-56	160	-304	-64	3 296
$p_k(2)$	1	-4	14	-40	76	16	-824	$+3\,104$
$-2(k-1)p_{k-2}(1)$		0	-2	8	-12	-32	200	-96
$-2p_{k-1}(1)$		-2	4	-4	-8	40	-16	-368
$p_k(1)$	1	-2	2	4	-20	8	184	-464

	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$	$p_6(x)$	$p_7(x)$
3	+	—	+	—	+	—	+	—
2	+	—	+	—	+	+	—	+
1	+	—	+	+	—	+	+	—
h	+	—	—	+	+	—	—	+
0	+	0	—	0	+	0	—	0

Таблица показывает, что

$$v(1) - v(h) = 1,$$
$$v(2) - v(1) = 1,$$
$$v(3) - v(2) = 1.$$

Промежутки $(h, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ содержат по одному корню члена $p_7(x)$.

Многочлен имеет корень $x = 0$ и отрицательные корни содержат в промежутках $(-h, -1)$, $(-2, -1)$, $(-3, -2)$.

53*. Показать, что все корни полинома $P_n(x)$, где

$$\frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n} = e^{-x} \cdot P_n(x), \qquad P_0 = 1$$

суть вещественные положительные числа.

54. Отделить корни многочлена $P_4(x)$ предыдущей задачи.

55*. Сколько вещественных корней имеет многочлен $\varphi_n(x)$, определяемый равенством

$$\frac{d^{n+1} \operatorname{arc\,tg} x}{dx^{n+1}} = \frac{\varphi_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\ ?$$

56. Отделить корни многочлена $\omega_5(x)$ предыдущей задачи.

57*. Сколько вещественных корней имеет многочлен $\omega_n(x)$, определяемый равенством

$$\frac{d^{n+1} e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n+2}} \cdot p_n(x)\, e^{\frac{1}{x}}\ ?$$

58. Отделить корни многочлена $\omega_3(x)$ предыдущей задачи.

59. Все корни функции $f(x)$ степени n вещественны. Ряд функций

$$f(x),\ f_1(x),\ \ldots\ f_m(x)$$

обладает свойствами α), β), γ), δ). Найти m и определить $v(+\infty)$ и $v(-\infty)$.

60. Ряд функций $f(x)$, $f_1(x)$, ... $f_n(x)$ обладает свойствами α), β), γ). При весьма больших положительных значениях x ряд содержит одни постоянства знака. При весьма больших по абсолютной величине отрицательных значениях x ряд содержит одни перемены знака.

Сколько вещественных корней имеет функция $f(x)$ степени n, и сколько произведение $f(x) \cdot f_1(x)$ при переходе через корень $f(x)$ меняет знак — на $+$?

61. Все корни функции $f(x)$ степени n вещественны.

Ряд $f(x), f_1(x), \ldots f_n(x)$ обладает свойствами α), β), γ), δ).

Показать, что все корни любой функции $f_s(x)$ ряда вещественны и межаются корнями $f_{s+1}(x)$ и $f_{s-1}(x)$.

62*. Показать, что число мнимых корней функции $f(x)$ не меньше мнимых корней функции $f_s(x)$ ряда $f(x), f_1(x), \ldots f_m(x)$, свойствами α), β), γ), δ). (Darboux.)

63*. Функция $f_0(x)$ ряда $f(x), f_1(x), \ldots f_m(x)$, обладающего α), β), γ), δ), имеет p кратных корней кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ ответственно.

Показать, что $f(x)$ имеет мнимые корни, и установить нижний предел их.

64*. Многочлен

$$\varphi(x) = nf(x) + (\lambda - x) \cdot f'(x) \qquad f(\lambda) \neq 0$$

степень равную $n-2$, тогда как $f(x)$ есть многочлен степени n с простыми корнями.

Ряд $f(x), \varphi(x), \ldots \varphi_m(x)$ построен путем последовательных делений так, что

$$\lambda_{s+1} \varphi_s \cdot (x) = \varphi_{s+1}(x) \cdot q_{s+1}(x) - \mu_{s+2}\varphi_{s+2}(x), \qquad \lambda_s > 0$$

$$(s = 1, 2, \ldots m-2).$$

$$\lambda_0 f(x) = \varphi(x)q(x) - \mu_1\varphi_1(x). \qquad \mu_s > 0$$

Показать, что этот ряд обладает свойствами α), β), γ) и что $|v(a) - v(b)|$ числу корней $f(x)$ в промежутке (a, b), если λ лежит вне промежутка.

Показать, что $|v(a) + v(b)|$ дает число корней $f(x)$ в промежутке (a, b) для того случая, когда число λ лежит в этом промежутке. (Эрмит.)

65*. Многочлен $f(x)$ пятой степени при делении на многочлен третьей степени

$$\varphi(x) = 5 \cdot f(x) + (\lambda - x)\ f'(x)$$

в частном $P(x)$ и в остатке $R(x)$:

$$f(x) = P(x) \cdot \varphi(x) + R(x).$$

Показать, что корни многочленов $\lambda - x$, $P(x)$ и $R(x)$ разделяют корни многочлена $f(x)$ так, что между двумя последовательными корнями $f(x)$ лежит один из корней многочленов $\lambda - x$, $P(x)$, $R(x)$.

66. Отделить корни уравнения

$$x^5 - 5x^4 + 15x^3 + 5x^2 - 15x + 1 = 0.$$

Решение. Вычисление располагаем в следующем порядке:

Вычисление функции $\varphi(x)$ и числа (λ).

Для определения функции $\varphi(x)$ и числа (λ) достаточно заметить, $(x-\lambda)$ и $\varphi(x)$ являются частным и остатком от деления многочлена 5 на $f'(x)$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^5-5x^4+15x^3+5x^2-15x+1 & x^4-4x^3+9x^2+2x-3 \\
\cline{2-2}
x^5-4x^4+9x^3+2x^2-3x & x-1 \\
\cline{1-1}
\quad -x^4+6x^3+3x^2-12x+1 & \\
\quad -x^4+4x^3-9x^2-2x+3 & \\
\cline{1-1}
\qquad 2x^3+12x^2-10x-2 &
\end{array}
$$

$$\varphi(x)=10(x^3+6x^2-5x-1); \qquad \lambda=1.$$

Вычисление многочленов $P(x)$ и $R(x)$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^5-5x^4+15x^3+5x^2-15x+1 & x^3+6x^2-5x-1 \\
\cline{2-2}
x^5+6x^4-5x^3-x^2 & x^2-11x+86 \\
\cline{1-1}
\quad -11x^4+20x^3+6x^2-15x & \\
\quad -11x^4-66x^3+55x^2+11x & 0{,}1\cdot P(x)=x^2-11x+86 \\
\cline{1-1}
\qquad 86x^3-49x^2-26x+1 & \\
\qquad 86x^3+516x^2-430x-86 & -R(x)=565x^2-404x-87 \\
\cline{1-1}
\qquad\quad -565x^2+404x+87 &
\end{array}
$$

Вычисление корней многочленов $P(x)$, $R(x)$.

Корни многочлена $P(x)$ мнимы, ибо $11^2-4\cdot 86<0$.

Корни многочлена $R(x)$ мнимы, ибо $404^2-4\cdot 87\cdot 565<0$.

Отделение корней многочлена $f(x)$.

Многочлен $f(x)$ не может иметь больше двух вещественных корней, так как только число λ может разделять корни $f(x)$.

С другой стороны уравнение нечетной степени с вещественными коэфициентами должно иметь нечетное число вещественных корней.

Данное уравнение имеет только один вещественный корень, и этот корень отрицательный. Последнее следует из правила знаков Декарта.

67. Отделить корни уравнения

$$3x^5-5x^3+2=0$$

Решение.

Вычисление $\varphi(x)$ и λ.

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5-5x^3+2 & x^4-x^2 \\
\cline{2-2}
3x^5-3x^3 & 3x \\
\cline{1-1}
\quad -2x^3+2 &
\end{array}
\qquad \varphi(x)=-10(x^3-1) \quad \lambda=0
$$

числение $P(x)$ и $R(x)$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^5 - 5x^3 + 2 & x^3 - 1 \\ \cline{2-2} 3x^5 - 3x^2 & 3x^2 - 5 \\ \hline \quad -5x^3 + 3x^2 + 2 & \\ \quad -5x^3 \qquad + 5 & \\ \hline \qquad\qquad + 3x^2 - 3 & \end{array} \qquad -0{,}1 \cdot P(x) = 3x^2 - 5$$

$$R(x) = 3(x^2 - 1)$$

числение корней $P(x)$ и $R(x)$

Корни $P(x)$ равны: $\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

Корни $R(x)$ равны: ± 1.

Отделение корней $f(x)$.

В каждом из промежутков $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, -1\right)$, $(-1, 0)$, $(0, +1)$, $\left(1, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty\right)$ заключается не больше чем по одному корню $f(x)$.

Определим, которые из них пустые и какие содержат корни.

Для этого определим знак $f(x)$ на границах каждого промежутка.

$$f(-\infty) = -\infty,\ f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = -\frac{25}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{25}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + 2 = 2,$$

$$f(-1) = 4,\ f(0) = 2,\ f(1) = 0,\ f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 2,\ f(+\infty) = +\infty.$$

Уравнение имеет один двукратный корень 1 и простой корень меньший $-\sqrt{\frac{5}{3}}$.

68. Отделить корни уравнения

$$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0.$$

69. Отделить корни уравнения

$$x^5 - 10x^3 - 6x - 1 = 0.$$

70. Отделить корни уравнения

$$x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 2 = 0.$$

§ 3. Способ Фурье.

1. Число s вещественных корней функции $f(x)$ в промежутке (a, b) дается равенством

$$v(a) - v(b) = s + 2h, \quad h \geqq 0, \tag{*}$$

где $v(x)$ обозначает число перемен знака в ряду

$$f(x),\ f'(x),\ \ldots\ f^{(m-1)}(x), \quad f^{(m)}(x) \neq 0 \text{ при } a \leqq x \leqq b. \tag{**}$$

Каждый корень считается столько раз, сколько единиц в его кратности.

2. Если в равенстве (*) $2h$ не равно нулю, то число $2i$ мни корней функции $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$2i \geqq 2h.$$

3. Если функция $f''(x)$ не обращается в нуль в промежутке (a, b), ции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ в начале промежутка дают одни перемены а в конце промежутка одни постоянства знака и кроме того

$$\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| + \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| \geqq b - a,$$

то функция $f(x)$ не имеет корней в промежутке (a, b).

4. Производя вычисления, полезно иметь в виду, что, коль разность $v(a) - v(b) > 1$, промежуток (a, b) следует дробить, вставляя промежуточное число.

Если в течение вычислений обнаружится, что некоторая функция $f^{(k)}(x)$ не имеет вещественных корней в промежутке (a, b), то ее следует принять за последнюю функцию ряда (**).

В виду последнего следует всякий раз, как три последовательны функции $f^{(k-1)}(x)$, $f^{(k)}(x)$, $f^{(k+1)}(x)$ ряда (**) обнаруживаю в начале промежутка одни перемены, а в конце промежутка одни постоянства знак причем $f^{(k+1)}(x)$ не имеет вещественных корней в промежутке (a, b), испытать, пользуясь критерием пункта 3, имеет ли функция $f^{(k-1)}(x)$ вещественные корни в промежутке (a, b).

Вычислять частные значения функций ряда (**) следует по правилу Горнера.

Задачи

71. Отделить корни уравнения

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - x + 2 = 0$$

Решение. Определив верхнюю и нижнюю границу корней уравнения, не трудно убедиться, что все корни лежат в промежутке $(-1, +1)$.

Прежде чем приступать к дальнейшим вычислениям, посмотрим, нельзя ли функцию $f'''(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2x + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6(10x^2 - 4x + 1)$ взять за последнюю функцию ряда (**).

Корни этой функции, что видно из неравенства $2^2 - 10 < 0$, мнимы, и ее действительно можно принять за последнюю функцию ряда (**).

Дальнейшие вычисления располагаем, как показано в прилагаемой схеме.

	1,	−1,	1,	−1,	−1,	2
1	1,	0,	1,	0,	−1,	1
	1,	1,	2,	2,	1	
	1,	2,	4,	6		
−1	1,	−2,	3,	−4,	3,	−1
0,5	1,	−0,5,	0,75,	−0,625,	−1,312,	1,343
	1,	0,	0,75,	−0,25,	−1,187	
	1,	0,5,	1,	0,25		

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
1	+	+	+	+
0,5	+	—	+	+
0	+	—	—	+
— 1	—	+	—	+

Сначала вычисляем значения функций ряда (**) при $x = 1$. Затем числяем их значения при $x = -1$. При вычислении первой строки оказалось, что знаки чисел, в ней стоящих, образуют одни перемены. Дальнейшие вычисления прекращаем, так как в этом случае в ряду $f(-1)$, $f'(-1)$, $f''(-1)$, $f'''(-1)$ должны оказаться одни перемены знака.

Разность $v(-1) - v(1) = 3$.

Делим промежуток, вставляя число 0.

Знаки функций $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ определяются без всяких вычислений по коэфициентам уравнения, ибо

$$f(0) = 2,\ f'(0) = -1,\ \frac{1}{1 \cdot 2} f''(0) = -1,\ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) = 1$$

Для промежутка $(-1, 0)$ разность $v(-1) - v(0) = 1$

В этом промежутке содержится один корень уравнения.

Для промежутка $(0, 1)$ разность $v(0) - v(1) = 2$

Дробим промежуток, вставляя число 0,5.

Для промежутка $(0, 0, 5)$ разность $v(0) - v(0,5) = 0$ Промежуток пустой.

В промежутке $(0,5, 1)$ разность $v(0,5) - v(1) = 2$, но на одной границе промежутка ряд функций $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ обнаруживает только постоянства, а на другой границе — только перемены знака.

Функция $f''(x)$ не имеет корней в промежутке.

Произведем испытание, имеет ли функция $f(x)$ корни в рассматриваемом промежутке:

$$\left| \frac{f(1)}{f'(1)} \right| + \left| \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} \right| = 1 + \frac{1,343}{1,187} > 1 - 0,5.$$

Функция $f(x)$ не имеет корней в промежутке $(0,5, 1)$.

Предложенное уравнение имеет только один вещественный корень. Этот корень содержится в промежутке $(-1, 0)$.

72. Отделить корни уравнения

$$x^5 + 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0.$$

Решение. Корни уравнения содержатся в промежутке $(-8, 2)$.

Функция

$$f'''(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x - 16 \cdot 3 \cdot 2 = 12\ (5x^2 + 10x - 8)$$

имеет вещественные корни.

Производим вычисления, как показано ниже.

	1,	5,	— 16,	12,	— 9,	— 5
2	1,	7,	— 2,	8,	7,	9
	1,	9,	16,	40,	87	
— 8	1,	— 3,	8,	— 52,	407,	— 3261
— 4	1,	1,	— 20,	92,	— 377,	1503
1	1,	6,	— 10,	2,	— 7,	— 12
	1,	7,	— 3,	— 1,	— 8	
	1,	8,	5,	4		
	1,	9,	14			

0,5	1,	5,5,	— 13,25,	5,375,	— 6,3125, —
	1,	6,	— 10,25,	0,25,	— 6,1875
	1,	6,5,	— 7,	— 3,25	
	1,	7,	— 3,5		

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$	$f^{V}(x)$
2	+	+	+	+	+	+
1	—	—	+	+	+	+
0,5	—	—	—	—	+	+
0	—	—	+	—	+	+
— 4	+					
— 8	—	+	—	+	—	+

Испытания:

$$\left|\frac{f''(1)}{f'''(1)}\right| + \left|\frac{f''(0)}{f'''(0)}\right| = \frac{2\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 14} + \frac{2\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 16} = \frac{2}{21} + \frac{1}{4} < 1$$

$$\left|\frac{f'(0,5)}{f''(0,5)}\right| + \left|\frac{f'(0)}{f''(0)}\right| = \frac{+6,1875}{2\cdot 3,25} + \frac{9}{2\cdot 12} > 0,9 > 0,5$$

Разность $v(-8) - v(2) = 5$.

Дробим промежуток $(-8, 2)$, вставляя число 0.

Разность $v(-8) - v(0) = 2$.

Дробим промежуток $(-8, 0)$, вставляя -4.

Вычисляя $f(-4)$, находим, что $f(-4)$ по знаку противоположна (0) и $f(-8)$.

Так как промежуток $(-8, 0)$ содержит не больше двух корней уравнения, а в каждом из промежутков $(-8, -4)$, $(-4, 0)$ находится по мере один корень уравнения, то следует заключить, что в промежутках $-8, -4)$, $(-4, 0)$ содержится по одному корню.

Вычисление значений остальных членов ряда (**) при $x = -4$ излишним.

Разность $v(0) - v(2) = 3$.

Вставляем число 1, дробя промежуток $(0, 2)$.

Заметим здесь, что испытание функций $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{V}(x)$, представляющих при $x = 2$ одни постоянства, а при $x = 0$ одни перемены знака, не дает возможности сократить ряд (**). Мы это испытание здесь опустим,

Разность $v(1) - v(2) = 1$.

Промежуток $(1, 2)$ содержит корень уравнения.

Разность $v(0) - v(1) = 2$.

Испытываем функцию $f''(x)$.

Испытание ничего не дает.

Дробим промежуток, вставляя 0,5.

Разность $v(0{,}5) - v(1) = 0$.

Промежуток $(0{,}5, 1)$ пустой.

Разность $v(0) - v(0{,}5) = 2$.

Испытываем функцию $f'(x)$.

Испытание обнаруживает, что функция $f'(x)$ не имеет корней в промежутке $(0, 0{,}5)$. Ее можно взять за последнюю функцию ряда (**) для промежутка $(0, 0{,}5)$.

Ряд $f(x)$, $f'(x)$ при $x = 0$ и при $x = 0{,}5$ дает одни постоянства знака.

Разность $v'(0) - v'(0, 5)$, где $v'(x)$ обозначает число перемен знака в ряду $f(x)$, $f'(x)$ равна нулю.

Промежуток $(0, 0{,}5)$ пустой.

Предложенное уравнение имеет три вещественных корня, заключенных в промежутках $(-8, -4)$, $(-4, 0)$, $(1, 2)$.

Отделить корни уравнения.

73. $x^5 - 3x^4 + 24x^3 + 90x^2 - 46x - 100 = 0$.

74. $x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x + 2 = 0$.

75. $x^8 + 10x^2 + x - 4 = 0$.

76. $x^6 - 3x^2 - x + 1 = 0$.

77. $x^3 - 18x^2 + 2x - 7 = 0$.

78. $x^5 + x^4 + x^3 - 25x + 30 = 0$.

79. $x^4 + 9x^2 + 31x - 32 = 0$.

80. $x^4 - 4x^3 + x + 4 = 0$.

81. $x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0$.

82. $x^3 - 1{,}5x^2 + 0{,}6x - 0{,}05 = 0$.

83. $x^6 + 2x^5 + x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 4x - 2 = 0.$

84. $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0.$

85. $2x^6 - 9x^4 + 8x^3 + 1 = 0.$

86. $4x^6 - 11x^4 - 13x^2 - 8x + 17 = 0.$

87. $5x^6 - 30x^5 + 20x^3 - x^2 + 3x + 15 = 0.$

88. Разности между числом перемен знака в ряду

$$f(x),\ f'(x), \ldots f_m(x)$$

в начале и в конце промежутков (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots (a_k, b_k)$, где

$$a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_k < b_k,$$

меньше числа вещественных корней $s_1, s_2, \ldots s_k$ функции $f(x)$, заключен в каждом из этих промежутков, на величины $2h_1$, $2h_2, \ldots 2h_k$ соответственно.

Показать, что число $2i$ мнимых корней $f(x)$ не меньше, чем

$$2h_1 + 2h_2 + \ldots + 2h_k.$$

ОТДЕЛ XI

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ

§ 1. Вычисление корней при помощи конечных разностей.

1. Если в промежутке (a, b) содержится один простой корень уравнения $f(x) = 0$, то для получения более тесных границ, в которых содержится корень, следует дробить промежуток (a, b).

В том случае, когда между a и b содержатся целые числа, лучше всего дробить промежуток, вставляя эти числа. Тот промежуток, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки, содержит корень уравнения.

2. Вычисление частных значений функции $f(x)$ производится следующим образом.

Непосредственно вычисляются $n + 1$ значение $f(x)$, если эта функция имеет степень n.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	. . . . .	$\Delta^n f(x)$
a	u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	. . . . .	$\Delta^n u_0$
$a + h$	u_1	Δu_1	$\Delta^2 u_1$	. . . . .	$\Delta^n u_0$
$a + 2h$	u_2	Δu_2	$\Delta^2 u_2$	. . . . .	$\Delta^n u_0$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
$a + mh$	u_m	Δu_m	$\Delta^2 u_m$	. . . . .	$\Delta^n u_0$

Обыкновенно вычисляются значения u_0, $u_1, \ldots u_{n+1}$ для равноотстоящих аргумента $x = a$, $a + h_1, \ldots a + nh$. Затем составляются разности

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1; \quad \Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1}.$$

По этим разностям новые разности

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0, \quad \ldots \quad \Delta^2 u_{n-2} = \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2} \text{ и т. д.}$$

Наконец вычисляется разность

$$\Delta^n u_0 = \Delta^{n-1} u_1 - \Delta^{n-1} u_0$$

Эта последняя разность является для функции степени n постоянной в том смысле, что

$$\Delta^n u_0 = \Delta^n u_1 = \ldots = \Delta^n u_m = \ldots$$

На этом основании с помощью одного сложения определяются

$$\Delta^{n-1} u_2 = \Delta^{n-1} u_1 + \Delta^n u_1; \quad \Delta^{n-2} u_0 = \Delta^{n-2} u_2 +$$
$$+ \Delta^{n-1} u_2 \ldots u_{n+1} = u_n + \Delta u_n \text{ и т. д.}$$

Результат записывается в виде приводимой здесь таблицы.

3. При разделении промежутка h на части и составлении новой таблицы, соответствующей приращению аргумента x на величину $h' = \frac{h}{M}$, новые разности $\delta^s u_k$ определяются по формулам:

$$\delta^s u_k = \frac{\Delta^s k(k-M)\ldots[k-(s-1)M]}{s!\ M^s} \cdot \Delta^n u_0 + \ldots$$
$$+ \frac{\Delta^s k(k-M)\ldots[k-(n-1)M]}{n!\ M^n} \Delta^h u_0 \text{ [1]}.$$

По этим формулам достаточно вычислять δu_0, $\delta^2 u_0 \ldots \delta^n u_0$. Дальнейшие вычисления разностей $\delta^s u_k$ проще производить, как указано в п. 2.

Значения A_{se} разностей $\frac{1}{s! \cdot 10^s} \Delta^s k(k-10)\ldots[k-(l-1)\ 10]$ при $k = 0$ даются для значений $s \leqq 6$ и значений $l \leqq 5$ в приводимой таблице так, что число A_{se} находится в столбце с номером s и строчке с номером l этой таблицы.

	1	2	3	4	5	6
1	0,1	0	0	0	0	0
2	— 0,045	0,01	0	0	0	0
3	0,0285	— 0,009	0,001	0	0	0
4	— 0,0206625	0,007725	— 0,00135	0,0001	0	0
5	0,01611675	— 0,0066975	0,0014625	— 0,00018	0,00001	0

[1]) Разности $\Delta^s k(k-M)\ldots[k-(s-1)M]$ соответствуют увеличению аргумента k на единицу.

1. Вычислить с точностью до 0,01 корни уравнения

$$x^3 + 5x + 101 = 0.$$

Решение. Предложенное уравнение имеет только один веществ корень. Этот корень отрицательный и лежит в промежутке $-4, -5$

Разделим промежуток на 10 равных частей.

Вычислим непосредственно, пользуясь правилом Горнера, значения члена $f(x)$, стоящего в левой части уравнения, при x равном -5, $-4{,}8$, $-4{,}7$.

	1	0	5	101
-5	1	-5	30	-49
$-4{,}9$	1	$-4{,}9$	29,01	$-41{,}149$
$-4{,}8$	1	$-4{,}8$	28,04	$-33{,}592$
$-4{,}7$	1	$-4{,}7$	27,09	$-26{,}323$

Пользуясь вычисленными значениями многочлена, составим таблицу значений для изменения аргумента на 0,1 в промежутке $(-5, -4)$.

В промежутке $(-4{,}3, -4{,}2)$ многочлен $f(x)$ меняет свой знак.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
-5	-49	7,851	$-0{,}294$	0,006
$-4{,}9$	$-41{,}149$	7,557	$-0{,}288$	0,006
$-4{,}8$	$-33{,}592$	7,269	$-0{,}282$	0,006
$-4{,}7$	$-26{,}323$	6,987	$-0{,}276$	0,006
$-4{,}6$	$-19{,}336$	6,711	$-0{,}270$	0,006
$-4{,}5$	$-12{,}625$	6,441	$-0{,}264$	0,006
$-4{,}4$	$-6{,}184$	6,177	$-0{,}258$	0,006
$-4{,}3$	$-0{,}007$	5,919	$-0{,}252$	0,006
$-4{,}2$	5,912			

Корень уравнения лежит между $-4{,}3$ и $-4{,}2$, поэтому продолжать таблицу далее нет никакого смысла.

Делим промежуток $(-4{,}3, -4{,}2)$ на десять равных частей.

Вычислим значение $\delta^s u_0$, принимая за начальное значение аргумента $-4{,}3$ и изменяя аргумент на 0,01.

Вычисляя новые разности, ограничимся первыми четырьмя знаками.

Согласно формулам пункта 3 получаем:

$$\begin{array}{rcl} 0{,}1 & \times\ 5{,}919 & = 0{,}5919 \\ 0{,}045 & \times\ 0{,}252 & = 0{,}0113 \\ 0{,}0285 & \times\ 0{,}006 & = 9{,}0002 \\ \hline & \delta u_0 & = 0{,}6034 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 0{,}01 & \times\ (-0{,}252) & = -0{,}0025 \\ -0{,}009 & \times\ \ 0{,}006 & = -0{,}0001 \\ \hline & \delta^2 u_0 & = -0{,}0026 \\ & \delta^3 u_0 & = 0{,}001 \times 0{,}006 = 0{,}0000. \end{array}$$

Новая таблица показывает, что корень уравнения заключается в промежутке (—4,3, —4,29).

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
— 4,3	— 0,007	0,6034	— 0,0026	0,0000
— 4,29	0,5964	0,6008	— 0,0026	0,0000

Вычислить с точностью до 0,01 положительный корень уравнения:

2. $2x^3 - 8{,}5x^2 - 0{,}85x - 0{,}087 = 0$

3. $4x^3 - 13x^2 - 31x - 275 = 0.$

4. $20x^3 - 121x^2 - 121x - 141 = 0.$

5. $x^3 + x^2 + x - 100 = 0.$

6. Вычислить с точностью до 0,01 корень уравнения

$$x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0,$$

лежащий между 9 и 10.

7. Вычислить положительные корни уравнения

$$x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = 0$$

с точностью до 0,001.

8. Вычислить корни уравнения

$$x^3 - 39x^2 + 268x + 1301 = 0,$$

лежащие в промежутке (10, 20), с точностью до 0,001.

9. Вычислить корень уравнения

$$x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0,$$

лежащий в промежутке (2, 3), с точностью до 0,001.

10. Вычислить корни уравнения

$$20x^3 - 24x^2 + 3 = 0$$

с точностью до 0,001.

11. Вычислить корни уравнения

$$x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

с точностью до 0,001.

12. Вычислить отрицательный корень уравнения

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0,$$

заключенный в промежутке $(-1, 0)$ с точностью до 0,001.

§ 2. Способ Ньютона.

Если в промежутке (a, b) содержится один корень уравнения

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

и x_0 есть его приближенное значение, то число

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

представляет лучшее приближение, чем x_0, коль скоро $f''(x_0)$ и между x_0 и корнем уравнения не содержится корней производных $f'(x)$ и $f''(x)$.

2. Погрешность второго приближения $\Delta_1 = x_1 - \xi$, где ξ есть простой корень уравнения, лежащий в промежутке (a, b), связана с погрешностью $\Delta_0 = x_0 - \xi$ первого приближения неравенством

$$\Delta_1 < \Delta_0^2 \cdot \frac{M}{2m},$$

где M есть наибольшее по численной величине значение $f''(x)$ в промежутке (a, b) и m есть наименьшее по абсолютной величине значение первой производной в промежутке (a, b).

3. Если ξ есть корень кратности k, то

$$\Delta_1 < \Delta_0 \cdot \frac{k-1}{k}(1 + \Delta_0 \cdot P), \qquad P = \frac{M}{(k-1)m}$$

где M есть наибольшее по абсолютной величине значение $f^{(k+1)}(x)$ в промежутке (a, b), а m есть наименьшее по абсолютной величине значение $f^k(x)$ в промежутке (a, b).

4. Второе приближение x_1 удовлетворяет неравенству $f(x_1) \cdot f''(x_1) > 0$, если первое приближение удовлетворяет условиям п. 1.

5. Если первое приближение x_0 удовлетворяет условиям п. 1, то пределом последовательности $x_0, x_1 \ldots x_n, \ldots$, где

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

является корень ξ.

Задачи.

13. Вычислить с точностью до 0,00001 положительный корень, уравнения

$$x^3 + x^2 + x - 100 = 0$$

Решение. Уравнение имеет один положительный корень, заключенный в промежутке (4, 5). Число 5 есть верхняя граница положительных корней. Произведения $f(5) \cdot f''(5) > 0$ и 5 можно взять за первое приближение. Дальнейшие вычисления расположим по схеме.

Первое приближение:

$$x_0 = 5.$$

Погрешность $\Delta < 1$.

$$M = 3 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 32, \quad m = 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = 57.$$

Второе приближение:

	1	1	1	—100
5	1	6	31	55
	1	11	86	

$$x_1 = 5 - \frac{55}{86} = 5 - 0{,}63\ldots = 4{,}37\ldots$$

Погрешность: $\Delta_1 < \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{57} \cdot 1^2 < 0{,}3$.

Так как первый знак x_1 не может быть точен, то за второе приближение примем $x_1 = 4{,}4$. Погрешность Δ_1 этого приближения не больше 0,4.

Третье приближение:

$$\Delta_2 < 0{,}3 \cdot (0{,}4)^2 = 0{,}048$$

	1,	1,	1,	—100
4,4	1,	5,4,	24,76,	8944
	1,	9,8,	67,88,	

$$x_2 = 4{,}4 - \frac{8{,}944}{67{,}88} = 4{,}4 - 0{,}13\ldots = 4{,}27\ldots$$

Примем: $\underline{x_2 = 4{,}27}$

Погрешность $\Delta_2 < 0{,}06$.

Четвертое приближение:

$$\Delta_3 < 0{,}3 \cdot (0{,}06)^2 = 0{,}00108$$

	1,	1,	1,	—100
4,27	1,	5,27,	23,5029,	0,3573.
	1,	9,54,	64,2387,	

$$x_3 = 4{,}27 - \frac{0{,}3573}{64{,}2387} = 4{,}27 - 0{,}0055\ldots$$

Принимаем: $\underline{x_3 = 4{,}265}$

Погрешность $\Delta_3 < 0{,}002$.

Пятое приближение:

$$\Delta_4 < 0{,}3 \cdot (0{,}002)^2 = 0{,}0000012$$

	1,	1,	1,	—100
4,265	1,	5,265,	23,4552...,	0,03557
	1,	9,530,	64,1006	

$$x_4 = 4{,}265 - \frac{0{,}03557}{64{,}1006} = 4{,}265 - 0{,}000055\ldots$$

$$\underline{x_4 = 4{,}26494}$$

$$\Delta_4 < 0{,}000007.$$

Число последовательных приближений, необходимых для достижения желаемой степени точности, можно значительно сократить, взяв за первое приближение более точное значение корня.

Однако разыскание такого приближенного значения само по себе представляется достаточно трудным, и часто предпочтительнее сделать несколько последовательных приближений, нежели находить более совершенное значение корня интерполированием.

14. Вычислить с точностью до 0,00001 корень уравнения

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0,$$

расположенный в промежутке (0, 1).

15. Вычислить с точностью до 0,00001 положительный корень уравнения

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

16. Вычислить с точностью до 0,00001 корень уравнения

$$4x^3 - 180x^2 + 1896x - 457 = 0.$$

заключающийся между 20 и 30.

17. Вычислить с точностью до 0,00001 корни уравнения

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0.$$

18. Вычислить с точностью до 0,00001 корни уравнения

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 11\,723x + 28\,659 = 0.$$

19. Вычислить с точностью до 0,000001 положительный корень уравнения

$$x^3 - 6x - 13 = 0.$$

20. Вычислить с точностью до 0,000001 корень уравнения

$$x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$$

заключенный в промежутке (2, 3).

21. Вычислить с точностью до 0,0001 корень уравнения

$$x^5 - 8x - 1 = 0$$

22. Вычислить с точностью до 0,00001 корни уравнения

$$20x^5 - 4x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 3x + 3 = 0.$$

23. Вычислить с точностью до 0,00001 корни уравнения

$$x^6 - 5x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 17x + 5 = 0.$$

§ 3. Способ Коши.

1. Если в промежутке (a, b) содержится один корень уравнения

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

то числа

$$a_1 = a + \frac{|f(a)|}{M}, \quad b_1 = b - \frac{|f(b)|}{M}; \quad M \geqq |f'(x)| \text{ при } a \leqq x \leqq b$$

содержат между собою корень уравнения и представляют к нему лучшие приближения, чем границы промежутка.

За приближенное значение корня можно принять число $\frac{1}{2}(a_1 + b_1)$.

Погрешность приближения меньше $\frac{1}{2}(b_1 - a_1)$.

2. Правило выбора M.

Если $0 \leqq a < b$, то представив функцию $f'(x)$ в виде

$$f'(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть многочлены с положительными коэфициентами, можно принять M равным наибольшему из чисел $|\varphi(a) - \psi(b)|$, $|\varphi(b) - \psi(a)|$.

Если $a < b \leqq 0$, то, представив $f'(x)$ в виде

$$f'(-x) = \varphi_1(x) - \psi_1(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ суть многочлены с вещественными коэфициентами, можно принять M равным наибольшему из чисел $|\psi_1(|a|) - \varphi_1(|b|)|$, $|\psi_1(|b|) - \varphi_1(|a|)|$.

Если $a \leqq 0 \leqq b$, то за M можно принять наибольшее из чисел M_1 и M_2, где

$$M_1 \geqq f'(x) \text{ при } a \leqq x \leqq 0 \text{ и } M_2 \geqq f'(x) \text{ при } 0 \leqq x \leqq b.$$

3. Способ Коши дает сходимость более медленную, чем способ Ньютона, но зато он приложим в тех случаях, когда способ Ньютона не имеет места. Его выгодно применять для нахождения первых приближений — с целью сузить пределы и сделать возможным ведение дальнейших вычислений по способу Ньютона.

Задачи.

24. Вычислить с точностью до 0,0001 корень уравнения

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0,$$

лежащий в промежутке (0, 1).

Решение. Функция $f''(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2x - 2 \cdot 1 = 2\ (6x^2 + 6x - 1)$ имеет корень в промежутке (0, 1).

Способ Ньютона к этому промежутку неприложим.

Функция $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 4$, в чем легко убедиться с помощью правила Лагера, не имеет корней в промежутке (0, 1).

Способ Коши может быть приложен.

Число M можно взять равным наибольшему из чисел

$$|4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 1| = 2, \quad |4 + 6 + 4 - 2 \cdot 0| = 14.$$

$$M = 14.$$

Первое приближение:

	1,	2,	—1,	4,	—1
1	1,	3,	2,	6,	5.

$$a_1 = 0 + \frac{1}{14} = 0{,}07\ldots \qquad a_1 = 0$$

$$b_1 = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14} = 0{,}6\ldots \qquad b_1 = 0{,}6$$

$$M_1 = 14.$$

Второе приближение:

	1,	2,	—1,	4,	—1
0,6	1,	2,6,	0,56,	4,336,	1,6016
	1,	3,2,	2,48,	5,824	

$$a_2 = 0 + \frac{1}{7{,}024} = 0{,}14\ldots$$

$$b_2 = 0{,}6 - \frac{1{,}6016}{7{,}024} = 0{,}6 - 0{,}2\ldots$$

$$a_2 = 0{,}1, \qquad b_2 = 0{,}4.$$

Число M_2 можно взять равным:

$$4 \cdot (0{,}6)^3 + 6 \cdot (0{,}6)^2 + 4 = 5{,}824 + 2 \cdot 0{,}6 = 7{,}024.$$

Третье приближение:

	1,	2,	—1,	4,	—1
0,4	1,	2,4,	—0,04,	3,984,	0,5936
	1,	2,8,	1,08,	4,412	
0,1	1,	2,1,	—0,79,	3,921,	—0,6079

$$a_3 = 0{,}1 + \frac{0{,}6079}{5{,}1} = 0{,}1 + 0{,}11\ldots$$

$$b_3 = 0{,}4 - \frac{0{,}5936}{5{,}1} = 0{,}4 - 0{,}11\ldots$$

$$a_3 = 0{,}2. \qquad b_3 = 0{,}3.$$

Число M_3 взято равным

$$5{,}1 > 4 \cdot (0{,}4)^3 + 6 \cdot (0{,}4)^2 + 4 - 2 \cdot 0{,}1 = f'(0{,}4) + 2 \cdot 0{,}4 - 0{,}2 = \\ = 4{,}412 + 0{,}6 = 5{,}012.$$

Четвертое приближение:

	1,	2,	—1,	4,	— 1
0.3	1,	2,3,	— 0,31,	3,907,	0,1721
0.2	1,	2,2,	— 0,56,	3,888,	— 0,2224

$$a_4 = 0{,}2 + \frac{0{,}2224}{4{,}3} = 0{,}2 + 0{,}050\ldots$$

$$b_4 = 0{,}3 - \frac{0{,}1721}{4{,}3} = 0{,}3 - 0{,}040\ldots$$

$$\underline{a_4 = 0{,}25,} \quad \underline{b_4 = 0{,}26.}$$

Число $M_4 = 4{,}3 > 4 \cdot (0{,}3)^3 + 6 \cdot (0{,}3)^2 + 4 - 2 \cdot 0{,}2 = 4{,}248$

Пятое приближение:

	1,	2,	— 1,	4	— 1
0,26	1,	2,26,	— 0,4124,	3,8927 . . . ,	0,0121 . .
0,25	1,	2,25,	— 0,4375,	3,8906 . . . ,	— 0,0273 . .

$$a_5 = 0{,}25 + \frac{0{,}0273}{4} = 0{,}25 + 0{,}0068\ldots$$

$$b_5 = 0{,}26 - \frac{0{,}0121}{4} = 0{,}26 - 0{,}0030\ldots$$

$$\underline{a_5 = 0{,}256,} \quad \underline{b_5 = 0{,}257.}$$

$$.M_5 = 4 > 4\,(0{,}26)^3 + 6 \cdot (0{,}26)^2 + 4 - 2 \cdot (0{,}25).$$

Шестое приближение:

	1,	2,	— 1,	4,	— 1
0,257	1,	2,257,	— 0,4200 . . . ,	3,8921 . . . ,	0,00027 .
0,256	1,	2,256,	— 0,4225 . . . ,	3,8918 . . . ,	— 0,0037 .

$$a_6 = 0{,}256 + \frac{0{,}0037}{4} = 0{,}2569\ldots$$

$$b_6 = 0{,}257 - \frac{0{,}00027}{4} = 0{,}257 - 0{,}00007$$

$$\underline{a_6 = 0{,}25690} \qquad \underline{b_6 = 0{,}25693.}$$

$$M_6 = 4.$$

За приближенное значение корня можно принять 0,2569 с точностью до 0,0001.

25. Вычислить с точностью до 0,001 корни уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 6x + 1 = 0.$$

26. Вычислить с точностью до 0,001 корни уравнения

$$x^3 - 3x - 4x + 23 = 0.$$

27. Вычислить положительный корень уравнения

$$7x^4 + 20x^3 + 3x^2 - 16x - 8 = 0$$

с точностью до 0,001.

28. Вычислить положительный корень уравнения

$$14x^3 + 12x^2 - 9x - 10 = 0$$

с точностью до 0,001.

29. Вычислить корни уравнения

$$x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$$

с точностью до 0,001.

30. Вычислить корни уравнения

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 11 = 0$$

с точностью до 0,0001.

31. Вычислить корни уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 6x + 9 = 0$$

с точностью до 0,0001.

32. Вычислить положительный корень уравнения

$$x^5 + 12x^4 + 59x^3 + 150x^2 + 201x - 207 = 0$$

с точностью до 0,0001.

33. Вычислить положительный корень уравнения

$$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 3x - 8 = 0$$

с точностью до 0,0001.

34. Вычислить корни уравнения

$$x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x + 4 = 0$$

с точностью до 0,0001.

35*. Уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет несколько корней в промежутке $(a < b)$. Последовательности

$$a_0 = a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m,\ \ldots; \qquad b_0 = b,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_m, \ldots$$

составлены согласно закону

$$a_{m+1} = a_m + \frac{|f(a_m)|}{M}. \qquad b_{m+1} = b_m - \frac{|f(b_m)|}{M},$$

где $f(x)$ обозначает левую часть уравнения и $M \geqq |f'(x)|$ при $a \leqq x \leqq b$.

Найти пределы последовательностей.

Что можно сказать об этих пределах в том случае, когда уравнение только один корень в промежутке (a, b)?

36*. Уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет один корень в (a, b) и $|f'(x)| \geqq m$ при $a \leqq x \leqq b$. Определить верхнюю границу погрешности k-ого приближения по способу Коши.

37*. Уравнение $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет один α в промежутке (a, b).

Функция $f'(x)$ 0, $f''(x)$ 0 при $a \leqq x \leqq b$.

Найти M и показать, что одно из приближений, построенных по способу Коши, обращается в ньютоновское.

38*. Функция $f(x)$ имеет в промежутке (a, b) корень α кратности > 1. Функции $f'(x)$ и $f''(x)$ не имеют других корней, кроме α, в (a, b).

Что дает способ Коши для этого случая?

§ 4. Правило ложного положения.

1. Если в промежутке (a, b) заключается один корень функции $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ и притом нечетной кратности, то за приближенное значение его можно принять число

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

2. Если функция $f''(x)$ не обращается в нуль в промежутке (a, b), то новое приближение удовлетворяет неравенству $f(c) \cdot f''(c) < 0$ и y_I лежит по другую сторону от корня, чем приближенное значение, получаемое по способу Ньютона.

3. Приближенное вычисление корня с помощью правила двойного ложного положения весьма выгодно соединять с приближенным вычислением корня по способу Ньютона. Вычисляемый корень заключается между приближенными значениями, получаемыми по тому и другому способу.

Задачи.

39. Вычислить наибольший корень уравнения

$$x^4 - 4x^3 + 4x + 4 = 0$$

с точностью до 0,00001.

Решение. Наибольший корень уравнения заключается между 4 и 3.

Функция $f''(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2x$ остается положительной в этом промежутке.

Приближения, получаемые по правилу двойного ложного положения, меньше вычисляемого корня.

Вычисления располагаем по ниже приложенной схеме, соединяя приближения по способу Ньютона с приближениями по правилу двойного ложного положения.

Первое приближение:

	1,	—4,	0,	4,	4	$f(4) = 20$
4	1,	0,	0,	4,	20	$f'(4) = 68$
	1,	4,	16,	68,		$f(3) = -11$
3	1,	—1,	—3,	—5,	—11	

$$a_1 = \frac{3 \cdot 20 - (-11) \cdot 4}{20 + 11} = \frac{104}{31} = 3{,}35\,.$$

$$b_1 = 4 - \frac{20}{68} = 4 - 0{,}29 = 3{,}71\,..$$

Корень лежит между 3,35 ... и 3,71 ..

Принимаем: $a_1 = 3{,}3$, $b_1 = 3{,}7$.

Второе приближение:

	1,	—4	0	4	4
3,7	1,	—0,3,	—1,11,	—0,107,	3,6041
	1,	3,4,	11,47,	42,332	
3,3	1,	—0,7,	—2,31,	—3,623,	—7,9559

$$a_2 = \frac{3{,}3 \cdot 3{,}6041 - 3{,}7 \cdot (-7{,}9559)}{7{,}9559 + 3{,}6041} = 3{,}575\ldots$$

$$b_2 = 3{,}7 - \frac{3{,}6041}{42{,}332} = 3{,}7 - 0{,}0851\ldots = 3{,}614\ldots$$

Принимаем: $a_2 = 3{,}57$, $b_2 = 3{,}62$.

Третье приближение:

	1,	—4	0	4	4
3,62	1,	—0,38,	—1,3756,	—0,979672,	0,453587 .
	1,	3,24,	11,7288,	36,498912,	
3,57	1,	—0,43,	—1,5351,	—1,480307,	—1,284696 .

$$a_2 = \frac{3{,}57 \cdot 0{,}453587 - 3{,}62\,(-1{,}284696)}{0{,}453587 + 1{,}284696} = \frac{6{,}269930}{1{,}738283} = 3{,}6069\ldots$$

$$b_2 = 3{,}62 - \frac{0{,}453587}{36{,}498912} = 3{,}62 - 0{,}012427 = 3{,}607573\ldots$$

$$a_3 = 3{,}606, \qquad b_3 = 3{,}608.$$

Четвертое приближение:

	1,	—4	0	4	4
3,608	1,	—0,392,	—1,414336,	—1,102924...	0,020649
	1,	3,216,	10,188992,	35,658959...	
3,606	1,	—0,394,	—1,420764,	—1,123275...	0,050530

$$a_4 = \frac{3{,}606 \cdot 0{,}020649 - 3{,}608\,(-0{,}050530)}{0{,}020649 + 0{,}050530} = \frac{0{,}2567725\ldots}{0{,}071179} = 3{,}607419\ldots$$

$$b_4 = 3{,}608 - \frac{0{,}020650}{35{,}65896} = 3{,}608 - 0{,}000579 = 3{,}607421\ldots$$

$$a_4 = 3{,}60741, \qquad b_4 = 3{,}60742.$$

Искомый корень можно принять равным 3,60742 с точностью до 0,00001.

40. Вычислить положительный корень уравнения

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

с точностью до 0,00001.

41. Вычислить корни уравнения

$$x^4 - 12x + 7 = 0$$

с точностью до 0,00001.

42. Вычислить положительный корень уравнения

$$x^3 + 24{,}84x^2 - 67{,}613x - 3761{,}2758 = 0$$

с точностью до 0,00001.

43. Вычислить отрицательный корень уравнения

$$x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$$

с точностью до 0,00001.

44. Вычислить корни уравнения

$$x^3 + 4{,}8x^2 + 7{,}2x + 3{,}35 = 0$$

с точностью до 0,00001.

45. Вычислить с точностью до 0,00001 корни уравнения

$$x^5 + 14x^4 + 71x^3 + 101x^2 + 86x - 57 = 0.$$

46. Вычислить наибольший корень уравнения

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 4x - 11 = 0$$

с точностью до 0,00001.

47. Вычислить корни уравнения

$$x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$$

с точностью до 0,00001.

48. Вычислить корни уравнения

$$x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 7x^2 + 2x + 4 = 0$$

с точностью до 0,00001.

49*. Функция $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет один в промежутке (a, b).

Функции $f'(x)$ и $f''(x)$ не обращаются в нуль при $a \leqq x \leqq b$.

Найти предел последовательности $x_0 = b, x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$ составной согласно закону

$$x_{k+1} = \frac{a f(x_k) - x_k f(a)}{f(x_k) - f(a)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots m \ldots$$

если $f(a) \cdot f''(a) > 0$.

50*. Положив $\Delta_k = |x_k - \alpha,|$ где x_k обозначает число последовательности $x_0, x_1, \ldots x_m, \ldots$ предыдущей задачи, а α — корень функции $f(x)$, что

$$\Delta_k < \Delta_{k-1} \cdot \frac{M}{m}(b - a),$$

где M есть наибольшее значение $|f''(x)|$ в промежутке (a, b), а m наименьшее значение $|f'(x)|$ в том же промежутке.

51*. Функция $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет один корень промежутке (a, b). Функции $f'(x), f''(x)$ не имеют корней в этом промежутке и $f(a) \cdot f''(a) > 0$.

Показать, что числа

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad b_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

удовлетворяют неравенству

$$b_1 - a_1 < \frac{M}{2f'(a)}(b - a)^2.$$

52*. Показать, что функция $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет корень α в промежутке $(a, a + 1)$ и что число $a + h$, где

$$h = \frac{m - f(a)}{f(a+1) - f(a)}$$

представляет более лучшее приближение к корню, нежели одна из границ, если

$$f(a) < m < f(a + 1).$$

Как расположено число $a + h$ по отношению к корню α, если $f''(x)$ не обращается в нуль в промежутке $a, a + 1$? (Кардан.)

§ 5. Способ Горнера.

1. Способ Горнера состоит в последовательном вычислении десятичных знаков корня $x_0 = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \ldots$ функции $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ с помощью известного правила, называемого правилом Горнера.

2. После того как целая часть корня определена и между α_0 и $\alpha_0 + 1$ лежит только один корень, функция, стоящая в правой части уравнения, $(x) = 0$ преобразуется подстановкой

$$x = \alpha_0 + \frac{x_1}{10},$$

и определяется целая часть α_1 корня преобразованного уравнения, заключенного в промежутке (0, 10).

Вновь полученное уравнение преобразуется подстановкой

$$x_1 = \alpha_1 + \frac{x_2}{10},$$

и определяется целая часть α_2 корня преобразованного уравнения, лежащего в промежутке (0, 10) и т. д.

Вычисление коэфициентов преобразованного уравнения производится по правилу Горнера.

3. Определение целой части α_k корня преобразованного уравнения достигается путем деления последнего коэфициента преобразованного уравнения на предпоследний.

Число α_k берется равным целой части получаемого от деления частного.

4. Контролем правильного выбора α_k может служить следующий признак.

Если число α_k взято слишком малым, то целая часть α_{k+1} наименьшего положительного корня следующего преобразованного уравнения окажется больше или равной 10.

Если число α_k взято слишком большим, то последний коэфициент в следующем преобразованном уравнении будет противоположен по знаку последнему коэфициенту в предыдущем уравнении.

5. Вычисления можно значительно сократить, отбрасывая в коэфициентах преобразованного уравнения те цифры после запятой, которые не могут оказать влияния на выбор цифр искомого корня в пределах требуемой точности.

На практике полезно иметь в виду, что сокращение действия можно начать с того момента, как в предпоследнем коэфициенте преобразованного уравнения число значащих цифр будет одной больше, нежели число остающихся для определения цифр корня.

6. В том случае, когда уравнение имеет два или несколько корней, мало отличающихся друг от друга, так что у них несколько цифр в начале общих, действие можно производить по той же схеме, имея в виду, что контрольный признак п. 4 здесь не имеет места.

Правильность выбора общей цифры корней следует проверить дополнительным исследованием.

7. С того момента, как корни окажутся разделенными, изложенная схема решения вступает в полную силу.

Задачи.

53. Вычислить корни уравнения

$$x^5 + 4x^4 - x^3 - 29x^2 - 14x - 1 = 0$$

с точностью до 0,00001.

Решение. Уравнение имеет три вещественных корня: один в промежутке (1, 3) и два в промежутке (— 1, 0).

Вычисление первого корня.

	1,	4,	— 1,	— 29,	— 14,	— 1	
2	1,	6,	11,	— 7,	— 28,	— 57	$\alpha_0 = 1$
	1,	8,	27,	47,	66		
	1,	10,	47,	141			
	1,	12,	71				
	1,	14					
	0,00001,	0,0014,	0,071,	1,41,	6,6	— 57	
8	0,00001,	0,00148,	0,08284,	2,07272,	23,18176,	128,45408	
4	0,00001,	0,00144,	0,07676,	1,71704,	13,46816,	— 3,12736	$\alpha_1 = 4$
	0,00001,	0,00148,	0,08268,	2,04776,	21,65920		
	0,00001,	0,00152,	0,08876,	2,40280			
	0,00001,	0,00156,	0,09500				
	0.00001,	0,00160					
	0,00000,	0,00000,	0,00009,	0,02403,	2,16592,	— 3,12736	
		1	0,00009,	0,02412,	2,19004,	— 0,93732	$\alpha_2 = 1$
			0,00009,	0,02421,	2,21425		
			0,00009,	0,02430			
			0,00000,	0,00024,	0,22142,	— 0,93732	
			4	0,00024,	0,22238,	— 0,04780	$\alpha_3 = 4$
				0,00024,	0,22334		
				0,00000,	0,02233,	— 0,04780	
				2	0.02233,	— 0,00314	$\alpha_4 = 2$
					0,00223,	— 0,00314	
				1	0,00223,	— 0,00091	$\alpha_5 = 1$
					0,00022,	— 0,00091	
				4	0,00022,	— 0,00003	$\alpha_6 = 4$
					0,00002,	— 0,00003	
				1	0,00002,	— 0,00001	$\alpha_7 = 1$

Искомый корень равен:

$$x_1 = 2{,}4142141\ldots$$

Целая часть искомого корня равна 2. Преобразуем уравнение

$$x = 2 + \frac{x_1}{10}.$$

Преобразование ведем в два приема.

Сначала совершаем преобразование $x = 2 + u_1$, потом преобразование $u_1 = 0{,}1x_1$.

Коэфициенты уравнения, получаемые в результате первого преобразования, вычисляем по правилу Горнера.

Деля их по 10^5, 10^4, ... 10, 1 соответственно находим коэфициенты равнения, преобразованного посредством подстановки $x = 2 + 0{,}1x_1$. Их выписываем в строку, как показано в схеме. Для получения следующей цифры корня делим последний коэфициент **57**, взятый по абсолютной величине, на 6,6. В частном находим 8, ... Преобразуя уравнение подстановкой $x_1 = 8 + 0{,}1x_2$, находим для последнего коэфициента преобразованного уравнения 128,45408, число по знаку обратное последнему коэфициенту — 57 предыдущего уравнения. Дальше вычислений мы не продолжаем.

Число 8 слишком велико. Можно было бы последовательно испытать числа 7, 6, 5, но нетрудно заметить, что даже 5 слишком велико, так как уже

$$1{,}41 \cdot 25 + 6{,}6 \cdot 5 - 57 > 35 + 33 - 57 = 11.$$

Положим $\alpha_1 = 4$.

Преобразуем уравнение подстановкой $x_1 = 4 + 0{,}1x_2$. Для определения остаются только четыре цифры корня. Поэтому достаточно иметь коэфициенты уравнения только с 4 цифрами после запятой.

С целью дать хотя бы в начале вычислений пример несокращенного действия, поставим себе задачей вычислить первый корень с точностью до 0,000001.

В коэфициентах первого преобразованного уравнения удерживаем все знаки.

Преобразовав уравнение подстановкой $x_1 = 4 + 0{,}1x_2$, удержим в преобразованном уравнении лишь пять цифр после запятой.

Два первых коэфициента исчезают.

Делим абсолютную величину последнего коэфициента 3,12736 на предпоследний коэфициент 2,16592. Получаем $\alpha_2 = 1$.

Преобразуем уравнение подстановкой $x_2 = 1 + 0{,}1x_3$ и удерживаем в преобразованном уравнении только пять цифр после запятой.

Исчезает третий коэфициент.

Для α_3 находим значение 4 и преобразуем уравнение подстановкой $x_3 = 4 + 0{,}1x_4$.

Исчезает четвертый коэфициент, и вычисление остальных цифр корня приводится к решению уравнения

$$0{,}02233x - 0{,}04780 = 0$$

с точностью до 0,01.

Выполняя дальнейшие преобразования, находим последовательно

$$\alpha_4 = 2, \quad \alpha_5 = 1, \quad \alpha_6 = 4, \quad \alpha_7 = 1.$$

Последняя цифра может быть неверна.

Искомый корень равен 2,4142141.

Вычисление второго и третьего корня.

Переходя к вычислению отрицательных корней данного уравнения, образуем его предварительно, заменив x на $-x$.

Преобразованное уравнение имеет два корня в промежутке (0, 1).

Преобразуем его подстановкой $x = 0{,}1x_1$ и удерживаем пять после запятой.

Положив $x_1 = 1$, находим, что последний коэфициент уравнения, полученного путем преобразования $x_1 = 1 + 0{,}1x_2$, отрицателен. Это показывает что один из корней уравнения с x_1 больше, а другой меньше 1 разделились, и каждый из них уже легко вычисляется простым применени правила Горнера.

Второй корень.

	1,	— 4,	— 1,	29,	— 14,	1	$\alpha_0 = 0$
	0,00001,	— 0,0004,	— 0,001,	0,29,	— 1,4,	1	$\alpha_1 = 0$
1	0,00001,	— 0,00039,	— 0,00139,	0,28861,	— 1,11139,	— 0,11139	
0	0,00000,	0,00000,	0,00000,	0,0029,	— 0,14,	1	$\alpha_2 = 8$
			8	0,0029,	— 0,1168,	0,0656	
				0,0029,	— 0,0936		
				0,00003,	— 0,00936,	0,0656	$\alpha_3 = 7$
			7	0,00003,	— 0,00915,	0,00155	
				0,00003,	— 0,00894		
				0,00000,	— 0,00089,	0,00155	$\alpha_4 = 1$
				1	— 0,00089,	0,00066	
					— 0,00009,	0,00066	$\alpha_5 = 7$
				7	— 0,00009,	0,00003	

Искомый корень:

$$x_2 = -0{,}08717$$

корень

1,	— 4,	1,	29,	— 14,	1	$a_0 = 0$
0,00001,	— 0,0004,	— 0,001,	0,29,	— 1,4,	1	$a_1 = 4$
0,00001,	— 0,00035,	— 0,00275,	0,27625,	— 0,01875,	0,90625	
0,00001,	— 0,00036,	— 0,00244,	0,28024,	— 0,27904,	— 0,11616	
0,00001,	— 0,00032,	— 0,00372,	0,26536,	+ 0,78240		
0,00001,	— 0,00028,	— 0,00484,	0,24600			
0,00001,	— 0,00024,	— 0,00580				
0,00001,	— 0,00020					
0,000000,	0,000000,	— 0,000006,	0,00246,	0,07824,	— 0,11616	$a_2 = 1$
	1	— 0,000006,	0,002454,	0,080694,	— 0,035466	
		— 0,000006,	0,002448,	0,083142		
		— 0,000006,	0,002442			
		0,000000,	0,000024,	0,008314,	— 0,035466	$a_3 = 4$
		4	0,000024,	0,008410,	— 0,001826	
			0,000024,	0,008506		
			0,000000,	0,000851,	— 0,001826	$a_4 = 2$
			2	0,000851,	— 0,000124	
				0,000085,	— 0,000124	$a_5 = 1$
			1	0,000085,	— 0,000039	

$$x_3 = -0{,}41421.$$

54. Вычислить с точностью до 0,00001 наибольший корень уравнения:

$$x^3 - 15x^2 + 73x - 120 = 0.$$

Вычислить с точностью до 0,00001 корни уравнения:

55. $x^3 + 1{,}2x^2 - 1{,}77x - 1{,}189 = 0.$

56. $x^3 - 11{,}2x^2 + 44{,}2x - 62{,}65 = 0.$

57. $x^4 + 12x^3 + 54x^2 - 11619x + 5285 = 0.$

58. $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 44x + 47 = 0.$

59. $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 6x - 1 = 0.$

60. $20x^5 - 104x^4 + 212x^3 - 233x^2 + 149x - 41 = 0.$

61. $x^5 - x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x + 2 = 0.$

62. $x^5 - 11x^4 + 45x^3 - 86x^2 + 78x - 23 = 0.$

63. $x^6 - 8x^4 - 18x^3 + 12x^2 + 56x + 65 = 0.$

64. $x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 6x^4 + 9x^2 - x - 4 = 0.$

65. $x^6 + 2{,}8x^5 - 3{,}4x^4 - 14{,}85x^3 - 9{,}1x^2 + 3{,}85x + 3{,}35 = 0.$

66. $x^7 - 2x^5 - 17x^4 + 7x^3 + 24x^2 + 46x - 35 = 0.$

67. $x^7 - 13x^5 + 3x^4 + 30x^3 + 12x^2 - 8x - 4 = 0.$

§ 6. Способ Лагранжа.

1. Способ Лагранжа для вычисления корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

основан на последовательном определении неполных частных в

$$\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

искомых корней в непрерывную дробь.

2. Вычисление неполных частных $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ производится в порядке.

Сначала находится целая часть α_0 корня и уравнение образуется становкой $x = \alpha_0 + \frac{1}{x_1}$.

В преобразованном уравнении определяется целая часть α_1 корня единицы.

Преобразованное уравнение может иметь только один такой корень — если в предложенном уравнении нет других корней в промежутке $\alpha_0, \alpha_0 + 1$ кроме вычисляемого.

Полученное уравнение преобразуется подстановкой $x_1 = \alpha_1 + \frac{1}{x_2}$, и в преобразованном уравнении определяется целая часть α_2 положительного большего единицы и т. д.

3. Если вычисление корня остановлено на неполном частном α_k, то вычисляемый корень заключается между двумя последовательными подходящими $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ и $\frac{P_k}{Q_k}$ непрерывной дроби, выражающей корень.

Погрешность, происходящая оттого, что одна из этих подходящих принимается за истинное значение корня, меньше числа Q_k^{-2}.

4. Нахождение последовательных значений $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m, \ldots$ может быть значительно облегчено.

Если вычисления продолжены достаточно далеко, то α_k и $s - 1$ следующих за ним неполных частных $\alpha_{k+1}, \ldots \alpha_{k+s-1}$ находятся из разложения числа

$$\eta_k = (n-1)\frac{Q_{k-1}}{Q_k} - \frac{a_{1k}}{a_{0k}}$$

в непрерывную дробь.

В отмеченном равенстве числа a_{0k}, a_{1k} обозначают коэфициенты первого и второго члена k-го преобразованного уравнения, а Q_{k-1} и Q_k знаменателей $k-1$-й и k-ой подходящих дробей для вычисляемого корня ξ.

Число s неполных частных, способных быть найденными таким способом, определяется неравенством

$$Q_s^{(k)} < \frac{\alpha_k Q_k^2}{\sqrt{\lambda \frac{M}{2m}}},$$

$Q_s^{(k)}$ обозначает знаменателя s-й подходящей дроби числа η_k, M наибольшее значение $|f''(x)|$, m наименьшее значение $|f'(x)|$ в промежутке α_0, $\alpha_0 + 1$ а число λ произвольное положительное число $\geqq 3$, выбираемое так, чтобы имело место неравенство

$$\frac{1}{\rho_s} + \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{2},$$

в котором ρ_s обозначает полное s-ое частное в разложении числа η_k.

5. Контролем правильности выбора неполного частного α_k может служить то обстоятельство, что в случае ошибки преобразованное уравнение не будет иметь корня большего единицы или равного ей.

6. Если в выражении k-ой подходящей дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ для непрерывной дроби, представляющей корень ξ, заменить неполное частное α_k числом η_k и принять полученную дробь за приближенное значение корня, то погрешность, от этого происходящая, меньше числа

$$\frac{M}{2m \cdot \alpha_k^2 \cdot Q_k^2}$$

7. Если уравнение имеет несколько корней между α_0 и $\alpha_0 + 1$, то указанное сокращение возможно лишь после того, как в одном из преобразованных уравнений, скажем k-ом, окажется, что в промежутке (α_k, α_{k+1}), нет других корней кроме вычисляемого.

Задачи.

68. Вычислить корни уравнения

$$x^3 + 6x^2 + 6x - 7 = 0$$

с точностью до 0,00001.

Решение. Положительный корень уравнения заключается в промежутке (0, 1). Наибольшее по абсолютной величине значение $f''(x) = 6x + 12$ в промежутке (0, 1) равно 18. Наименьшее по абсолютной величине значение $f'(x) = 3x^2 + 12x + 6$ в промежутке (0,1) равно 6

Первое преобразование.

$$\alpha_0 = 0. \quad x = \frac{1}{x_1} \quad 7x_1^3 - 6x_1^2 - 6x_1 - 1 = 0. \quad P_1 = 0. \quad Q_1 = 1$$

	7	1	−5	−6
1	7	1	−5	−6
	7	8	3	
	7	15		
2	7	15	25	44

Преобразованное уравнение имеет корень в промежутке (1, 2), как зывают приложенные здесь вычисления.

$$\alpha_1 = 1.$$

Второе преобразование.

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2};\ 6x_2^3 - 3x_2^2 - 15x_2 - 7 = 0;\ P_2 = 0 \cdot 1 + 1 = 1.\ Q_2 = 1 \cdot 1 =$$

	6,	—3,	—15,	—7
3	6,	15,	30,	83
2	6,	9,	3,	—1
	6,	21,	45	
	6,	33		

Преобразованное уравнение имеет корень в промежутке (2, 3). К заключению легко притти, найдя верхнюю границу 3 положительны корней уравнения и пытаясь ее понизить далее.

$$\alpha_2 = 2.$$

Третье преобразование.

$$x_2 = 2 + \frac{1}{x_3},\quad x_3^3 - 45x_3^2 - 33x_3 - 6 = 0,\quad P_3 = 2,\quad Q_3 = 3$$

	1,	—45,	—33,	—6
46	1,	1,	13,	$13 \cdot 46 - 6 > 0$
45	1,	0,	—33,	—1491
	1,	45,	1992	
	1,	90		

Верхняя граница положительных корней преобразованного уравнения равна 46. Понижая ее на единицу, убеждаемся, что

$$\alpha_3 = 45.$$

Если в выражении подходящей дроби $\frac{P_4}{Q_4}$ для корня ξ_1 заменить α_3 числом

$$\eta_3 = 2 \cdot \frac{1}{3} - (-45) = 45\frac{2}{3},$$

то число

$$\frac{2\eta_3 + 1}{3\eta_3 + 1} = \frac{277}{414} = 0{,}66908\ ..$$

отличается от истинного значения корня ξ_1 меньше чем на

$$\frac{18}{45^2 \cdot 3^4 \cdot 2 \cdot 6} = \frac{1}{2 \cdot 3^3 \cdot 45^2} = \frac{1}{109350} < 0{,}00001.$$

Искомый корень $\xi_1 = 0{,}66908$ с точностью до 0,00001.

Второй и третий корни уравнения отрицательны.

Вычисляя их, преобразуем данное уравнение, заменив в нем x на $-x$.

$$x^3 - 6x^2 + 6x + 7 = 0$$

Преобразованное уравнение имеет два положительных корня: один в (2, 3), другой в промежутке (4, 5).

Вычислим сначала корень, лежащий в промежутке (2, 3).

Наибольшее значение $|f''(x)| = |6x - 12|$ в промежутке (2, 3) равно 6.

Наименьшее значение $|f'(x)| = |3x^2 - 12x + 6|$ в промежутке (2, 3) равно 3.

Первое преобразование.

$\alpha_0 = 2, \quad x = 2 + \frac{1}{x_1}, \quad 3x_1^3 - 6x_1^2 + 1 = 0, \quad P_1 = 2, \quad Q_1 = 1:$

	3,	−6,	0,	1
2	3,	0,	0,	1
1	3,	−3,	−3,	−2
	3,	0,	−3	
	3,	3		

Верхняя граница положительных корней преобразованного уравнения равна 2. Преобразованное уравнение имеет корень в промежутке (1, 2).

$$\alpha_1 = 1.$$

Второе преобразование.

$\alpha_1 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}, \quad 2x_2^3 + 3x_2^3 - 3x_2 - 3 = 0, \quad P_2 = 3, \quad Q_2 = 1.$

	2,	3,	−3,	−3
2	2,	7,	11,	19
1	2,	5,	2,	−1
	2,	7,	9	
	2,	9		

Преобразованное уравнение имеет корень в промежутке (1, 2).

$$\alpha_2 = 1$$

Третье преобразование.

$\alpha_2 = 1, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}, \quad x_3^3 - 9x_3^2 - 9x_3 - 2 = 0, \quad P_3 = 5, \quad Q_3 = 2$

	1,	−9,	−9,	−2
10	1,	1,	1,	8
9	1,	0,	−9,	−83
	1,	9,	72	
	1,	18		

Преобразованное уравнение имеет корень в промежутке (9, 10).

$$\alpha_3 = 9.$$

Четвертое преобразование.

$$\alpha_3 = 9, \quad x_3 = 9 + \frac{1}{x_4}, \quad 83x_4^3 - 72x_4^2 - 18x_4 - 1 = 0, \quad P_4 = 48, \quad Q_4 = 19$$

	83,	−72,	−18,	−1
2	83,	94,	170,	339
1	83,	11,	−7,	−8

Преобразованное уравнение имеет корень в промежутке (1, 2).

$$\alpha_4 = 1.$$

Заменяя в выражении $-\frac{P_5}{Q_5}$ неполное частное α_4 числом

$$\eta_4 = 2 \cdot \frac{2}{19} + \frac{72}{83} = \frac{1700}{1577},$$

получим приближенное значение корня ξ_2 с точностью до

$$\frac{6}{2 \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot 19^4} = \frac{1}{19^4} = \frac{1}{130\,321} < 0{,}00001.$$

Искомый корень

$$\xi_2 = -\frac{48 \cdot \eta_4 + 5}{19 \cdot \eta_4 + 2} = -\frac{89\,485}{35\,454} = -2{,}52397\ldots$$

с точностью до $(130\,321)^{-1}$

За приближенное значение ξ_2 можно принять число —2.52397 с точностью до 0,00001.

Третий корень.

Второй положительный корень преобразованного уравнения лежит в промежутке (4, 5).

Наибольшее значение $|f''(x)| = |6x - 12|$ для этого промежутка равно 18.

Наименьшее значение $|f'(x)| = |3x^2 - 12x + 6|$ в этом промежутке равно 6.

Первое преобразование.

$$\alpha_0 = 4, \quad x = 4 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1^3 = 6x_1^2 - 6x_1 - 1 = 0, \quad P_1 = 4, \quad Q_1 = 1$$

	1,	−6,	6,	7
4	1,	−2,	−2,	−1
	1,	2,	6	
	1,	6		

	1,	−6,	−6,	−1
7	1,	1,	1,	6
6	1,	0,	−6,	−37
	1,	6,	30	
	1,	12		

В первой таблице даются коэфициенты первого преобразованного уравнения. Числа второй таблицы показывают, что корень преобразованного уравнения заключается в промежутке (6, 7).

$$\alpha_1 = 6.$$

Второе преобразование.

$$\alpha_1 = 6, \quad x_1 = 6 + \frac{1}{x_2}, \quad 37x_2^3 - 30x_2^2 - 12x_2 - 1 = 0, \quad P_2 = 25, \quad Q_2 = 6.$$

	37,	−30,	−12,	−1
2	37,	44,	76,	151
1	37,	7,	−5,	−6
	37,	44,	39	
	37,	81		

Положительный корень преобразованного уравнения заключается в промежутке (1, 2).

$$\underline{\alpha_2 = 1.}$$

Третье преобразование.

$$\alpha_2 = 1, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}, \quad 6x_3^3 - 39x_3^2 - 81x_3 - 37 = 0, \quad P_3 = 29, \quad Q_3 = 7.$$

	6,	−39,	−81,	−37
9	6,	15,	54,	549
8	6,	9,	−9,	−109
	6,	57,	447	
	6,	105		

Преобразованное уравнение имеет положительный корень в промежутке (8, 9).

$$\underline{\alpha_3 = 8.}$$

Четвертое преобразование.

$$\alpha_3 = 8, \quad x_3 = 8 + \frac{1}{x_4}, \quad 109x_4^3 - 447x_4^2 - 105x_4 - 6 = 0, \quad P_4 = 257, \quad Q_4 = 62.$$

	109,	−447,	−105,	−6
5	109,	98,	385,	1919
4	109,	−11,	−149,	−602

Положительный корень преобразованного уравнения заключается в промежутке (4, 5).

$$\underline{\alpha_4 = 4.}$$

Заменив в подходящей дроби $-\frac{P_5}{Q_5}$ неполное частное α_4 числом η_4

$$\eta_4 = 2 \cdot \frac{7}{62} + \frac{447}{109} = \frac{14\,620}{3\,379},$$

находим для третьего корня ξ_3 предложенного уравнения приближенное значение

$$\xi_3 = -\frac{257 \cdot 14\,620 + 29 \cdot 3379}{62 \cdot 14\,620 + 7 \cdot 3379} = -\frac{3\,855\,331}{930\,093} = -4{,}14510$$

с точностью до

$$\frac{18}{2 \cdot 6 \cdot 4^2 \cdot 62^4} = \frac{3}{472\,842\,752} < 0{,}00000001.$$

Третий корень $\xi_3 = -4{,}14510$ с точностью до 0,00001.

Вычислить с точностью до 0,00001 корни уравнения:

69. $x^3 + 7x^2 + 14x + 7 = 0$.

70. $x^3 - 4{,}2x^2 + 5{,}4x - 2{,}05 = 0$.

71. $x^3 - 12x^2 + 45x - 51 = 0$.

72. $x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 14x - 4 = 0$.

73. $x^4 - 5x^3 - 8x + 8 = 0$.

74. $x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 22x + 5 = 0$.

75. Вычислить с точностью до 0,00001 положительный корень

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

меньший единицы.

76. Вычислить с точностью до 0,0000001 положительный корень

$$x^5 + 12x^4 + 59x^3 + 150x^2 + 201x - 207 = 0.$$

77. $x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 11x - 13x - 1 = 0$.

78. $x^6 - 5x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 17x + 0 = 0$.

79. $x^6 + 6x^5 + 7x^4 - 30x^3 - 75x^2 - 108 = 0$.

80. $60x^6 - 332x^5 + 740x^4 - 911x^3 + 680x^2 - 272x + 41 = 0$.

81. $x^7 + 7x^6 + 19x^5 + 8x^4 - 46x^3 - 50x^2 + 44x + 24 = 0$.

82. $4x^7 - 29x^6 + 76x^5 - 129x^4 + 136x^3 - 15x^2 + 91x - 47 = 0$.

83*. Уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ преобразуется последовательно с помощью подстановок

$$x = \alpha_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = \alpha_1 + \frac{1}{x_2}, \ldots x_{k-1} = \alpha_{k-1} + \frac{1}{x_k}, \ldots$$

Уравнение $a_{0k}x_k^n + a_{1k}x_k^{n-1} + \ldots + a_{nk} = 0$, получаемое в результате k-го преобразования, имеет корни $\xi_{1k}, \xi_{2k}, \ldots \xi_{nk}$.

Найти $\underset{k\to\infty}{\text{пред.}}\ (\xi_{ik} - \xi_{jk})$ и $\underset{k\to\infty}{\text{пред.}}\ \frac{\xi_{ik}}{\xi_{jk}}$ в предположении, что непрерывная дробь

$$\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\ldots}}}$$

не равна ни одному из корней данного уравнения.

84*. Показать что коэфициенты a_{ik} уравнения

$$a_{0k}x^n + a_{1k}x^{n-1} + \ldots + a_{nk} = 0$$

предыдущей задачи при достаточно больших значениях k могут быть представлены в виде

$$a_{ik} = \binom{n}{i}\lambda_k \cdot \mu_k^i (1 + \varepsilon_{ik}), \qquad \underset{k\to\infty}{\text{пред.}}\ \varepsilon_{ik} = 0$$

85*. Уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ преобразуется посредством подстановок

$$x = \alpha_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = \alpha_n + \frac{1}{x_2}, \ldots x_{k-1} = \alpha_{k-1} + \frac{1}{x_k}$$

Определить знак корня ξ_{ik} уравнения $\alpha_{0k}x_k^n + a_{1k}x_k^{n-1} + \ldots + a_{nk} = 0$ при условии, что соответствующий корень ξ_i данного уравнения заключается между $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$, $\frac{P_k}{Q_k}$ неподходящими дробями непрерывной дроби

$$\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\ldots}}}$$

Решить ту же задачу, предполагая, что ξ_i не содержится между

$$\frac{P_k}{Q_k} \text{ и } \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}.$$

86*. Определить знак вещественной части мнимого корня ξ_{ik} уравнения

$$a_{0k}x_k + a_{1k}x_k^{n-1} + \ldots + a_{nk} = 0$$

предыдущей задачи.

87. Предполагая, что непрерывная дробь:

$$\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\ldots}}} \qquad (*)$$

не равна ни одному из корней уравнения.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0; \qquad (**)$$

показать, что все коэфициенты уравнения

$$a_{0k}x_k^n + a_{1k}x_k^{n-1} + \ldots + a_{nk} = 0, \qquad (***)$$

получаемого из первого посредством преобразований

$$x = \alpha_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = \alpha_1 + \frac{1}{x_2}, \ldots x_{k-1} = \alpha_{k-1} + \frac{1}{x_k}$$

имеют одинаковый знак. (Vincent.)

88. Показать, что при достаточно большом значении k между коэфициентами уравнения (***) предыдущей задачи имеется только одна перемена знака, если непрерывная дробь (*) равна одному из корней уравнения (**). (Vincent.)

ОТВЕТЫ

ОТДЕЛ I.

КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО

2. $1 = \cos 0 + i \sin 0, \quad -1 = \cos \pi + i \sin \pi.$

3. $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, \; -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

4. $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right), \; -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

5. $1 \pm i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right)\right],$

$-1 \pm i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

6. $2 \cos \frac{\alpha}{2}\left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right)$

7. $2 \sin \frac{\alpha}{2}\left(\cos \frac{\pi - \alpha}{2} + i \sin \frac{\pi - \alpha}{2}\right)$

8. $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$

9. $\frac{1}{\cos \alpha}(\cos \alpha + i \sin \alpha).$

10. $\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha.$

12. $m = \sqrt{\sqrt{2} + 1} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1}, \quad n = -\sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$

14. $-2.$

15. $33,44 - 16,92\,i.$

16. $5 + 3i.$

17. $-7,084 - 7,212i.$

18. $a^2 - ab + b^2.$

19. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$

20. $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab.$

21. $(2a - b - c)(2b - c - a)(2c - a - b).$

22. 2^{n-1}, если $n = 6k + 1, \; 6k + 2$; $\; -2^{n-1}$, если $n = 6k + 4, \; 6k + 5$; $\; 0$, если $n = 6k + 3, \; 6k$. Число k целое.

Указание: Рассмотреть разложение по формуле бинома Ньютона числа

$$\omega^n = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

23. $(-2)^{n-1}$, если $n = 3k \pm 1$; $\; 1$, если $n = 3k$.

Указание: Воспользоваться теми же соображениями, что и в предыдущем случае.

24. *Указание*: Воспользоваться соотношением $S_k + iT_k = (1+i)^k$, которое дает:

$$S_{4m} = (-1)^m 2^{2m}, \quad T_{4m} = 0; \quad S_{4m+1} = T_{4m+1} = (-1)^m, 2^m; \quad S_{4m+2} = 0;$$

$$T_{4m+2} = (-1)^m 2^{2m+1}; \quad S_{4m+3} = (-1)^{m+1} 2^{2m+1} = -T_{4m+3}.$$

26. $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

27. $\pm(2+i)$.

28. $\pm(4-3i)$.

29. $\pm(3-i)$.

30. $x_1 = i, \qquad x_2 = -1-i.$

31. $x_1 = -2+i, \qquad x_2 = -3+i.$

32. $x_1 = 2i, \qquad x_2 = -1.$

33. $x = \pm\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

34. $x = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$

36. $z_0 = 3, \quad z_1 = \frac{3}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right), \quad z_2 = -\frac{3}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$

37. $z_0 = -i, \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad z_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

38. $z_0 = \frac{1}{2}\sqrt[6]{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$

39. $z_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$

41. $z_0 = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right); \quad z_1 = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right);$

$z_3 = -1; \quad z_4 = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$

$z_5 = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$

42. $z_0 = 1, \quad z_1 = 1+i, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -1+i, \quad z_4 = -1, \quad z_5 = -1-i,$
$z_6 = -i, \quad z_7 = 1-i.$

43. $z_0 = 2, \quad z_1 = 1+i\sqrt{3}, \quad z_2 = -1+i\sqrt{3}, \quad z_3 = -2,$
$z_4 = -1-i\sqrt{3}, \quad z_5 = 1-i\sqrt{3}.$

44. Воспользоваться подстановкой $x = \operatorname{tg}\varphi$, $a = \operatorname{tg}\alpha$ и свести решение к нахождению корней уравнения $(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)^n = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$.

45. $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i.$

46. $\frac{1}{4}(8k+1)\pi i.$

47. $\log 2\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{i}{2}(\alpha + 4k\pi).$

50. $\dfrac{1 - a\cos\varphi - a^{n+1}\cos(n+1)\varphi + a^{n+2}\cos n\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}$

51. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1-a^{n+1}}{1-a}-\frac{1}{2}\,\frac{1-a\cos 2\varphi-a^{n+1}\cos 2(n+1)\varphi+a^{n+2}\cos 2n\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$

52. $\frac{1-a\cos 3\varphi-a^{n+1}\cos 3(n+1)\varphi+a^{n+2}\cos 3n\varphi}{4(1-2a\cos 3\varphi+a^2)}+$

$$+\frac{3}{4}\,\frac{1-a\cos\varphi-a^{n+1}\cos(n+1)\varphi+a^{n+2}\cos n\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$$

53. $\frac{(1-a)\cos\varphi-a^{n+1}\cos(2n+3)\varphi+a^{n+2}\cos(2n+1)\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$

54. $\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin(n+1)\varphi\sin n\varphi}{\sin\varphi}-\frac{1}{4}\,\frac{\sin 3(n+1)\varphi\cdot\sin 3n\varphi}{\sin\varphi}$

55. $2^{n-1}\cos^n\varphi=\cos n\varphi+$

$$+\binom{n}{1}\cos(n-2)\varphi+\ldots+\binom{n}{k}\cos(n-2k)\varphi+\ldots+\frac{1}{2}\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]},$$

n четное,

$$2^{n-1}\cos^n\varphi=\cos n\varphi+$$

$$+\binom{n}{1}\cos(n-2)\varphi+\ldots+\binom{n}{k}\cos(n-2k)\varphi+\ldots+\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}\cos\varphi,$$

n нечетное.

Символ $\left[\frac{n}{2}\right]$ обозначает целую часть числа $\frac{n}{2}$.

56. При n четном:

$$(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{n-1}\sin^n\varphi=\cos n\varphi-\binom{n}{1}\cos(n-2)\varphi+\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}\cos(n-2k)\varphi+\ldots$$

$$+\frac{1}{2}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

При n нечетном:

$$(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{n-1}\sin^n\varphi=\sin n\varphi-\binom{n}{1}\sin(n-2)\varphi+\ldots$$

$$+(-1)^k\binom{n}{k}\sin(n-2k)\varphi+\ldots+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}\sin\varphi.$$

58. $|z-m|=R$.

59. $|z-m|<R$.

60. $z_0=m\pm Ri,\quad z_k=m+R\left[\cos\left(\frac{4k\pm n}{2n}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4k\pm n}{2n}\pi\right)\right]$

$$k=1,2,\ldots n-1.$$

61. $\frac{3\mp\sqrt{3}}{2}+i\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

62. $z_k = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left[e^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)i} + e^{\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2k-1}{n}\pi\right)i}\right]$

$$z_k = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left[e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)i} + e^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2k-1}{n}\pi\right)i}\right]$$

63. $\frac{z_0+z_2}{2} \pm i\,\frac{z_2-z_0}{2}$

64. Три решения:

$$m+n-p, \qquad m-n+p, \qquad -m+n+p.$$

65. $\frac{3\pm\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

66. $\frac{z_1+z_2}{2}$

67. $1+i$.

68. $\frac{m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_nz_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$

69.

Указание: Воспользоваться тем обстоятельством, что когда три точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой, отношение

$$\mu = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

есть число вещественное, и наоборот.

70. Точка z лежит внутри многоугольника.

Указание: Воспользоваться результатом задачи 68.

71. Центр описанного круга.

72. $3+i$.

Указание: Условие подобия двух сходственно расположенных треугольников z_1, z_2, z_3, z_1', z_2', z_3' выражается равенством:

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{z_3'-z_1'}{z_2'-z_1'}.$$

73. $z = \frac{z_2'z_1 - z_2z_1'}{z_2'-z_2-(z_1'-z_1)}$

74. $z_k = \left(1+\frac{ai}{n}\right)^k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k); \quad r_k = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}k};$

$$\varphi_k = k\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{n}$$

75. $\underset{n\to\infty}{\text{Пред}}\, z_n = \cos a + i\sin a.$

Указание: Представить $\underset{n\to\infty}{\text{пред}}\, z_n = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$ и найти

$$\underset{n\to\infty}{\text{Пред}}\, r_n = R, \qquad \underset{n\to\infty}{\text{Пред}}\, \varphi_n = \Phi.$$

77. $z_k = \left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad r_k = \left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{k}{2}}$

$$\varphi_k = k\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a+n}$$

78. $\operatorname{Пред}_{n\to\infty} z_n = e^a(\cos b + i\sin b)$.

81.

Указание: Положить в предыдущем тождестве

$$z_1 = \frac{\sqrt{u}+\sqrt{v}}{2}; \qquad z_2 = \frac{\sqrt{u}-\sqrt{v}}{2}$$

82. Геометрической интерпретацией служит теорема Пифагора.

Указание: Доказывая обратное предложение, положить

$$z_2 - z_0 = (\lambda + \mu i)(z_1 - z_0)$$

и показать, пользуясь первым равенством, что $\lambda = 0$.

84. $z = 1 + (1 - i)t$.

85. $z = 3 + 2i + (1 - i)t$.

86. $z = 7 - 2i + (1 + i)t$.

87. $z = 1 + 1{,}5i + t(3 - 2i)$.

88. $z = z_0 \pm t\sqrt{(z_2 - z_0)(z_1 - z_0)}$.

90. Окружность, из которой точки a, b видны под углом α.

91. Окружность.

94. Вращение на угол α.

95. Преобразование посредством взаимных радиусов, соединенное с симметрическим преобразованием. Полюс первого преобразования — начало. Основная окружность радиуса a. Ось второго преобразования есть ось вещественных чисел. Окружность переходит в окружность.

96. Преобразование подобия.

97. Окружность переходит в окружность.

98. Лучи переходят в окружности, проходящие через a и b. Концентрические окружности с центром в начале переходят в окружности ортогональные к первому семейству окружностей.

99. Прямые, параллельные вещественной оси, превращаются в прямые, проходящие через начало. Прямые, параллельные мнимой оси, превращаются в окружности с центром в начале. Остальные прямые переходят в логарифмические спирали.

ОТДЕЛ II.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ ПРЕДЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

2. $(-1)^{n-1}$.

3. $(-1)^{n^2}$

4. -1.

5. $+$.

6. Не содержится в определителе потому, что среди первых или вторых значков встречаются равные.

7. Произведение вовсе не входит в определитель.

8. $i = 4$. $k = 1$.

9. $i = 4$. $k = 5$.

10. $i = 1$, $k = n$ при $n = 4m$; $i = n$, $k = 1$ при $n = 4m + 2$.

11. $+$.

13. $n = 4k$.

Указание: Переставить строки и столбцы и вынести множитель i из каждой строки.

14. $n = 4k + 2$.

15. $n = 4k + 2$.

16. $\Delta = 0$.

17. Определитель не изменяется.

18. Определитель не меняется.

19. Определитель не меняется.

21. $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \; a_{13}$.

22. Знак алгебраического дополнения $(-1)^{n^2}$. Дополнительный определитель зачеркиванием в основном определителе четных строк и нечетных столбцов.

23. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{4} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} +$

$+ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$

25. 1.

Указание: Прибавить элементы первой строки к элементам остальных строк.

26. $(n-1)(-1)^{n-1}$.

Указание: Прибавить элементы всех строк к элементам первой строки и вынести из нее множитель $n-1$.

27. $2^{n-1} a^n$.

28. 1.

Указание: Вычесть из элементов каждой строки соответствующие элементы предыдущей и разложить по элементам 1-го столбца.

29. 1.

Указание: Воспользоваться соотношением $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

30. 1.

31. $$\frac{\binom{m+n}{n+1}\binom{m+n-1}{n+1}\cdots\binom{m+n-p+1}{n+1}}{\binom{n+p}{n+1}\cdots\binom{n+1}{n+1}}$$

Указание: Вынести за знак определителя общего множителя m из первой строки, $m+1$ из второй и т. д., $m+n$ из последней. Вынести общего множителя $\frac{1}{p}$ из элементов первого столбца, $\frac{1}{p+1}$ из второго и т. д., $\frac{1}{p+n}$ из последнего. Сравнить преобразованный определитель с предложенным, имея в виду соотношение $\binom{m}{n} = \frac{m}{n} \cdot \binom{m-1}{n-1}$

32. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^{n-1} \cdot 3^{n-2} \ldots n$.

Указание: Вычесть из первой строки вторую, умноженную на a, из второй третью, умноженную на a, и т. д.

33. $3! \cdot 5! \ldots (2n-1)!$

Указание: Применить тот же прием, что и в предыдущей задаче.

34. $\prod\limits_{k>i} (x_k - x_i)$, где Π обозначает произведение всех возможных пар множителей $x_k - x_i$, причем $k > i$.

35. $\prod\limits_{k>i} (x_k - x_i)$.

36. $$\frac{\prod\limits_{k>i} (x_k - x_i)}{2!\,3!\ldots(n-1)!}$$

37. $\dfrac{3!\ 5!\ \ldots\ (2n-1)!\ 2n}{2!\ 3!\ \ldots\ (n-1)!\ (n+1)!}$

38. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod\limits_{i<k} \sin\left(\dfrac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\right) \cdot \prod\limits_{i<k} \sin\left(\dfrac{\varphi_i-\varphi_k}{2}\right)$

39. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod\limits_{i>k} \sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_k}{2} \prod\limits_{i>k} \cos\dfrac{\varphi_i+\varphi_k}{2}$

40.
$$a_{01} \cdot a_{02} \cdots a_{0\,n-1} \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i>k} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod_{i>k} \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$$

41. $2^{n^2} \prod\limits_{i<k} \sin\dfrac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod\limits_{i<k} \sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$

43. $\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$

Указание: Разложить по элементам первой строки и, получив $\Delta_n = (\alpha+\beta)\,\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$, где Δ_n обозначает данный определитель, а Δ_{n-1}, Δ_{n-2} подобные ему определители из $(n-1)^2$ и $(n-2)^2$ элементов, вычислить следовательно $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$.

44. $\alpha^n + \beta^n$.

45. $\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}}$

46. $\dfrac{2^n}{\sin^n x}\left(\sin^{2n}\dfrac{x}{2} + \cos^{2n}\dfrac{x}{2}\right)$

47. $a_0 x_1 x_2 \ldots x_n + a_1 y_1 x_1 \ldots x_n + a_2 y_1 y_2 x_3 \ldots x_n + \ldots + a_n y_1 y_2 \ldots y_{n-1} y_n$

Указание: Разложить по элементам первой строки.

48. 0.

Указание: Представить данный определитель в виде суммы определителей.

49. $\Delta + x\,\Sigma A_{ik}$, где Δ есть определитель, составленный из элементов a_{ik}, а ΣA_{ik} обозначает сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя Δ.

50. $(a_1-x)\ldots(a_n-x)\cdot\left[1 + x\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i-x}\right]$

Указание: Вычесть последний столбец из предыдущих и вынести множители a_1-x, a_2-x, ... a_n-x за знак определителя.

51. $x^n + \sigma$, $x^{n-1} + \ldots + \sigma_n$, где σ_k обозначает сумму таких миноров порядка $n-k$ определителя $\Delta = \|\,a_{ik}\,\|$, элементы главной диагонали которых принадлежат главной диагонали определителя Δ.

52. $2!\ 3!\ \ldots\ (n-1)!\ \Delta^n u_0$, где $\Delta^n u_0 = u_n - \binom{n}{1} u_{n-1} + \ldots + (-1)^n u_n$.

Указание: Вычесть каждую строчку из следующей.

53. $(x^2-1)\ (x^2-3^2)\ \ldots\ (x^2-2m-4)^2$ при $n=2m$; $x\,(x^2-1)\ \ldots\ (x^2-2m)^2$ при $n=2m+1$.

Указание: Прибавить к каждой строке все за ней следующие, затем вычесть из каждого столбца предшествующий и разложить по элементам первой строки.

54. $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$.

Указание: Умножить первый столбец на x^n и прибавить к нему остальные, умноженные соответственно на $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots 1$.

55. $n!\,(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)$.

56. $n - 1$.

Указание: Вычесть из каждой строки предыдущую, в полученном определителе из каждой строки, начиная с третьей, вычесть предыдущую и т. д.

57. n.

Указание: Вычесть из каждого столбца предыдущий, затем вычесть каждую строку из последующей и полученный определитель разбить на сумму двух определений, взяв за одно из слагаемых определитель задачи 28.

58. $(-1)^{n+1}\, xy \cdot \dfrac{x^{n-1} - y^{n-1}}{x - y}$

Указание: Вычесть каждую строку из предыдущей и разложить по элементам первой строки.

59. $\dfrac{x f(y) - y f(x)}{x - y}$

Указание: Разбить данный определитель на сумму определителей вида задачи 58.

60. $x^2\,(1 - x^2)^4$.

61. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \dfrac{n+1}{2} \quad n^{n-1}$

62. $\sin^4 \varphi$.

63. $\sin^4 \varphi$.

64. $(-1)^n x^2 y^2 \dfrac{x^{n-3} - y^{n-3}}{x - y}$

Указание: Разложить определитель по элементам двух первых строк и воспользоваться результатом задачи 58.

65. $(-1)^n\,(n - 3)\,\sin \varphi$.

66. $\dfrac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta}$

69.

Указание: Составить произведение таблиц и вычислить получившийся определитель.

70. 0 при $m > 3$; $\sin^4 \varphi \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$ при $m = 3$.

Указание: Рассмотреть произведение таблиц

$$\begin{Vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m & \gamma_m & \delta_m \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} \cos n\varphi, & n\cos n\varphi, & \sin n\varphi, & n\sin n\varphi \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(n+m)\varphi, & (n+m)\cos(n+m)\varphi, & \sin(n+m)\varphi, & (n+m)\sin(n+m)\varphi \end{Vmatrix}$$

71. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$.

72. $$\begin{matrix} s_0, & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1, & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1}, & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{matrix}, \text{ где } s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k.$$

73.

Указание: Прежде чем составлять произведение, переставить строки и в одном из определителей.

74.

Указание: Выяснить, произведением каких прямоугольных таблиц рассматриваемый минор.

75.

Указание: Воспользоваться определителем

$$\begin{matrix} x, & y, & z \\ y, & z, & x \\ z, & x, & y \end{matrix}$$

77. ± 1. Знак $+$ соответствует тому случаю, когда триэдр, образованный осями OA, OB, OC, может быть совмещен с координатным триэдром, образованным осями OX, OY, OZ так, чтобы ось OA упала на OX, OB на OY и OC на OZ.

78. Объем тетраэдра с вершинами в точках $(0, 0, 0)$, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) равен одной шестой абсолютной величины определителя.

79. Абсолютная величина определителя не меняется, может меняться знак. Одна шестая абсолютной величины определителя равна объему тетраэдра с вершинами в точках (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4).

80. $R = \dfrac{abc}{16s}$, где a, b, c длины сторон, а s площадь треугольника.

Указание: Воспользоваться соотношениями $x_k^2 + y_k^2 = R^2$, $R^2 - x_k x_s - y_k y_s = \frac{1}{2}[(x_k - x_s)^2 + (y_k - y_s)^2]$.

83. $x_1 = -x_4$, $x_2 = 3x_4$, $x_3 = -3x_4$.

84. Система не имеет решений.

85. Система не имеет решений.

86. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$.

87. $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$, $x_5 = 1$.

88. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

89. $x_1 = x_5 + x_6 - 1$; $x_2 = x_5 - x_6 + 1$; $x_3 = x_6 - x_5 - 2$; $x_4 = 2 - x_5 - x_6$.

90. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$; $x_6 = -3x_5$.

91. Система не имеет решений.

92. $x_1 = x_5 + x_6 + x_7 + 2$, $x_2 = x_5 + x_6 - x_7 + 1$, $x_3 = x_5 - x_6 + x_7 - 1$, $x_4 = -x_5 + x_6 + x_7 + 3$.

93. $x_1 = \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$; $x_k = -(k-1)$ $(k = 2, 3, \ldots n)$.

94. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

95. $x_s = \lambda_1 a_{s1} + \lambda_2 a_{s2} + \ldots + \lambda_n a_{sn}$ $(s = 1, 2, \ldots n)$.

Указание: Воспользоваться условием ортогональности. Для доказательства соотношения (1) сравнить полученное решение с (1) решением: $x_s = (\lambda_1 A_{s1} + \lambda_2 A_{s2} + \ldots + \lambda_n \Delta_{sn}) : \Delta$, получаемым по правилу Краммера. Соотношение (2) есть непосредственное следствие (1).

96.

Указание: Рассмотреть систему уравнений

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots n).$$

Показать, что общее решение системы в предположении, что один из миноров — 1 порядка, скажем A_{11} не равен нулю, имеет вид:

$$\frac{x_1}{A_{11}} = \frac{x_2}{A_{12}} = \ldots = \frac{x_n}{A_{1n}}.$$

Воспользоваться этими равенствами, приняв во внимание, что $x_1 = A_{k1}$, $x_2 = A_{k2}, \ldots x_n = A_{kn}$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ дают решение системы.

97.

Указание: Рассмотреть систему уравнений

$$a_{k1}\lambda_1 + a_{k2}\lambda_2 + \ldots + a_{kp}\lambda_p = a_{kq} \quad (k = 1, 2, \ldots p, s),$$

где $q > p$ и $s > p$.

Вывести отсюда, что ранг таблицы

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pm} \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sm} \end{matrix}$$

равен p.

Составить систему уравнений

$$a_{si} = a_{1i}\mu_1 + a_{2i}\mu_2 + \ldots + a_{pi}\mu_p \quad (i = 1, 2, \ldots m),$$

показать, что она имеет решение и заключить отсюда, что ранг предложенной таблицы равен p.

99.
$$\begin{vmatrix} x_0^2 + y_0^2, & x_0, & y_0, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

100. $x^2 + y^2 - x - y = 0.$

Указание: Написать условие, что четыре точки $M(x, y)$, $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 0)$, $M_3(0, 1)$ лежат на одной окружности.

101. $2x^2 - xy + 2y^2 - 2x - 4y = 0.$

Указание: Написать условие, что шесть точек $M(x, y)$, $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 0)$, $M_3(0, 2)$, $M_4(2, 2)$, $M_5(2, 1)$ лежат на одной кривой второго порядка $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

102. $y = \frac{1}{6}(x^3 + x).$

103.
$$\begin{vmatrix} y, & x^n, & x^{n-1} & \ldots & 1 \\ y_0, & x_0^n, & x_0^{n-1} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n, & x_n^n, & x_n^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad a^k = \frac{\Delta_k}{\Delta}.$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^n, & x_0^{n-1} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^n, & x_n^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

а определитель Δ_k выводится из Δ заменой элементов k-ого столбца соответственно числами $y_0, y_1, \ldots y_n$.

104. $$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

105. $$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

106. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0.$

107. Ранг таблицы

$$\begin{matrix} 1, & 1 \ldots 1 \\ x_1, & x_2 \ldots x_n \\ y_1, & y_2 \ldots y_n \end{matrix}$$

равен 2.

Указание: Использовать результат задачи 98.

108. Ранг таблицы

$$\begin{matrix} a_1, & a_2 \ldots a_n \\ b_1, & b_2 \ldots b_n \\ c_1, & c_2 \ldots c_n \end{matrix}$$

равен 2.

109. В первом случае ранг таблицы

$$\begin{matrix} 1, & 1 \ldots 1 \\ x_1, & x_2 \ldots x_n \\ y_1, & y_2 \ldots y_n \\ z_1, & z_2 \ldots z_n \end{matrix}$$

равен 3, во втором случае равен 2.

Указание: Воспользоваться системой уравнений

$$u x_i + v y_i + w z_i + t = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

которая в первом случае имеет одно решение, в котором не все неизвестные u, v, w, t за раз равны нулю и одно может быть задано произвольно, а во втором случае два неизвестных могут быть заданы произвольно.

110. Ранг таблицы

$$\begin{matrix} 1, & 1 & \ldots 1 \\ x_1, & x_2 & \ldots x_n \\ y_1, & y_2 & \ldots y_n \\ z_1, & z_2 & \ldots z_n \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & \ldots x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \end{matrix}$$

равен 3.

111. В первом случае ранг таблицы

$$\begin{Vmatrix} A_1, & A_2 \ldots A_n \\ B_1, & B_2 \ldots B_n \\ C_1, & C_2 \ldots C_n \\ D_1, & D_2 \ldots D_n \end{Vmatrix}$$

Равен 3, во втором случае он равен 2.

2. $f(-1)=10$, $f'(-1)=-15$, $f''(-1)=18$, $f'''(-1)=-24$, $(-1)=24$.

3. $f(x)=(x+i)^5-5i(x+i)^4-11(x+i)^3+18i(x+i)^2+8(x+i)+1-2i$.

4. $(x-1)^6+(x-1)^5-9(x-1)^4-18(x-1)^3-26(x-1)^2-10(x-1)-2$.

5. $(x-2)^5+14(x-2)^4+71(x-2)^3+101(x-2)+86(x-2)-57$.

6. 2.

7. 3.

8. Частное равно $x^4+2x^3+4x^2+11x+29$. Остаток равен 57.

10. $\dfrac{x^4-x+1}{x-i}=x^3+ix^2-(1+i)+\dfrac{3-i}{x}+\dfrac{1+3i}{x^2}-\dfrac{3-i}{x^2(x-i)}$

12. $1+x+(1+i)x^2=(x^2+x+1)(1+ix^2)-ix^3-ix^4$.

13. $\dfrac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sin\alpha+x\sin 2\alpha+x^2\sin 3\alpha+\ldots+x^{n-1}\sin n\alpha+$
$+x^n\dfrac{\sin(n+1)\alpha-x\sin n\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

14. Частное равно

$$x+mx^2+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}x^3+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+s-2)}{1\cdot 2\ldots(s-1)}x^s.$$

Указание: Результат может быть получен без всяких вычислений приложением формулы Ньютона к дроби

$$\frac{x}{(1-x)m}.$$

15. 1. $a=0$, $b=2$. 2. $a=\pm\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, $b=3$.

Указание: Найти остаток от деления и приравнять коэфициенты нулю.

16.

Указание: Убедиться, что функция

$$x^{3n}+x^{3m+1}+x^{3p+2}$$

обращается в нуль при корнях трехчлена x^2+x+1, приняв во внимание, что оба корня x_1, x_2 трехчлена удовлетворяют уравнению

$$x_i^3=1\ (i=1,\ 2).$$

17.

Указание: Представить функцию $f(x, y)$ в виде

$$f(x, y)=(x-y)\cdot\varphi(x, y);$$

использовать условие симметричности.

20. Ответ: $m=6k\pm 1$.

Указание: Воспользоваться тем обстоятельством, что корни трехчлена x^2+x+1 удовлетворяют уравнению

$$x^3=1.$$

21.

Указание: Воспользоваться тем обстоятельством, что корень кратности s функции $f(x)$ есть корень кратности $s-1$ функции $f'(x)$.

22.

Указание: Воспользоваться теоремой Даламбера.

23. $1-i, \quad \frac{1}{6}\left(-1 \pm \sqrt{13}\right)$.

Указание: Воспользоваться теоремой Даламбера.

Указание: Показать, что вещественные корни функции имеют четную Обозначив половину мнимых корней через

$$a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i, \ldots a_k+b_k i,$$

положить

$$P_0(x)+iQ_0(x)=(x-a_1-b_1 i) \ldots (x-a_k-b_k i).$$

При отборе половины корней руководствоваться теоремой Даламбера.

25.

Указание: Показать, что вещественные корни четной кратности. Руководствуясь теоремой Даламбера, отобрать половину мнимых корней и, представив в виде $a_1+b_1\rho,\ a_2+b_2\rho, \ldots a_k+b_k\rho$, где ρ есть первообразный корень третьей степени из единицы, положить

$$P(x)-\rho\, Q(x)=(x-a_1-b_1\rho)\,(x-a_2-b_2\rho) \ldots (x-a_k-b_k\rho).$$

27. $f(x)=x^4-2(p+q)x^2+(p-q)^2$.

28. $f(x)=x^8-4\,(p+q+r)\,x^6+2\,[3\,(p^2+q^2+r^2)+2\,(qr+rp+pq)]\,x^4-$ $-4\,(p^3+q^3+r^3-p^2q-p^2r-q^2p-q^2r-pr^2-qr^2+10pqr)\,x^2+(p^2+q^2+$ $+r^2-2qr-2rp-2pq)^2=0$.

29. $x^3-3abx-a^3-b^3$.

30. $x^3-3ax^2+3(a^2-bc)\,x-a^3-b^3-c^3$.

32. $$x^{2n+1}-1=(x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$$

33. $$x^{2n}+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+1\right)$$

34. $$x^{2n+1}+1=(x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$$

35. $$f(x)=2^{2n}\cdot x\cdot\left(x^2-\cos^2\frac{\pi}{4n+2}\right)\left(x^2-\cos^2\frac{3\pi}{4n+2}\right)$$
$$\ldots\left(x^2-\cos^2\frac{(2n-1)\pi}{4n+2}\right)$$

или

$$f(x)=2^{2n}\cdot x\left(x^2-\sin^2\frac{\pi}{2n+1}\right)\left(x^2-\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}\right)\ldots\left(x^2-\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}\right)$$

Указание: Воспользоваться соотношением

$$\cos(2n+1)\varphi=\cos^{2n+1}\varphi-\binom{2n+1}{2}\cos^{2n-1}\varphi\sin^2\varphi+$$
$$\ldots+(-1)^n\cos\varphi\sin^{2n}\varphi,$$

положив в нем $\cos\varphi=x$.

Принять во внимание, что

$$1+\binom{2n+1}{2}+\binom{2n+1}{4}+\ldots+\binom{2n+1}{2n}=2^{2n}.$$

36. $f(x) = 2^{2n-1}\left(x^2 - \cos^2\frac{\pi}{4n}\right)\left(x^2 - \cos^2\frac{3\pi}{4n}\right)\ldots\left(x^2 - \cos^2\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right)$

Указание: Воспользоваться соотношением

$$\cos 2n\varphi = \cos^{2n}\varphi - \binom{2n}{2}\cos^{2n-2}\varphi\sin^2\varphi + \ldots + (-1)^n\sin^{2n}\varphi,$$

положив в нем $x = \cos\varphi$. Принять во внимание, что

$$1 + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \ldots + 1 = 2^{2n-1}$$

38. $(a_n - a_{n-2} + a_{n-4}\ldots)^2 + (a_{n-1} - a_{n-3} + a_{n-5}\ldots)^2$.

Указание. Перемножить $f(i)$ на $f(-i)$, представив $f(x)$ в виде

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

39. — 98. *Указание*: Перемножить $f(1)$, $f(\rho)$, $f(\rho^2)$, где $\rho^3 = 1$, представив $f(x)$ в виде

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_6).$$

41. *Указание*: Воспользоваться результатом задачи 32.

42 *Указание*: Воспользоваться результатом задачи 33.

43. *Указание*: Воспользоваться результатом задачи 34.

44. $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$. *Указание*: Воспользоваться задачей 33. Положить $x = -1$.

45. $\frac{(-1)^n}{2^{2n}}$. *Указание*: Воспользоваться задачей 31, предположив в ней n нечетным. Положить $x = i$.

46. $\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^n}$ при n нечетном; $\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}$ при n четном.

Указание: Воспользоваться результатом задачи 34. Выбрать $x = i$.

47. *Указание*: Показать, что функции $f(x)$ и $f(m - x)$ имеют одинаковые корни.

48. *Указание*: Воспользоваться предыдущей задачей. Вывести равенство

$$f'(x) = (-1)^{n-1} f'(2m - x)$$

и заключить из него, что коль скоро y_3 есть корень функции $f'(x)$, число y_{m+s-1} есть тоже корень.

49. *Указание*: Поступить, как и в предыдущей задаче.

51. $a_1^3 - 4a_0a_1a_2 + 8a_0^2a_3 = 0$; $x_3 = -\frac{a_1}{2a_0}$.

52. $27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2a_2^3 = 0$; $x_3 = -\frac{3a_3}{a_2}$.

Указание: Представив связь между корнями в виде:

$$x_1x_2 + x_2x_3 = 2x_1x_3$$

и приняв во внимание, что

$$a_0(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = a_2,$$

вычислить $x_1 \cdot x_3$. Принять во внимание произведение $x_1x_2x_3$.

53. $\lambda = 11$, $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

54. $rp^3 = q^3$; если $x_1 \cdot x_3 = x_2^2$, то $x_2 = -\frac{q}{p}$.

55. $\lambda = 8$, $x_1 = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{15})$, $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{15})$

56. Корень x_2 удовлетворяет квадратному уравнению

$$a_0(m^2+m+1)x^2+3a_1x+3a_2=0.$$

При выборе того корня квадратного уравнения, который дает значение x_2, дует принять во внимание, что x_2 удовлетворяет соотношению

$$a_0m(m+1)x_2^3+a_1mx_2^2-a_3=0.$$

57. $x_1=6,\ x_2=4,\ x_3=-1.$

58. $\lambda=\frac{2}{27};\ x_1=-\frac{1}{3}(1+\sqrt{3});\ x_2=-\frac{1}{3};\ x_3=-\frac{1}{3}(1-\sqrt{3})$

Указание: Положив $x_k=a+(k-1)\lambda$ воспользоваться соотношениями

$$x_1+x_2+x_3=-1,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0.$$

Найдя x_1, x_2, x_3, определить λ из соотношения

$$x_1x_2x_3=\lambda.$$

59. $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4.$

60. $\lambda=-22,\ \mu=40;\ x_1=-5,\ x_2=-2,\ x_3=1,\ x_4=4.$

61. $x_k=a+(k-1)d;\quad d=\pm\frac{2\sqrt{3(n-1)a_1^2-6na_0a_2}}{a_0n\sqrt{n^2-1}};$

$$a=-\frac{a_1}{na_0}-\frac{n-1}{2}d.$$

62. $\lambda=15,\ \mu=4,\ \nu=0.\quad x_1=-2,\ x_2=-1,\ x_3=0,$
$x_4=1,\ x_5=2,\ x_6=3.$

63. Коэфициенты связаны соотношением:

$$pqr-r^2-p^2s=0.$$

Корни x_1, x_2 удовлетворяют уравнению

$$pu^2+r=0.$$

Корни x_3, x_4 удовлетворяют уравнению

$$rv^2+prv+ps=0.$$

64. $x_1=i,\ x_2=-i,\ x_3=1,\ x_4=2.$

65. $a_1^3-4a_0a_1a_2+8a_0^2a_3=0.$

Произведения $x_1\cdot x_2$, $x_3\cdot x_4$ суть корни ξ_1, ξ_2 уравнения

$$a_0a_1x^2-2a_0a_3x+a_0a_4=0.$$

Корни x_1, x_2 и x_3, x_4 находятся из уравнений

$$2a_0x^2+a_1x+2\xi_1=0,\ 2a_0x^2+a_1x-2\xi_2=0.$$

66. $p^2s-r^2=0$. Суммы $\xi_1=x_1+x_2$, $\xi_2=x_3+x_4$ суть корни уравнения $px^2+p^2x+pq-2r=0.$

Корни x_1, x_2 и x_3, x_4 находятся из уравнений

$$px^2-p\xi_1x+r=0,\quad px^2-p\xi_2x+r=0.$$

67. Первое решение:

$$\lambda=-1,\ x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ x_2=-\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ x_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ x_4=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

Второе решение:

$$\lambda=2,\ x_1=1+i,\ x_2=1-i,\ x_3=x_4=-1.$$

Указание: Пользуясь соотношениями между корнями и коэфициентами уравнения, составить уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0,$$

удовлетворяет λ. Один из корней очевиден $\lambda_1 = -1$. Два остальных суть

$$\lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = 2.$$

Определение корней предложенного уравнения сведется к решению уравнений:

$$x^2 - \mu_i x + \lambda_i = 0, \quad x^2 + \mu_i x + 1 = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\mu_i = \frac{2}{\lambda_i - 1}$$

68. $\alpha = 3, \ q = 0, \ p \neq 0.$

70. $f(x) = x^2.$

71. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1 + (x-2)(x-4)(x-6)(x-8)(x-10) \cdot \omega(x).$

72. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 3.$

73. $y = x.$

Указание: Представив уравнение искомой параболы в виде

$$y = a_1 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$

воспользоваться формулой Ньютона.

74. $y = x^3 - x + 1.$

75. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1.$

Указание: Воспользоваться тем обстоятельством, что остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$ равен $f(a)$.

76. $x^4 + 1 + (x^5 - x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x)\,\omega(x).$

77. $x^3 - 2x^2 + x + 1.$

78.
$$A_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_m)} +$$
$$+ A_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)\ldots(x-a_m)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_m)} +$$
$$+ A_m \frac{(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{m-1})}{(a_m-a_0)(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_{m-1})}$$

79. *Указание*: Воспользоваться формулой Lagrange'a, положив $n = m - 1$ и взяв $x = x_m$. За $y_0, y_1, \ldots y_{m-1}$ принять $\omega(x_0)$, $\omega(x_1) \ldots \omega(x_{m-1})$.

80. *Указание:* Воспользоваться формулой Lagrange'a, положив $n = m$ и взяв за $x_0, x_1, \ldots x_n$ корни многочлена $\varphi(x)$. За $y_0, y_1 \ldots y_n$ принять $\omega(x_0)$, $\omega(x_1), \ldots \omega(x_n)$. Сравнить коэфициенты при x^n в обеих частях равенства.

81. 0 при $s < n - 1$; 1 при $s = n - 1$.

Указание: Воспользоваться результатом задач 79 и 80.

82. $$\Delta_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_m) \quad \begin{matrix} x_1^m, & x_1^{m-1}, & \ldots 1 \\ x_2^m, & x_2^{m-1}, & \ldots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^m, & x_n^{m-1}, & \ldots 1 \end{matrix}$$

где $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_m)$ есть сумма всех возможных произведений k множителей, составленных из чисел $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Указание: Сравнить выражение коэфициентов функции

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m,$$

принимающей при $x = x_0, x_1, \ldots x_m$ значения 1, 0, 0 ... 0, вычислив эти коэфициенты из формулы Lagrange'а и с другой стороны найдя их из системы уравнений

$$a_0x_k^m + a_1x_k^{m-1} + \ldots + a_m = y_k, \qquad k = 0, 1, \ldots m,$$

где $y_0 = 1$ и $y_k = 0$ при $k = 1, 2, \ldots m$.

83. *Указание*: Сравнить коэфициенты при старшей степени x в выражении простейшей функции, получаемой по формулам Ньютона и Лагранжа.

84. $\delta(x) = x - 1$.

85. $\delta(x) = (x^2 + x + 1)(x + 1)$.

88. $x^2 - x + 1$.

89. $x^2 - ix + 1$.

90. $U(x) = -\frac{3}{16}x^2 - \frac{9}{16}x - \frac{1}{2}, \quad V(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{1}{2}$

91. $U(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1, \quad V(x) = -6x + 7$.

92. $U(x) = -x^3 + 2x^2 + 3, \quad V(x) = x^2 - 5x + 7$.

Указание: Найти многочлены, удовлетворяющие соотношению

$$(x-1)^3 \cdot U_0(x) + (x^2+1)^2 V_0(x) = 1,$$

и определить затем $U(x)$ и $V(x)$ из равенств

$$U_0(x) \cdot (x^2 + x + 1) = (x^2+1)^2 \cdot q(x) + U(x), \text{ степень } U(x) < 4$$

$$V_0(x) \cdot (x^2 + x + 1) = -(x-1)^3 \cdot q(x) + V(x), \text{ степень } V(x) < 3$$

путем деления.

93. $U(x) = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}x^{n-1},$

$$V(x) = 1 + n(1-x) + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}(1-x)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)}x^{m-1}$$

Указание: Представив предложенное равенство в виде

$$\frac{1}{(1-x)^m} = U(x) + x^n \cdot \frac{V(x)}{(1-x)^m},$$

разложить правую и левую часть по возрастающим степеням x. Сравнить члены, содержащие x в степени, не превосходящей $n-1$, в обеих частях равенства. Для вычисления $V(x)$ применить тот же прием, заменив предварительно $1-x$ на y.

94. $f(x) = 3x^5 + x^4 + 2x^2 + 2x - 1$.

Указание: Представить $f(x)$ в виде

$$f(x) = U(x) \cdot (x^2 - x + 1), \quad f(x) = V(x) \cdot (x^4 + 1) + 2x^2 - x - 2$$

и найти функции $U(x)$, $V(x)$.

95. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 3$.

Указание: Рассмотреть производную.

96. *Указание*: Применить способ математической индукции.

97. *Указание*: Воспользоваться соотношениями

$$F(x) \cdot \varphi_s(x) + f_s(x) \cdot \omega_s(x) = 1, \quad s = 1, 2, \ldots m.$$

99. 2 — двойной корень, — 1 тройной корень.

100. — 3 простой корень, — 2 двойной корень, 2 тройной корень.

101. Два двойных корня 3, -2.

102. Два двойных корня $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$

103. Два простых корня $\pm i$. Один двойной корень $\frac{1}{3}$. Один тройной корень -2.

104. Два простых корня $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$. Один двойной корень $\frac{1}{2}$

105. Один простой корень 3. Два двойных корня $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

106. Корни первого уравнения: $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3}{2}$, 1. Корни второго уравнения $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$

107. Корни первого уравнения: $\frac{1 \pm i\sqrt{2}}{3}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ Корни второго уравнения $\frac{1 \pm i\sqrt{2}}{3}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

108. Корни первого уравнения: 3, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ Корни второго уравнения 3, 1, 1.

109. Первое решение:

$$\lambda = +2,\ x_1 = x_2 = +1,\ x_3 = -2.$$

Второе решение:

$$\lambda = -2,\ x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = +2.$$

Указание: Определить корни производной.

110. Простые корни $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{3}$. Двойные корни 2, 3.

Указание: Найдя еще один корень уравнения с помощью теоремы Даламбера, разделить левую часть на $x^2 - x + 1$ с целью сократить дальнейшие вычисления.

111. Простые корни $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Двойные корни $\pm i$. Тройной корень 1.

112. Простые корни -1, $+\frac{1}{2}$. Двойные корни $\pm\sqrt{2}$, $\pm i$.

113. *Указание*: Представить функцию $F[U(x), V(x)]$ в виде

$$F[U(x),\ V(x)] = \prod_{i=1}^{m} [\alpha_i U(x) + \beta_i V(x)],$$

где m степень функции $F(u, v)$ и показать, что значение x_0, при котором

$$\alpha_k U(x) + \beta_k V(x) = 0,$$

не может обращать в нуль другие множители. Вывести отсюда, что кратные корни предложенного уравнения суть кратные корни множителей, и показать, что они удовлетворяют уравнению

$$U'(x) \cdot V(x) - U(x) \cdot V'(x) = 0.$$

Приведенных соображений достаточно и для обратного заключения.

114. *Указание*: Представив функцию $F[U(x), V(x)]$ в виде произведения

$$F[U(x),\ V(x)] = \prod_{i=1}^{m} [\alpha_i U(x) + \beta_i V(x)],$$

показать, что корень кратности p предложенного уравнения есть корень кратности p уравнения

$$\alpha_k U(x) + \beta_k V(x) = 0.$$

Показать дальше, что этот корень есть кратности $p-1$ для уравнения

$$\alpha_k U'(x) + \beta_k V'(x) = 0,$$

и сделать отсюда заключение, что этот корень имеет кратность $p-1$

$$F[U'(x),\ V'(x)] = \prod_{i=1}^{m} [\alpha_i U'(x) + \beta_i V'(x)].$$

115. *Указание*: Показать, что

$$[F(x),\ F'(x)] = \varphi(x)^{k-1},$$

и выведя отсюда выражения для $Q(x)$ и $R(x)$

$$Q(x) = f(x) \cdot \varphi(x), \qquad R(x) = f'(x) \cdot \varphi(x) + kf(x) \cdot \varphi'(x)$$

убедиться в справедливости соотношения

$$\varphi(x) = [f(x)\ \varphi(x),\ (1-k) f'(x) \cdot \varphi(x)].$$

ОТДЕЛ IV

ДРОБНАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

2. $\frac{1}{2}\left(\frac{}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$

3. $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{4}{x+2}$

4. $x^2 + 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$

5. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x^2+x+1}$

6. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$

7. $\frac{x^2}{6} + \frac{47}{36}x + \frac{1129}{216} + \frac{1}{6(x-1)} + \frac{335}{968(2x+3)} +$

$+ \frac{7927}{363(x-4)} - \frac{2399}{6534(3x-1)}$

9. $x^2 + 4x + 8 + \frac{4}{x-1} - \frac{22}{(x-1)^2} - \frac{26}{(x-1)^3} - \frac{11}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x-1)^5}$

Указание: Расположить числитель по степеням $x-1$.

10. $\frac{x}{x^2+x+1} - \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{(x^2+x+1)^3}$.

Указание: Деля числитель и получающиеся остатки на x^2+x+1, расположить числитель по степеням x^2+x+1.

11. $x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

12. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{4}{3x+1} - \frac{2}{(3x+1)^2}$

13. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+1}$

14. $\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{(x^2-x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$

15. $x^3+3x^2+6x+10+\frac{13}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$

16. $x+8-\frac{41}{2(x-1)}-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}-\frac{1}{2(x+1)}+$
$+\frac{1}{(x+1)}+\frac{46}{x-2}$

17. $x^2+x+1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-2}+\frac{x+1}{x^2+1}$

18. $1+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{x+1}+$
$+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2}$

20. $\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}$

21. $\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}$

22. $\frac{1}{x^2+1}-\frac{2}{2x^2+x+1}+\frac{2x+2}{(2x^2+x+1)^2}$

23. $x-1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+x+1}$

24. $\frac{1}{5(x+1)}+\frac{2x+7}{13(x^2+x+1)^2}-\frac{18x-41}{169(x^2+x+1)}-\frac{79x-32}{845(x^2-2x+2)}$

26. $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$.

Указание: Результат можно получить сразу без всяких вычислений, воспользовавшись формулой разложения функции $\frac{f'(x)}{f(x)}$ на простейшие дроби.

27. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$

28. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$.

29. $$\frac{1}{2n}\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2\left(x-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\left(x-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1}+\ldots+\frac{2\left(x-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1}\right)$$

Указание: Разложив дробь на простейшие по формуле для $\frac{f'(x)}{f(x)}$, соединить члены

$$\frac{1}{x-e^{\frac{k\pi i}{n}}}+\frac{1}{x-e^{-\frac{k\pi i}{n}}}=\frac{2\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}\right)}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1},\quad 0<k<\quad 1$$

30. $\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{x-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}$

31. $\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+1}$

32. $\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x\cos\frac{(6k+3)\pi}{2n+1}-\cos\frac{4k+2}{2n+1}}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}+1}$

33. $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{5}\,\frac{(\sqrt{5}-1)x+\sqrt{5}+1}{2x^2-(\sqrt{5}-1)x+2}-\frac{1}{5}\,\frac{(\sqrt{5}+1)x+\sqrt{5}-1}{2x^2+(\sqrt{5}+1)x+2}$

34. $\frac{x-2\cos a}{2(\cos b-\cos a)(x^2-2x\cos a+1)}+\frac{x-2\cos b}{2(\cos a-\cos b)(x^2-2x\cos b+1)}$

35. $\frac{1}{4\cos a}\left[\frac{x}{x^2-2x\cos a+1}-\frac{x}{x^2+2x\cos a+1}\right].$

37. $\alpha^2+\alpha+1.$

38. $-\alpha^{k+1}$, если $k<n-1$, $\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\ldots+1$, если $k=n-1$.

39. $3\alpha^4-5\alpha^3+6\alpha^2-4\alpha+1.$

40. $-\alpha^2.$

41. $\alpha^2+\alpha+2.$

42. $\sqrt[3]{4}+1.$

Указание: Предложенная задача может быть формулирована так: представить в целом виде функцию

$$\frac{2\alpha^2-6\alpha-15}{(\alpha+1)^3}$$

от корня $\alpha=\sqrt[3]{2}$ уравнения

$$x^3=8.$$

43. $\sqrt{3}+\sqrt[4]{3}+1.$

44. $\sqrt{2}$

Указание: $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ есть корень уравнения $x^4-2x^2-1=0$

45. $3+\sqrt[3]{2}-\sqrt{2+\sqrt[3]{2}}$

Указание: $\sqrt{2+\sqrt[3]{2}}$ есть корень уравнения

$$x^6-6x^4+12x^2-10=0.$$

46. $1+i.$

Указание: Принять во внимание уравнение $x^6-2x^3+2=0$

47. $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1$

Указание: $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ есть корень уравнения $x^6+2x^3-1=0$

49. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-2+x+x^2-2x^3+\omega(x);\ \omega(x)=x^4\ \frac{1+2x}{1+x+x^2}$.

50. $-1-5(x+1)-30(x+1)^2-182(x+1)^3+\omega(x)$.

Указание: Преобразовать дробь подстановкой $x+1=y$ и затем определить четыре члена разложения по возрастающим степеням y.

51. $-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{5}{x-1}+2+16(x-1)-16(x-1)^2+$
$+46(x-1)^3-94(x-1)^4+\omega(x)$.

52. $x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\omega(x);\quad \omega(x)=\frac{2x^2-x-2}{x^4(x^3+x^2+1)}$

Указание: Заменить x на $\frac{1}{y}$ и разложить полученную дробь в ряд по возрастающим степеням y.

53. $\sin a+x\sin 2a+x^2\sin 3a+\ldots+x^n\sin(n+1)a+\ldots$

Ряд сходится при $|x|<1$.

Указание: Разложить дробь на простейшие и, представив разложение в виде

$$\frac{1}{2i}\left[\frac{e^{ai}}{1-xe^{ai}}-\frac{e^{-ai}}{1-xe^{-ai}}\right],$$

воспользоваться формулой суммы для бесконечно-убывающей геометрической прогрессии.

54. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2+\ldots+\frac{2^n-1}{2^{n+1}}x^n+\ldots$

Ряд сходится при $|x|<1$.

55. $1+\frac{6}{x}+\frac{29}{x^2}+\frac{126}{x^3}+\ldots+\frac{2^{k-2}(17\cdot 2^{k-1}-5)}{x^k}+\ldots$

Ряд сходится при $|x|>4$.

56. $1+x+3x^2+\ldots+\frac{(2n+1)+(-1)^n}{2}x^n+\ldots$

Ряд сходится при $|x|<1$.

57. $1-x+x^8-x^9+\ldots+x^{8n}-x^{8n+1}+x^{8(n+1)}-x^{8(n+1)+1}+\ldots$

58. $\frac{x\sin 2a}{\sin a}+\frac{x^3\sin 4a}{\sin a}+\ldots+\frac{x^{2n-1}\sin 2na}{\sin a}+\ldots$

Ряд сходится при $|x|<1$.

59*. $x^2=\frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)};\ y^2=\frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)};$

$$z^2=\frac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)};$$

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3.$$

Указание: Представив левую часть уравнения в виде дроби

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=-\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

воспользоваться для нахождения x^2, y^2, z^2 разложением на простейшие дроби Сумму $x^2+y^2+z^2$ вычислить разложением в бесконечный ряд по убывающим степеням λ.

61. $\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$.

Ряд сходится при $|x|<1$.

62. $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$.

Ряд сходится при $|x|<1$.

63. $\dfrac{x+1}{x^3-3x^2+1}$ $\qquad |x|<\dfrac{1}{2\sin\frac{7\pi}{8}}$.

Указание: Определяя корни уравнения $x^3-3x^2+1=0$, положить $x=\dfrac{1}{2\sin\varphi}$.

64. $\dfrac{1+2x}{(1-x)^2}$.

Указание: Воспользоваться обстоятельством, что коэфициенты ряда $u_n=3n-$ удовлетворяют условию

$$u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0 \qquad A\geqq 0.$$

65. $\dfrac{2x^2-x+1}{(1-x)^3}$

Указание: Принять во внимание, что коэфициенты ряда $u_n=n^2+1$ удовлетворяют соотношению

$$u_{n+3}-3u_{n+2}+3u_{n+1}-u_n=0.$$

66. $\dfrac{x^3+5x^2-x+1}{(x-1)^4}$.

Указание: Коэфициенты ряда связаны соотношением

$$u_{n+4}-4u_{n+3}+6u_{n+2}-4u_{n+1}+u_n=0 \qquad (u_n=n^3+n+1).$$

67. $a_0+\dfrac{S_0}{x}+\dfrac{S_1}{x^2}+\ldots+\dfrac{S_m}{x^{m+1}}+\ldots,$

где

$$S_m=\frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)}x_1^m+\ldots+\frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)}\cdot x_n^m,$$

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}\ldots+a_n,\ \varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Указание: Представить дробь в виде

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)(x-x_1)}+\frac{f(x_2)}{\varphi'(x_2)(x-x_2)}+\ldots+\frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)(x-x_n)}+a_1$$

и затем воспользоваться известной формулой геометрической прогрессии.

68. $\dfrac{x^3+(7a^3-4a)x^2+(8a^4-6a^2+1)x+a^3}{[x^2+2a(4a^2-3)x+1][x^2+2ax+1]}$

Указание: Воспользоваться результатом предыдущей задачи. Представить дробь в виде

$$\frac{x+a}{x^2+2ax+1}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x_1^m+x_2^m}{x^{m+1}}$$

где x_1 и x_2 суть корни знаменателя.

Коэфициенты второго ряда

$$u_m^3=\frac{1}{8}(x_1^m+x_2^m)^3$$

и могут быть преобразованы следующим образом:

$$u_m^3=\frac{1}{8}(x_1^{3m}+x_2^{3m})+\frac{3}{8}(x_1^m+x_2^m).$$

Откуда следует, что сумма

$$u_0^3+u_1^3x+\ldots+u_n^3x^n+\ldots=\frac{3}{4}\cdot\frac{x+a}{x^2+2ax+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2x-x_1^3-x_2^3}{x^2-(x_1^3+x_2^3)x+1}$$

Для вычисления последней дроби принять во внимание соотношение

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

воспользоваться связью между корнями и коэфициентами знаменателя.

69. *Указание*: Воспользоваться тем обстоятельством, что ряд

$$u_0 + u_1x^{-1} + \ldots + u_nx^{-n} + \ldots$$

представляет рациональную дробь, знаменатель которой равен

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = f(x).$$

Обозначив числитель ее через $\varphi(x)$, показать, пользуясь результатом задачи 67, что

$$u_m = \frac{\varphi(x_1)}{f'(x_1)} x_1^{m-1} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{f'(x_n)} x_n^{m-1},$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ суть корни знаменателя. Вывести отсюда, что

$$\underset{m \to \infty}{\text{пред.}} \frac{u_{m+1}}{u_m} = x_1.$$

70. *Указание*: Коэфициенты ряда связаны некоторым соотношением вида

$$a_0u_{s-m} + a_1u_{s-m+1} + \ldots + a_mu_s = 0 \qquad a_0 \neq 0.$$

Беря из последовательности

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$$

m каких-либо следующих друг за другом чисел $u_e, u_{e+1}, \ldots u_{e+m-1}$, можно получить в силу условия относительно значений, принимаемых этими числами, самое большее 3^m различных последовательностей $u_e, u_{e+1}, \ldots u_{e+m-1}$.

Показать, что некоторая последовательность $u_e, u_{e+1}, \ldots u_{e+m-1}$ повторится далее в виде $u_{e+p}, u_{e+p+1}, \ldots u_{e+p+m-1}$ и что заданный ряд может быть представлен в форме

$$\left(u_0 + u_1x + \ldots + u_{e-1}x^{e-1} + u_ex^e + u_{e+1}x^{e+1} + \ldots u_{e+p-1}x^{e+p-1}\right)$$
$$(1 + x^p + x^{2p} + \ldots).$$

Вывести отсюда, что его сумма равна

$$\frac{f(x)}{1 - x^p},$$

где $f(x)$ есть целая функция, коэфициенты которой равны 0, + 1, — 1.

71. $-\frac{n}{2}$

Указание: Искомая сумма равна $-\frac{f'(1)}{f(1)}$, где

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1.$$

72. *Указание*: Воспользоваться формулой

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n},$$

где $x_1, x_2 \ldots x_n$ суть корни многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Обозначив через α угол, который образует с осью вещественных чисел прямая, проходящая через точку, изображающую корень y_0 функции $f'(x)$, положить

$$x_k - y_0 = r_k \cdot e^{(\varphi_k + \alpha)i} \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Показать, что

$$\frac{\sin\varphi_1}{r_1}+\frac{\sin\varphi_2}{r_2}+\ldots+\frac{\sin\varphi_n}{r_n}=0$$

Вывести из этого равенства требуемое заключение.

73. *Указание*: Воспользоваться предыдущей задачей.

74. *Указание*: Воспользоваться результатом задачи 72.

75. *Указание*: Воспользоваться результатом задачи 72.

76. *Указание*: Воспользоваться предыдущей задачей. Взяв многоугольник, вписанный в окружность, увеличивать число его сторон, беспредельно уменьшая стороны до нуля.

77. *Указание*: Воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{y_0-x_1}+\frac{1}{y_0-x_2}+\ldots+\frac{1}{y_0-x_n}=0,\quad x_1\leqq x_2\leqq\ldots\leqq x_n,$$

где y_0 обозначает корень $f'(x)$, представить его в виде

$$\frac{1}{x_n-y_0}+\ldots+\frac{1}{x_i-y_0}=\frac{1}{y_0-x_{i-1}}+\ldots+\frac{1}{y_0-x_1}$$

и, предположив y_0 лежащим между x_i и x_{i-1}, вывести отсюда неравенство

$$\frac{1}{x_i-y_0}<\frac{n-1}{y_0-x_{i-1}}$$

Заключить из него, что

$$y_0<x_i-\frac{x_i-x_{i-1}}{n}$$

Подобным же образом вывести, что

$$y_0>x_{i-1}+\frac{x_i-x_{i-1}}{n}$$

Сопоставляя эти неравенства, сделать требуемое заключение.

78. *Указание*: Из соотношения

$$\frac{1}{a+bi-x_1}+\frac{1}{a+bi-x_2}+\ldots+\frac{1}{a+bi-x_n}=-\frac{1}{ki}$$

где $a+bi$ обозначает один из корней уравнения, вывести, что

$$\frac{b}{(a-x_1)^2+b^2}+\frac{b}{(a-x_2)^2+b^2}+\ldots+\frac{b}{(a-x_n)^2+b^2}=-\frac{1}{k}$$

Заключить отсюда, что

$$|b|<n\cdot|k|.$$

ОТДЕЛ V.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ. ИСКЛЮЧЕНИЯ

2. $\varphi_2^2-2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_4$.

3. $\varphi_1^2\varphi_2-\varphi_1\varphi_3-2\varphi_2^2+4\varphi_4$.

Указание: При выборе частных значений положить сначала $x_1=1$, $x_2=-1$ $x_3=0\ldots x_n=0$.

4. $\varphi_2\varphi_3-3\varphi_1\varphi_4+5\varphi_5$.

5. $2\varphi_2^2-6\varphi_1\varphi_3+24\varphi_4$.

6. $3\varphi_1^2-8\varphi_2$.

7. $\varphi_1\varphi_{n-1}-n^2\varphi_n$.

Указание: При выборе частных значений положить первый раз

$$x_1 = x_2 = \ldots x_{n-1} = 1, \quad x_n = 0,$$

второй раз

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1.$$

9. $a_0^2 S x_i^2 x_k x_e = a_1 \cdot a_3 - 4a_4.$

10. $a_0^2 S (x_i - x_k)^2 = (n-1) a_1^2 - 2na_0a_2.$

11. $a_0^2 S (X - x_i)^2 (x_k - x_e)^2 = (n-2) [(n-1) a_1^2 - 2na_0a_2] X^2 +$
$+ 2[(n-2) a_1a_2 - 3na_0a_3] X + 4na_0a_4 - 2(2n-3) a_1a_3 + 2(n-2) a_2^2.$

12. $a_0^2 S x_i^2 x_k^2 x_e x_m = a_2a_4 - 4a_1a_5 + 9a_0a_6.$

13. $a_0^2 S x_i^2 x_k^2 x_e^2 = a_3^2 - 2a_2a_4 + 2a_1a_5 - 2a_0a_6.$

14. $a_0^4 S x_i^4 x_k x_e = a_1^3a_3 - 3a_0a_1a_2a_3 - a_0a_1^2a_4 + 2a_0^2a_2a_4 + 3a_0^2a_3^2 +$
$+ a_0^2a_1a_5 - 6a_0^3a_6.$

16. $s_6 = 59.$

17. $-12.$

18. $-65.$

19. $-9.$

20. 5.

21. 1040.

22. $S_p = 0$ при p не делящемся на m, $S_p = 1$ при p кратном m.

23. $S_m = -(a^m + b^m).$

24. $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = -a, \quad s_{n+1} = \dfrac{a(a+1)\ldots(a+n)}{1 \cdot 2 \ldots n} - a$

26. $\dfrac{2a_na_{n-2}a_1 + a_na_{n-1}a_0 - a_{n-1}^2a_1}{a_0a^2}$

27. 0.

28. $\dfrac{2a_1^2a_2 - 4a_0a_1a_3 - 2a_2^2}{a_0^2a_3 - a_0a_1a_2}$

29. $\dfrac{3a_1^2a_2^2 - 4a_0a_1^3a_3 - 4a_0a_2^3 - 2a_0a_1a_2a_3 - 9a_0^2a_3^2}{(a_0a_3 - a_1a_2)^2}$

30. $\dfrac{a_1^4 - 3a_0a_1^2a_2 + 5a_0a_1a_3 + a_0^2a_2^2}{a_0^3a_3 - a_0^2a_1a_2}$

31. $\dfrac{a_2a_3^2 - 2a_2^2a_4 - a_1a_3a_4 + 4a_0a_4^2}{a_0a_4^2}$

32. $a_0^3 + a_0^2a_2 + a_0a_1a_3 + a_0a_3^2 + a_1^2a_4 + a_1a_2a_4 - 2a_0a_2a_4 - a_0^2a_4 +$
$+ a_2a_4^2 - a_0a_4^2 + a_4^3 = 0.$

Указание: Приравнять нулю симметрическую функцию

$$\Pi (x_ix_k + 1).$$

33. $2a_0a_3^2 - 3a_0a_2a_4 + 2a_1^2a_4 = 0.$

34. 166.

35. $\dfrac{1}{4}\sqrt{a^4 + 4a^2b - 8ac}.$

Указание: Воспользоваться формулой площади:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)(-x + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3)}.$$

36. 1, —1, 2.

Указание: Составить кубическое уравнение, корнями которого являются искомые числа, пользуясь соотношением между суммами одинаковых степеней коэфициентами уравнения.

37. *Указание*. Воспользоваться разложением на простейшие дроби.

38. $s_2 = a_1^2 - 2a_2$.

40. — 8.

41. — 5.

42. *Указание*: Представить функцию $(1 + a_1x + \ldots + a_nx^n)$ в виде произведения

$$1 + a_1x + \ldots + a_nx^n = (1 - x_1x)(1 - x_2x)\ldots(1 - x_nx)$$

и воспользоваться разложением $\log(1 - n)$ в ряд по степеням n.

43. $$S_m = m \sum \frac{(-1)^{k_0} \cdot (k_0 - 1)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n},$$

где суммирование распространяется на все целые значения $k_0, k_1, k_2, \ldots k_n$, удовлетворяющие условиям:

$$k_0 = k_1 + k_2 + \ldots + k_n, \quad m = k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m, \quad k_i \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Указание: Определить коэфициент при x^m в разложении функции

$$-m \log(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) = -m\left(\frac{a_1x + a_2x^2 + \ldots}{1} - \frac{(a_1x + a_2x^2 + \ldots)^2}{2} + \ldots\right)$$

Этот коэфициент равен сумме коэфициентов при x^m в отдельных членах

$$m \cdot \frac{(-1)^{k_0}(a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_sx^s + \ldots)^{k_0}}{k_0}$$

написанного ряда.

44. *Указание*: Воспользоваться соотношением

$$-\log(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) = s_1x + \frac{s_2}{2}x^2 + \ldots + \frac{s_m}{m}x^m + \ldots$$

45. $$a_m = \sum \frac{(-1)^{k_0} s_1^{k_1} \cdot s_2^{k_2} \ldots s_m^{k_m}}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!\, 1^{k_1}\, 2^{k_2} \ldots m^{k_m}} \qquad k_i \geqq 0,$$

где суммирование распространяется на все значения $k_0, k_1, k_2 \ldots k_m$, удовлетворяющие условиям:

$$k_0 = k_1 + k_2 + \ldots + k_m, \quad m = k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m.$$

Указание: Разложив в ряд

$$e^{-s_1x - \frac{s_2}{2}x - \ldots - \frac{s_m}{m}x^m - \ldots} = 1 - \left(s_1x + \frac{s_2}{2}x^2 + \ldots\right) + \frac{\left(s_1x + \frac{s_2}{2}x^2 + \ldots\right)^2}{1 \cdot 2} - \ldots$$

определить коэфициент при x^m в отдельных слагаемых

$$\frac{(-1)^{k_0}\left(s_1x + \frac{s_2}{2}x^2 + \ldots + \frac{s_m}{m}x^m + \ldots\right)^{k_0}}{k_0!}$$

46. *Указание*: Продифференцировать по s_k обе части равенства

$$-\log(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) = s_1x + \frac{s_2}{2}x^2 + \ldots + \frac{s_m}{m}x^m + \ldots$$

и умножив обе части полученного равенства на $1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, сравнить коэфициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства.

48. $a_0^3 S x_i^3 x_k^2 x_e = -12a_0^2 a_6 + 7a_0 a_1 a_5 + 4a_0 a_2 a_4 - 3a_1^2 a_4 - 3a_0 a_3^2 + a_1 a_2 a_3.$

49. $a_0^2 S x_i^2 x_k^2 x_e^2 = a_3^2 - 2a_2 a_4 + 2a_1 a_5 - 2a_0 a_6.$

50. $R(a_0, a_1, \ldots a_n, \quad b_0, b_1) = a_0 b_1^n - a_1 b_0 b_1^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n b_0^n.$

52. $R(f, \varphi) = a_0^2 b_2^2 - a_0 a_1 b_1 b_2 + a_0 a_2 b_1^2 - 2a_0 a_2 b_0 b_2 +$
$+ a_1^2 b_0 b_2 - a_1 a_2 b_0 b_1 + a_2^2 b_0^2.$

53. $R(f, \varphi) = 3$. Общих корней нет.

54. $R(f, \varphi) = 0$. Есть общие корни.

55. $$R(\varphi, \quad f) = \begin{matrix} a_0, & a_1, \ldots & a_n \\ a_1, & a_2, \ldots & a_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & a_0 \ldots & a_{n-1} \end{matrix}$$

58. *Указание*: Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

59. *Указание*: Заменить в выражении функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ аргумент x на $x+t$. Показать, пользуясь свойствами результанта, что результант, составленный из коэфициентов преобразованных функций

$$f \quad (x+t) = a_0' x^n + a_1' x^{n-1} + \ldots + a_n', \quad \varphi(x+t) = b_0' x^m + b_1' x^{m-1} + \ldots + b_m',$$

удовлетворяет соотношению

$$R(a_0', a_1', \ldots a_n', b_0', b_1' \ldots b_m') = R(a_0, a_1, \ldots a_n, b_0, b_1, \ldots b_m),$$

и, найдя производные $\frac{\partial a_i'}{\partial t}$, $\frac{\partial b_k'}{\partial t}$ $(i = 1, 2, \ldots n, \quad k = 1, 2, \ldots m)$, взять производную по t от обеих частей этого соотношения.

60. *Указание*: Пользуясь результатом задачи 57, показать, что

$$R(a_0, a_1, \ldots a_{k-1}, a_k + \lambda b_0, a_{k+1} + \lambda b_1, \ldots a_{k+m} + \lambda b_m, a_{k+m+1}, \ldots a_n, b_0, b_1, \ldots b_m) =$$
$$= R(a_0, a_1 \ldots a_n, b_0, b_1 \ldots b_m),$$

и, дифференцируя по λ, вывести отсюда предложенное соотношение.

61. *Указание*: Предположив, что $\omega(a_0, a_1, \ldots a_n, b_0, b_1, \ldots b_m)$ делит $R(a_0, \ldots a_n$ $b_0, \ldots b_m)$, заменить функцию $\omega(a_0, \ldots a_n, b_0, \ldots b_m)$ ее выражением через корни функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ и показать, пользуясь выражением результанта и симметричностью R и ω относительно корней функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, что

$$\omega(a_0, \ldots a_n, b_0 \ldots b_m) = A \Pi (x_i - y_k),$$

где A есть постоянное, равное $a_0^m b_0^n$.

62. $$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \end{matrix} = 0.$$

63. $$\begin{matrix} a_0, & a_1, & a_2, & 0 \\ 0, & a_0, & a_1, & a_2 \\ 0, & b_0, & b_1, & b_2 \\ b_0, & b_1, & b_2, & 0 \end{matrix} = 0.$$ Общий делитель $\begin{matrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{matrix} x + \begin{matrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{matrix}$

64.
$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ 0, & 0, & 0, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \\ 0, & 0, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & 0 \\ 0, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & 0, & 0 \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & 0 \\ 0, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ 0, & 0, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ 0, & 0, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \\ 0, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \text{ не} = 0.$$

Общий делитель

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ 0, & a_0, & a_1, & a_2 \\ 0, & b_0, & b_1, & b_2 \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix}$$

65. $x - 1$.

66. $x^2 + x + 1$.

67. $x^2 - x + 1$.

68. $x^2 + 4x + 3$.

69. $(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2) = 0$. Третий корень первого уравнения $-\dfrac{c_1(b_1 - b_2)}{c_1 - c_2}$. Третий корень второго уравнения $-\dfrac{c_2(b_1 - b_2)}{c_1 - c_2}$.

70.
$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & a, & b, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & a, & b, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & a, & b \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & a', & b' \\ 0, & 0, & 1, & 0, & a', & b', & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a', & b', & 0, & 0 \\ 1, & 0, & a', & b', & 0 & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

71. $\lambda = 10, \quad \mu = -5$.

72. $y_1 = 0, \quad x_1 = 0; \quad y_2 = 0, \quad x_2 = 0; \quad y_3 = -1, \quad x_3 = 2;$
$y_4 = 2, \quad x_4 = 1; \quad y_5 = 2{,}52, \quad x_5 = 1{,}68.$

Указание. Исключить x. Решить полученное уравнение и в соответствии с каждым корнем y_i последнего уравнения определить те значения x, при которых оба уравнения

$$5x^2 - 5y_i^2 - 3x + 9y_i = 0, \qquad 5x^3 + 5y_i^3 - 15x^2 - 13xy_i - y^2 = 0$$

одновременно удовлетворяются.

73. $x_1 = 1, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 1; \quad x_3 = y_4 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{4},$

$y_3 = x_4 = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{4}; \quad x_5 = y_6 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{4}, \quad x_6 = y_5 = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{4}$

$$75.\quad \begin{matrix} a_1b_0 - a_0b_1, & a_2b_0 - a_0b_2, & a_3b_0 \\ a_2b_0 - a_0b_2, & a_2b_1 - a_1b_2 + a_3b_0, & a_3b_1 \\ b_0, & b_1, & b_2 \end{matrix} = 0.$$

76. *Указание*. Воспользоваться уравнениями, определяющими $c_{i,k}$.

77. Воспользоваться результатом предыдущей задачи, помня, что

$$\mu_{ik} + \mu_{ki} = 0, \qquad \mu_{kk} = 0.$$

$$78.\quad \begin{matrix} a_0b_1 - a_1b_0, & a_0b_2 - a_2b_0, & a_0b_3 - a_3b_0, & a_0b_4 \\ a_0b_2 - a_2b_0, & a_0b_3 - a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1, & a_0b_4 + a_1b_3 - a_3b_1, & a_1b_4 \\ a_0b_3 - a_3b_0, & a_1b_3 - a_3b_1 + a_0b_4, & a_2b_3 - a_3b_2 + a_1b_4, & a_2b_4 \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \end{matrix} = 0$$

$$\begin{matrix} a_0b_1 - a_1b_0, & a_0b_2 - a_2b, & a_0b_3 - a_3b_0 \\ a_0b_2 - a_2b_0, & a_0b_3 - a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1, & a_0b_4 \\ a_0b_3 - a_3b_0, & a_1b_3 - a_3b_1 + a_0b_4, & a_2b_3 - a_3b_2 + a_1b_4 \end{matrix} = 0.$$

Общий наибольший делитель

$$\begin{matrix} a_0b_1 - a_1b_0, & a_0b_2 - a_2b_0 \\ a_0b_2 - a_2b_0, & a_0b_3 - a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1 \end{matrix} x^2 + \begin{matrix} a_0b_1 - a_1b_0, & a_0b_3 - a_3b_0 \\ a_0b_2 - a_2b_0, & a_0b_4 + a_1b_3 - a_3b_1 \end{matrix} x +$$

$$+ b_4 \begin{matrix} a_0b_1 - a_1b_0, & b_0 \\ a_0b_2 - a_2b_0, & b_1 \end{matrix}$$

79. $x^2 - 3x + 1$.

80. $x - 1$.

$$81.\quad \begin{matrix} 7, & 2m - 16, & 15 \\ 2m - 26, & 2m^2 - 49m + 111, & 15m - 93 \\ 15, & 15m - 93, & 21m + 162 \end{matrix} = 0.$$

82. $m^4 - 9m^2 + 54 = 0$.

83. $28m^3 + 713m^2 - 100m$.

84. $(n'^2 - m'^2n' - nn' + mm'n' + q)^2 - (2m'n' - mm' +$
$+ p - n'^3 + mm'^2 - nm')\ (m'q - m'n'^2 + mn'^2 - pn') = 0$.

85. Степень дискриминанта $2n - 2$. Вес дискриминанта $n(n-1)$.

86. *Указание*: Воспользоваться соотношением

$$f'(x_i) = a_0(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})\ (x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n).$$

87. $D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}$. *Указание*: Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

88. $M = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n$.

$$89.\quad a_0 D(a_0, a_1 \ldots a_n) = \left.\begin{matrix} a_0, & a_1, & \ldots & a_{n-1}, & a_n, & 0 \ldots 0 \\ 0, & a_0, & \ldots & a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & na_0, & \ldots & 2a_{n-2}, & a_{n-1}, & 0 \ldots 0 \\ na_0, & (n-1)a_1, & \ldots & a_{n-1}, & 0, & 0 \ldots 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} n-1 \\ \text{строка} \\ \\ \\ n \text{ строк} \\ \\ \end{matrix}$$

90. $D(a_0, a_1, a_2, a_3) = 27a_0^2a_3^2 - 18a_0a_1a_2a_3 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - a_1^2a_2^2$.

91. *Указание*: Допустив, что $D(a_0, a_1 \ldots a_n)$ имеет делитель $\varphi(a_0, a_1 \ldots$ представить его в виде функции $x_1, x_2 \ldots x_n$ и, пользуясь симметричностью функции и выражением дискриминанта через корни, показать, что

$$\varphi(a_0, a_1, \ldots a_n) = Ma_0^{2n-2} \Pi (x_i - x_k).$$

92. *Указание*: Воспользоваться результатом задач 89 и 86.

93. $\lambda^3 + 1 = 0$.

94. Нет кратных корней.

95. Есть кратные корни.

96. Нет кратных корней.

97. $64p^5 + 625q = 0$.

98. $\lambda = 11$.

99. $m = -2$; $n = -1$.

100. $m = -75$, $n = -6$, $p = 2{,}5$.

101. $m = 320$, $n = 512$; $m = 160$, $n = 96$; $m = 316{,}25$, $n = -529$.

102. Два двойных корня при $p = -12$, $q = 9$.

Один тройной и один простой корень при

$$p = \frac{4-27+16\sqrt{3})}{3}, \quad q = \frac{1}{3}(-111 + 64\sqrt{3});$$

$$p = \frac{4}{3}(-27-16\sqrt{3}), \quad q = \frac{1}{3}(-111 - 64\sqrt{3}).$$

ОТДЕЛ VI.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ.

2. $y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 10y^2 - 2y - 5 = 0$.

3. $\alpha = 2$. $y^4 - 23y^2 - 60y - 45 = 0$.

4. $4f'^3\left(-\frac{a}{3}\right) + 27f^2\left(-\frac{a}{3}\right) \leqq 0$,

где

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

5. $(m-1)a_1^m - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a_0a_1^{m-2}a_2 +$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_0^2a_1^{m-3}a_3 - \ldots + (-1)^{m-1} a_0^{m-1} a_m = 0.$$

6. Корни уравнения: $-1 \pm i\sqrt{2}$, $-1 \pm i\sqrt{3}$.

7. Преобразованное уравнение: $x^4 - 24x^2 - 1 = 0$. Корни его $\pm\sqrt{12 \pm \sqrt{145}}$.

8. $\lambda = 78$; $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -4$, $x_4 = -5$.

9. $y^4 + 8y^3 - 111y - 196 = 0$; $y^4 - 8y^3 + 17y - 8 = 0$.

11. $y^3 - 18y + 27 = 0$; $x_i = \frac{1}{3} y_i$, $i = 1, 2, 3$.

12. $y^4 - 4y^3 + 12y^2 - 18y + 27 = 0$. Подстановка $y = 3x$.

13. $y^4 - 9y^3 + 1875y^2 - 1500y + 2250 = 0$. Подстановка $x = \frac{1}{5y}$

14. $y^4 - 25y^3 + 375y^2 - 11\,700 = 0$. Подставка $30x = y$.

15. $b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n = 0$, где $b_s = (-1)^s \lambda a_s$, λ – произвольное число.

16. *Указание*: Воспользоваться обстоятельством, что одно уравнение получается из другого подстановкой $y = ix$.

18. $y^5 + 2y^4 + 5y^3 + 3y^2 - 2y - 9 = 0$

Есть мнимые корни.

19. Имеет мнимые корни. Преобразованное уравнение $x^3 - 7x^2 - 11x - 4 = 0$.

20. Корни уравнения 2, $\pm\sqrt{2}$.

Указание: Составить уравнение, корни которого равны квадратам корней данного. Использовать то обстоятельство, что данное уравнение и преобразованное имеют общий корень.

21. *Указание*: Изучить коэфициенты уравнения, корни которого равны квадратам корней данного.

23. $y^5 + 8y^3 - 6y^2 + 6y - 1 = 0$.

24. $y^2 - 2y + 1 = 0$.

25. $y^4 + 14y^3 + 50y^2 + 6y + 1 = 0$.

26. $y^3 - 8y^2 + 8y - 1 = 0$.

27. $(-1)^{m-1} y^n + p^m y^m + \left(\frac{m}{1}\right) p^{m-1} q y^{m-2} + \ldots + q^m = 0$.

Указание: Преобразованное уравнение получается заменой x^m на y из уравнения

$$(\omega_1 x^n + px^m + q)\ (\omega_2 x^n + px^m + q) \ldots (\omega_m x^n + px^m + q) = 0,$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ суть корни уравнения $\omega^m = 1$.

28. $a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + \ldots + a_n = 0$.

29. $y^5 - 6y^3 - 28y - 16 = 0$.

30. Коэфициенты уравнения удовлетворяют условию $a_{n-k} = \pm a_k \lambda^{\frac{n-k}{2}}$ Если уравнение имеет корень x_k, то оно имеет и корень $\frac{\lambda}{x_k}$. Уравнение нечетной степени имеет корень $+\sqrt{\lambda}$ или $-\sqrt{\lambda}$.

31. *Указание*: Преобразовать уравнение подстановкой $y = x + \frac{\lambda}{x}$ Преобразованное уравнение можно составить, заменяя в произведении

$$f(x) \cdot f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)\left(\frac{\lambda}{x} - x_k\right) = \frac{a_n}{a_0} \prod_{k=1}^{n} \left(x + \frac{\lambda}{x} - x_k - \frac{\lambda}{x_k}\right)$$

$x + \frac{\lambda}{x}$ на y. Левая часть уравнения

$$\prod_{k=1}^{n} \left(y - x_k - \frac{\lambda}{x_k}\right) = 0$$

по разделении на $y - 2\sqrt{\lambda}$ или $y + 2\sqrt{\lambda}$, в случае нечетного n, представляет полный квадрат, и решение уравнения сводится к уравнению степени $\frac{n-1}{2}$ при n нечетном и уравнению степени $\frac{n}{2}$ при n четном.

32. Корни: $m \pm \sqrt{m^2 - n}$, $\quad 2m \pm \sqrt{4m^2 - n}$.

Указание: Преобразовать уравнение подстановкой $y = x + \frac{n}{x}$.

33. $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = x_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

34. $x_1 = x_2 = 2$, $\quad x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = x_6 = -1$.

Указание: Преобразовать уравнение подстановкой $y = x + \frac{1}{x}$

35. $x_1 = 16, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = \frac{1}{4}$.

Указание: Преобразовать уравнение подстановкой $y = x + \frac{4}{x}$.

36. Преобразованное уравнение получится подстановкой $y = x + \frac{1}{x}$ из нения $f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, которое можно представить в виде

$$\frac{a_n}{a_0} \prod_{k=1}^{n} \left(x + \frac{1}{x} - x_k - \frac{1}{x_k}\right) = 0.$$

37. $b_m = \left(-\frac{i}{2}\right)^m f(i), \quad f(x) = x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \ldots + 1.$

Указание: Воспользоваться соотношением

$$b_m = \left(-\frac{1}{2}\right)^m \prod_{k=1}^{m} \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right) = \left(-\frac{i}{2}\right)^m \prod_{k=1}^{m} (i - x_k)\left(i - \frac{1}{x_k}\right)$$

38. *Указание*: Разбить левую часть на произведение двух множителей

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \quad \psi(x) = \left(x - \frac{1}{x_1}\right)\ldots\left(x - \frac{1}{x_n}\right), \quad |x_k| \leqq 1.$$

Показать, что коэфициент

$$a_n = \frac{1 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2 + b_n^2}{b_n},$$

если положить, что

$$\varphi(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n.$$

Вывести отсюда, что числа $b_1, b_2, \ldots b_n$ не могут быть все одновременно вещественными, и, опираясь на теорему Даламбера, заключить о существовании по крайней мере одного корня x_k, модуль которого равен единице.

39. *Указание*: Преобразовать уравнение подстановкой $x = \frac{1}{y} + y$ и, воспользовавшись результатом предыдущей задачи, показать, что существует корень $x_i = 2\cos\varphi$, где $y_i = \cos\varphi + i\sin\varphi$ — корень преобразованного уравнения.

40. *Указание*. Преобразовать уравнение подстановкой

$$x = 2y \sqrt[2n+1]{\frac{m}{2}}$$

и воспользоваться результатом предыдущ й задачи.

41. *Указание*: Представить левую часть уравнения в виде суммы

$$(a_0 - a_1)x^n + (a_1 - a_2)(x^n + x^{n-1}) +$$
$$+ (a_2 - a_3)(x^n + x^{n-1} + x^{n-2}) + \ldots + a_n(x^n + x^{n-1} + \ldots + 1).$$

Отметить, что при $|x| = 1$ точки $z_0 = x^n, \quad z_1 = x^n + x^{n-1}, \ldots z_n = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$ лежат на окружности C радиуса единицы, проходящей через точку 0. Приняв во внимание, что все числа $a_0 - a_1, \; a_1 - a_2, \ldots a_n$ одного знака, вывести, что точка

$$Z = |a_0 - a_1| z_0 + |a_1 - a_2| z_1 + \ldots + |a_n| z_n$$

лежит внутри окружности C и потому отлична от 0 во всех случаях за исключением одного, когда $a_0 = a_1, = \ldots = a_n$ и $x^n + x^{n-1} + \ldots + 1 = 0$.

42. *Указание*: Предположив $r = |x| > 1$, преобразовать уравнение подстановкой $x = ry$ и воспользоваться результатом предыдущей задачи.

43. *Указание*: Показать, что все корни уравнения

$$\prod_{i=1}^{2n} (y - y_i) = 0; \quad y_i = \left(\frac{x_i + 1}{x_i - 1}\right)^2; \quad i = 1, 2 \ldots 2n$$

двойные, исходя из того, что y_i не меняет своей величины от замены x_i на x_i^{-1}. Заключить отсюда, что решение преобразованного уравнения приводится к решению уравнения степени n.

44. $$b_n = \frac{f(-1)}{f(1)}, \quad \text{где } f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + 1.$$

Указание: Воспользоваться соотношением

$$b_n = (-1)^n \frac{(x_1 + 1)^2 \ldots (x_n + 1)^2}{(x_1 - 1)^2 \ldots (x_n - 1)^2} = \frac{(x_1 + 1)\left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \ldots (x_n + 1)(x_n^{-1} + 1)}{(1 - x_1)(1 - x_1^{-1}) \ldots (1 - x_n)(1 - x_n^{-1})}.$$

46. $y^3 - 7y + 11y - 5 = 0$.

47. $y^3 - 18y^2 + 69y - 52 = 0$.

48. $y^4 - y^3 - 3y^2 + y + 2 = 0$.

49. $y^3 - 1 = 0$. Корни данного уравнения $2 \pm i\sqrt{3}$, 2.

50. $y^4 - 1 = 0$. Корни данного уравнения 2, 4, $1 \pm i$.

51. $(y - 1)^2 (y + 1)^2$. Корни данного уравнения: 2, -3, $\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$

52. $\lambda = -\frac{3q}{2p} \pm \frac{3}{p}\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad \mu = \frac{2p}{3}$

Указание: Приравнять нулю второй и третий коэфициенты преобразованного уравнения и из полученных уравнений вычислить λ и μ.

53. $79y^3 + y^2 - 7y - 1 = 0$.

Указание: Привести функцию $\frac{x}{x^4 - x^2 - 1}$ от корня данного уравнения к целому виду.

54. $-\frac{7}{79}$

Указание: Воспользоваться предыдущей задачей.

55. *Указание*. Преобразовать уравнение $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n = 0$ подстановкой $y = \varphi(x)$. Показать, что преобразованное уравнение $F(y) = 0$ отлично от данного. Использовать то обстоятельство, что данное уравнение и преобразованное имеют общие корни, составив $[f(x), F(x)]$.

56. *Указание*: Преобразовать данное уравнение подстановкой $y = 2 - x^2$.

59. $y^3 + 4y^2 + 7y + 10 = 0$.

60. $y^6 - 6y^4 - 19y^2 = 0$.

61. $y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + ab - c = 0$.

62. $ab - c = 0$.

63. $y^6 + 3y^5 + 3y^4 + y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 0$.

64.

$$f\left(\frac{y}{2}\right) \cdot F(y) = \begin{array}{l} \left.\begin{array}{llll} (-1)^n \frac{f^{(n)}(y)}{n!}, & (-1)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} \ldots f(y), & 0 \ldots 0 \\ 0, & (-1)^n \frac{f^{(n)}(y)}{n!} \ldots -f'(y), & f(y) \ldots 0 \end{array}\right\} n \text{ строк} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{llll} 0, & a_0, & \ldots a_{n-1}, & a_n \ldots 0 \\ a_0, & a_1, & \ldots a_n, & 0 \ldots 0 \end{array}\right\} n \text{ строк} \end{array}$$

где $f(x)$ обозначает левую часть данного уравнения, а $F(y)$ — преобразованного.

Указание: Воспользоваться обстоятельством, что при $y = x_i + x_k$ $f(x)$ и $f(y-x) = 0$ имеют общий корень x_k.

65. $m = \frac{n(n-1)}{2}$, $S_k = \frac{1}{2}(s_k^2 - s_{2k})$.

66. $y^3 - 2y^2 - 1 = 0$.

67. $y^6 - 2y^4 - y^3 - 4y^2 + 8 = 0$.

68. Если через $f(x)$ обозначить левую часть предложенного уравнения, а через $\varphi(x)$ функцию, которой корни равняются квадратам корней данного уравнения, левая часть искомого уравнения

$$F(y) = 0$$

определится равенством

$$\varphi(y) \cdot F(y) = \begin{array}{l} \left.\begin{array}{llllll} a_n, & a_{n-1}y, & \ldots & a_0y^n & 0 & \ldots 0 \\ 0, & a_n, & \ldots & a_1y^{n-1}, & a_0y^n & \ldots 0 \end{array}\right\} n \text{ строк} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left.\begin{array}{llllll} 0, & a_0, & \ldots & a_{n-1}, & a_n & \ldots 0 \\ a_0, & a_1, & \ldots & a_n, & 0 & \ldots 0 \end{array}\right\} n \text{ строк} \end{array}$$

75. *Указание*: Использовать обстоятельство, что функции $f(x)$ и $f\left(\frac{y}{x}\right)$ имеют общий корень при $y = x_i \cdot x_k$.

69. $m = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$; $2S_k = s_0s_{2k} + \binom{k}{1} s_2s_{2k-2} + \ldots + s_{2k}s_0 - 2^k s_{2k}$.

70. $y^3 - 28y^2 + 245y - 650 = 0$.

71. $m = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$; $2S_k = s_0s_{2k} - \binom{k}{1} s_1s_{2k-1} + \ldots + s_{2k}s_0$.

72. $y^3 + 6py^2 + 9p^2y + 4p^3 + 27q^2 = 0$.

73. $y^3 - 30y^2 + 225y - 68 = 0$.

74. $y^3 - 18y^2 + 81y = 0$.

75. *Указание*: Умножить левую часть уравнения на

$$\begin{array}{llll} 1 & 1, & \ldots & 1 \\ 1 & \alpha & \ldots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha^{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha^{n-1} & \ldots & \alpha^{(n-1)^2} \end{array}$$

где α — первообразный корень степени n из единицы, и представить ее в виде произведения

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(t + \alpha^k)^n - 1}{t}.$$

Показать, что произведение обращается в нуль при $t = \alpha^i - \alpha^k$ $(i \neq k)$, и сделать отсюда требуемые заключения.

76.
$$\frac{1}{(\sqrt{y})^n}\begin{vmatrix} \frac{1}{n!}f^{(n)}(\sqrt{y}), & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\sqrt{y}), & \dots f(\sqrt{y}), & 0 & \dots 0 \\ 0, & \frac{1}{n!}f^{(n)}(\sqrt{y}), & \dots f'(\sqrt{y}), & f(\sqrt{y}) & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & a_0, & \dots a_{n-1}, & a_n & \dots 0 \\ a_0, & a_1, & \dots a_n, & 0 & \dots 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Указание: Воспользоваться тем, что при $y=(x_i-x_k)^2$ уравнения $f(x)=0$ и $f(\sqrt{y}+x)=0$ имеют общий корень.

77. $ry^3-q(1+r)y^2+p(1+r)y-(1+r)^3=0.$

Указание: Заметить, что $y_i=\frac{x_1\cdot x_2\cdot x_3+1}{x_i}=\frac{r+1}{x_i}$

78. $y^3-4y^2+7y+3=0.$

Указание: Заметить, что $y_i=x_i-x_i^2$.

79. $25y^3+37y^2+18y+3=0.$

Указание: Заметить, что $y_i=\frac{x_i}{1-2x_i}$.

80. $(y+p)^3=0.$

Указание: $y_i=x_i^2+\frac{q}{x_i}$.

81. $$y^3-5y^2-17y+29=0.$$

Указание: Воспользоваться преобразованием
$$y=s_2-2x^2.$$

82. $245y^3+288y^2-153y+145=0.$

Указание: $y_i=\frac{x_i^3+3}{3(x_i+1)}$.

83. $15y^3-12y^2-6y-5=0.$

Указание: Воспользоваться тем, что равенство
$$y=\frac{x_1x_2-x_3x_4}{x_1+x_2-x_3-x_4},$$
как легко в том убедиться, представив его в форме
$$(y-x_1)(y-x_2)=(y-x_3)(y-x_4),$$
выражает условие, что произведение двух корней уравнения $f(x-y)=0$ равно произведению двух других его корней. Найти значения y, удовлетворяющие этому условию, приняв во внимание результат задачи 66 отдела III.

84. $m=\frac{n(n-1)}{2}$, $S_k=s_k\cdot s_{-k}-n.$

85. $(y^2+y+1)^3+y^2(y+1)^2=0.$

86
$$\frac{1}{(y-1)^n}\begin{vmatrix} a_0y^n, & a_1y^{n-1}, & \dots a_n, & 0 & \dots 0 \\ 0, & a_0y^n, & \dots a_{n-1}y, & a_n & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & a_0, & \dots a_{n-1}, & a_n & \dots 0 \\ a_0, & a_1, & \dots a_n, & 0 & \dots 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Указание: Отметить, что уравнение $f(x)=0$ и $f(yx)=0$ имеют общий корень при $y=\frac{x_i}{x_k}$

87. $y^3+5y+6y-9=0$.

Указание: Заметить, что $y_i=x_i(2+x_i)^2-2$.

88. $a_0^6y^3+9a_0^4(a_0a_2-a_1^2)y^2-27[(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)-4(a_0a_2-a_1^2)^3]=0$

Указание: $y_i=f'(x_i)=3(a_0x_i^2+2a_1x_i+a_2)$.

89. $a_0^3y^3-6a_0^2a_3y^2+4a_0(4a_1a_3-a_0a_4)y-8(2a_0a_3^2-3a_0a_2a_4+a_1^2a_4)=0$.

90. $a^2=46$.

ОТДЕЛ VII.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-й и 4-й СТЕПЕНИ.

2. $a+b,\quad a-b,\quad a$.

3. $a,\quad a+b,\quad a-b$.

4. $4a,\quad a+b,\quad a-b$.

5. $a+b,\quad a-b,\quad a-3b$.

6. $a^2+ab,\quad 2(ab+b^2),\quad a^2+b^2$.

7. $a,\quad 2a,\quad 3a^{-1}$.

8. $a+b,\quad a^{-1},\quad b^{-1}$.

9. $ab,\quad a^{-1},\quad b^{-1}$.

10. $a-1,\quad a+1,\quad a^2+1$.

11. $1,\quad 1+i,\quad 1+2i$.

12. $4i,\ 1+i,\quad -1+i$.

13. $2+i,\quad 2-i,\quad 2+3i$.

14. $x=uv^2+u^2v$,

где

$$u=\sqrt[3]{\frac{3}{p}\left(\frac{q}{2}+\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)},\qquad v=\sqrt[3]{\frac{3}{p}\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$$

Значения кубических корней можно выбирать независимо один от другого.

Указание. Подставить выражение x в уравнение и подчинить выбор u, v условиям

$$\frac{p}{3}(u^6+v^6)=q,\quad u^3v^3=-\frac{p}{3}.$$

15. $$u^3=-\frac{(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)^3}{9p},\quad v^3=-\frac{(x_1+\omega^2x_2+\omega x_3)^3}{9p}$$

или

$$u^3=+\frac{1}{3}\,\frac{x_2x_3+\omega^2x_1x_3+\omega x_1x_2}{x_1+\omega^2x_2+\omega x_3},\quad v^3=+\frac{1}{3}\,\frac{x_2x_3+\omega x_1x_3+\omega^2x_1x_2}{x_1+\omega x_2+\omega^2x_3}$$

$$F(x_1,x_2,x_3)=-\frac{(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)^3}{9p}$$

Указание: Воспользоваться соотношениями

$$x_1=u^2v+uv^2,\quad x_2=u^2v\cdot\omega^2+uv^2\cdot\omega,\quad x_3=u^2v\cdot\omega+uv^2\cdot\omega^2.$$

16. $$u=\frac{1}{3}(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3).$$

$$v=\frac{1}{3}(x_1+\omega^2x_2+\omega x_3),\quad F(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{27}(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)^3.$$

17. Резольвента

$$a_0^6 y^6 + 27a_0^3 (a_0^2 a_3 + 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) y^3 - 72q (a_0 a_2 - a_1^2)^3 = 0.$$

При этом произведение двух значений вспомогательной функции

(*) $$a_0^2 (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3) = 27 (a_1^2 - a_0 a_2).$$

Найдя корни $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ резольвенты, где

$$y_i = \omega^{i-1}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad y_i = \omega^{i-1}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3), \quad i = 4, 5, 6$$

определим соответствующие корни предложенного уравнения по формулам:

$$x_1 = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{y_1 + y_4}{3}, \quad x_2 = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{y_2 + y_5}{3}, \quad x_3 = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{y_3 + y_6}{3}.$$

Замечание: При составлении резольвенты полезно иметь в виду, что

α) $$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 + (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^3 =$$

$$= \prod_{k=1}^{3} [x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \omega^k (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)] =$$

$$= (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2) =$$

$$= 27\left(x_1 + \frac{a_1}{a_0}\right)\left(x_2 + \frac{a_1}{a_0}\right)\left(x_3 + \frac{a_1}{a_0}\right) = -\frac{27}{a_0} f\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$$

где $f(x)$ обозначает левую часть предложенного уравнения;

β) $$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^3 = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)]^3 =$$

$$= \frac{3^6}{a_0^6} (a_1^2 - a_0 a_2)^3$$

18. Резольвента

$$(a_0 a_2 - a_1^2) y^2 + (a_0 a_4 - a_1 a_3) y + (a_2 a_4 - a_3^2) = 0.$$

Корни данного уравнения выражаются через корни уравнения y_1, y_2 посредством равенств

$$x_i = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{\omega^{i-1}\sqrt[3]{w_2} + \omega^{1-i}\sqrt[3]{w_1}}{3}; \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\sqrt[3]{w_1}\sqrt[3]{w_2} = \frac{9(a_1^2 - a_0 a_2)}{a_0^2}$$

где

$$w_i = 9a_0 (a_1^2 - a_0 a_2)(a_0 y_i - 3a_1).$$

Указание: Показать, что

$$\frac{(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3}{(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)} =$$

$$= \frac{x_1^2 + 2x_1 x_3 + \omega(x_3^2 + 2x_1 x_2) + \omega^2(2x_1 x_3 + x_2^2)}{x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3} = -6a_1 a_0^{-1} +$$

$$+ \frac{-x_1^2 - \omega^2 x_2^2 - \omega x_3^2}{x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3} = -3\frac{a_1}{a_0} + \frac{x_2 x_3 + \omega x_1 x_2 + \omega^2 x_1 x_3}{x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2}$$

Вывести отсюда соотношение

$$\frac{a_0^2 (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3}{9(a_1^2 - a_0 a_2)} = y_1 - 3\frac{a_1}{a_0}$$

и, воспользовавшись им, выразить корни уравнения через корни резольвенты.

20. $4a$, $6a$, $a - b$, $a + b$.

21. $3a$, $a + 1$, 2, -3.

22. a. $2a$, $a + 2$, 2.

23. ± 1, $\pm a$.

24. $2 \pm \sqrt{3}, \quad 1 \pm \sqrt{7}.$

26. *Указание*: Воспользоваться результатом задачи 25.

30. t является корнем уравнения:

$$4a_0^3 t^2 - a_0 (a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) t + a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3 = 0.$$

$$P^2 = a_1^2 - a_0 a_2 + a_0^2 t, \quad PQ = a_1 a_2 - a_0 a_3 + 2a_0 a_1 t, \quad Q^2 = (a_3 + 2a_0 t)^2 - a_0 a_4.$$

Способ решения уравнения 4-й степени: Определив корень уравнения t, вычислить P и Q и, разложив левую часть данного уравнения на множители, свести его решение к решению квадратных уравнений

$$a_0 x^2 + 2(a_1 + P)x + a_2 + 2a_0 t + Q = 0$$
$$a_0 x^2 + 2(a_1 - P)x + a_2 + 2a_0 t - Q = 0.$$

31. $a + 1, \quad a - 1, \quad a + 3, \quad 2.$

32. $a + b, \quad a - b, \quad 2a, \quad 4b.$

33. $3, \quad 1, \quad 3 \pm \sqrt{30}.$

34. $-2 \pm \sqrt{2}, \quad 2 \pm \sqrt{17}.$

35 $\pm \sqrt{11}, \quad 3 \pm \sqrt{7}.$

36. $12t_1 = (x_3 - x_1)(x_2 - x_4) - (x_1 - x_2)(x_3 - x_4),$

$12t_2 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) - (x_2 - x_3)(x_1 - x_4),$

$12t_3 = (x_2 - x_3)(x_1 - x_4) - (x_3 - x_1)(x_2 - x_4).$

Указание: Воспользоваться результатом задачи 25, заметив, что

$$a_0^2 t_i = z_i + a_0 a_2 - a_1^2,$$

где z_i есть корень уравнения (**).

37. $a_0 x_i = \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 + a_0^2 t_1} + \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 + a_0^2 t_2} + \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 + a_0^2 t_3} - a_1,$

где квадратные корни принимают значения, удовлетворяющие соотношению

$$2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 + a_0^2 t_1} \cdot \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 + a_0^2 t_2} \cdot \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 + a_0^2 t_3} =$$
$$= 3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3 - a_0^2 a_3.$$

Указание: Воспользоваться тем обстоятельством, что уравнение для t есть преобразованное уравнение (**).

38. *Указание*: Воспользоваться результатом задачи 36.

39. p удовлетворяет уравнению $p^3 + ap + b = 0$. Его корни p_1, p_2, p_3. q и q' суть корни уравнения $u^2 - (a + p_i)u + c = 0$.

Способ решения: найти один из корней уравнения p_i, вычислить корни квадратного уравнения q_i, q_i' и свести решение уравнения 4-й степени к решению уравнений

$$x^2 + p_i x + q_i = 0, \quad x^2 - p_i x + q_i' = 0.$$

40. $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}, \quad -\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 8}).$

Указание: Преобразовать предварительно уравнение так, чтобы в нем исчез второй член.

41. $-\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}), \quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a}$

42. $-1, \quad -2, \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{4}$

43. $x^4 + 12x + 3 = (x^2 - x\sqrt{6} + 3 + \sqrt{6})(x^2 + x\sqrt{6} + 3 - \sqrt{6})$

44. $x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 84x - 63 =$

$= [x^2 - 2x(2 + \sqrt{7}) + 3\sqrt{7}]\,[x^2 - 2x(2 - \sqrt{7}) - 3\sqrt{7}]$

45. $p_1 = \dfrac{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{2}$, $\quad p_2 = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}{2}$

$$p_3 = \frac{x_1 - x_2 - x_3 + x_4}{2}$$

46. Вспомогательная функция способа Эйлера: $\dfrac{a_0^2}{16}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$; в способе Феррари $(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) - (x_1 - x_4)(x_3 - x_2)$; в способе Декарта $\dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$.

Вспомогательная функция Феррари есть линейная функция от вспомогательной функции Эйлера или функции $x_1 x_2 + x_3 x_4$.

47. $4(a_0^2 U + a_0 a_2 - a_1^2)^3 - a_0^2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)(a_0^2 U + a_0 a_2 - a_1^2) +$
$+ a_0^3(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3) = 0.$

ОТДЕЛ VIII

ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ.

2. Все корни функции $F(x)$ вещественные и простые. При $\lambda \neq -1$ функция имеет корни $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$, причем $b_{k-1} < x_{k-1} < a_k$, $k = 2, 3, \ldots n$, корень $x_0 > b$, если $|\lambda| > 1$; $x_0 \leqslant a_1$, если $|\lambda| < 1$. При $\lambda = -1$ функция имеет $n - 1$ корней расположенных в промежутках $b_{k-1} < x_{k-1} < a_k$, $k = 2, 3, \ldots n$.

3. Все корни вещественные и простые. При $\lambda > 0$, $x_1 < a_1$, $b_{k-1} < x_k < a_k$ $(k = 2, 3, \ldots n)$.

При $\lambda < 0$, $a_k < x_k < b_k$, $(x = 1, 2, \ldots n - 1)$, $x_n > a_n$.

4 *Указание*: Убедиться, взяв результаты задач 1, 2, 3, что корни функции

$$f(x) + \lambda\varphi(x)$$

перемежаются корнями $\varphi(x)$ и $f(x)$. Сделать из этого надлежащий вывод, представив

$$f(x) + \mu\varphi(x) = [f(x) + \lambda\varphi(x)] + (\mu - \lambda)\varphi(x).$$

5. Возрастают вместе с λ.

Указание: Воспользоваться результатом предыдущей задачи, взяв функции

$$f(x) + \lambda\varphi(x) \quad \text{и} \quad f(x) + \lambda_1\varphi(x), \text{ где } \lambda_1 > \lambda.$$

$$\varphi(x) = (x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_n) \qquad f(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_n).$$

6. Все корни вещественные и простые $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$. $a_{2k-1} < x_{2k-1} < b_{2k-1}$ $b_{2k} < x_{2k} < a_{2k}$, $k = 1, \ldots n$.

7. *Указание:* Воспользоваться предыдущей задачей, представив последнее уравнение в виде

$$f(x) + \mu\varphi(x) = [f(x) + \lambda\varphi(x)] + (\mu - \lambda)\varphi(x),$$

$$f(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_{2n}), \qquad \varphi(x) = (x - b_1)\ldots(x - b_{2n}).$$

8. *Указание*: Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

11. $-2 \leqq \lambda \leqq 2$.

12. $\dfrac{q^4}{4^4} + \dfrac{p^5}{5^5} \leqq 0$.

13. $p \leqq -5$.

14. $q\left[\left(\dfrac{q}{6}\right)^5 + \left(\dfrac{p}{7}\right)^7\right] \leqq 0$.

15. $0 \leqq q \leqq 6$.

16. $\left(\dfrac{n \cdot q}{m - n}\right)^{m-n} + \left(\dfrac{np}{m}\right)^m > 0$.

17. Один корень.

18. $\lambda = -5$.

19. 2.

20. *Указание*: Подставить $x = 2\sqrt{p}$ в левую часть уравнения и использовать условие вещественности корней.

21. При четном n все корни уравнения мнимы. При нечетном n уравнение имеет один вещественный корень.

22. При нечетном n один вещественный корень. При четном n все корни мнимы.

Указание: Заключение следует производить от n к $n+1$.

Использовать соотношения

$$\varphi'_n(x) = \varphi_{n-1}(x), \qquad \varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \frac{x^n}{n!},$$

где

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + 1.$$

24. *Указание:* Воспользоваться теоремой Ролля, прилагая ее к промежуткам между двумя последовательными корнями. При изучении расположения корней $f'(x)$ принять во внимание значения x, превосходящие наибольший корень $f(x)$ и меньшие наименьшего из корней.

26. Все корни вещественны, различны и лежат в промежутке 0, 1.

27. Все корни вещественны.

Указание: Рассмотреть функцию $xf(x)$.

28. Все корни вещественны и лежат в промежутке $(0, -1)$.

Указание: Приложить результат предыдущей задачи к функции $(x+1)^m$

29. Все корни вещественны и различны.

Указание: Приложить теорему Ролля к функции $\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} - \lambda$, где λ — весьма малое положительное число, считая, что все корни $U_{n-1}(x)$ вещественны.

30. Все корни уравнения положительны.

Указание: Многочлен $P_n(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n} = (-1)^n e^{-x} P_n(x).$$

Воспользоваться теоремой Ролля, прилагая ее к функции $e^{-x}x^n - \lambda$, где λ достаточно малое положительное число.

31. Все корни вещественны.

Указание: Приложить теорему Ролля к функции $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$

32. Все корни вещественные.

Указание: Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

33. *Указание:* Положить в предыдущей задаче $k=2$, $k=3$ и воспользоваться признаками вещественности корней уравнений второй и третьей степени.

В том случае, когда все корни уравнения различны, знак $=$ отпадает.

34. *Указание*: Преобразовать функцию $f(x)$ подстановкой $x = y + u$ и приложить к функции

$$\varphi(y) = f(u) + f'(u)\cdot y + \ldots + y^n \frac{f^n(u)}{n!}$$

результат предыдущей задачи, считая u вещественным.

35. Все корни уравнения вещественны.

Указание: Определить расположение корней $f'(x)$ и приложить результат задачи 3.

36. Нет перемен знака.

37. Все числа одного знака.

38. Все корни $f(x)$ вещественные, простые и перемежаются корнями многочлена $\varphi(x)$.

39. Число вещественных корней больше или равно m.

Указание: Определить знак функции $F(x)$ при корнях уравнения $f'(x) = 0$. Показать, что в том случае, когда между последовательными корнями $f'(x)$ нет корней $f(x) - a$, функция $F(x)$ обращается в нуль нечетное число раз.

40. Число корней либо равно числу корней $f(x)$, либо меньше на число четное.

41. *Указание*: Приложить теорему Ролля к функции $x^\lambda f(x)$.

42. Все корни вещественны и лежат в промежутке $(-1, +1)$.

Указание: Воспользоваться соотношением

$$(1 - x^2)\varphi'_n(x) = n\varphi_{n-1}(x).$$

В задачах 44 — 51 через p обозначена верхняя граница числа положительных, через n верхняя граница числа отрицательных, через i нижняя граница числа мнимых корней уравнения.

44. $p = 2$, $n = 2$, $i = 2$.

45. $p = 1$, $n = 1$, $i = 2$. Уравнение имеет один положительный, один отрицательный и два мнимых корня.

46. $p = 2$, $n = 1$, $i = 6$.

47. $p = 1$, $n = 1$, $i = 8$.

48. $p = 1$, $n = 2$, $i = 8$.

49. $p = 1$, $n = 1$, $i = 4$.

50. $p = 1$, $n = 1$, $i = 2n - 2$.

51. $p = 0$, $n = 1$, $i = 2n$.

53. *Указание*: Умножить на $(x - 1)^2$.

54. *Указание*: Умножить на $(x - a)(x - b)$.

55. *Указание*: Умножить на $(x - 1)^{n-1}$.

56. Да.

Указание: Умножить на $x^2 - 1$.

57. Имеет не меньше двух мнимых корней

Указание: Умножить на $x^4 - 1$.

59. Нет вещественных корней

60. Все корни мнимы.

61. Один положительный корень в промежутке (1, 3). Один отрицательный корень.

62. Два отрицательных корня. Один больше, другой меньше -1.

63. Один положительный корень между 2 и 3. Два отрицательных корня. Один больше, другой меньше -1.

64. Один корень положительный, меньший единицы. Два или ни одного отрицательного корня.

65. *Указание*; Воспользоваться теоремой Ролля, приложив ее к функции $x^\lambda f(x)$. Число λ следует выбрать равным одному из чисел промежутка $(-p, -p+1)$, если коэфициенты a_p, a_{p-1}, противоположных знаков. Тогда число перемен знака в левой части уравнения будет меньше, чем в ряду $f x)$. Предполагая теорему справедливой, когда число перемен знака в ряду, представляющем функцию, меньше чем у $f(x)$, можно заключить, пользуясь $xf'(x) + \lambda f(x)$, что теорема справедлива и для $f(x)$.

66. *Указание*: Воспользоваться предыдущей задачей.

68. Один корень

69. *Указание*: Воспользоваться результатом задачи 66.

70. *Указание*: Заменить $e^x = y$ и применить правило Лагерра.

2. $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 30.$

3. $x_1 = 3,\ x_2 = 5,\ x_3 = 1,\ x_4 = -2.$

4. $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2$

5. $x_1 = 2,\ x_2 = 5,\ x_3 = 6,\ x_4 = -12$

6. $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 3,\ x_4 = -1,\ x_5 = -5$

7. $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 3,\ x_4 = -2,\ x_5 = -6$

8. $x_1 = 5,\ x_2 = 8,\ x_3 = 11$

9. $x_1 = -3,\ x_2 = 2.$

10. $x_1 = 3,\ x_2 = 5,\ x_3 = -1$

11. $x_1 = x_2 = x_3 = -2,\ x_4 = 7$

12. Нет целых корней.

13. $x_1 = -3.$

14. $x_1 = 6,\ x_2 = -5.$

16. $x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = \frac{1}{4},\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

17. $x_1 = -\frac{1}{3},\quad x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{1}{2},\quad x_4 = 1,\ x_5 = 2$

18. $x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = 2,\ x_5 = -1$

19. $x_1 = \frac{1}{3},\quad x_2 = \frac{1}{5}$

20. $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{5},\ x_3 = -1$

21. $x_1 = x_2 = -\frac{4}{3}.$

22. $x_1 = 0{,}3,\quad x_2 = 0{,}2,\quad x_3 = x_4 = -0{,}25.$

23. $x_1 = \frac{3}{11},\quad x_2 = 0{,}4,\quad x_3 = -2$

24. Нет рациональных корней.

25. $x_1 = 3,\quad x_2 = x_3 = \frac{2}{3}$

26. *Указание*: Разложить $f(x)$ по степеням $(x-1)$ и предположить x нечетным. Положить x в выражении $f(x)$ четным.

28. Уравнение имеет несоизмеримый корень в промежутке $-\alpha,\ -\alpha+1$ или $-\alpha,\ -\alpha-1$.

Указание: Показать, что числа $F(-\alpha)$ и $F(-\alpha+1)$ или $F(-\alpha-1)$ и $F(-\alpha)$ разных знаков, где $F(x)$ обозначает функцию, стоящую в левой части уравнения.

29. *Указание*: Представить уравнение в виде

$$(x-\alpha-\beta)^3 = (x-\alpha)^3 + (x-\beta)^3$$

и воспользоваться тем, что сумма кубов двух целых чисел не может быть кубом целого числа.

31. $(x^3+3x+1)\ (x^2+4x-1).$

32. $(x-2)\ (x-3)\ (x^2+x+1)$

33. $(x^2 - x + 1)(2x^2 + 3x - 1)$.

34. $(x^3 + x + 1)(2x^3 + 2x^2 + 3)$.

35. $(x + 1)(x - 3)(x^2 - x + 1)(x^2 - 4x + 1)$.

36. $(x + 1)^2 (x + 2)(x^3 + 2)$.

37. $(x^3 - x + 1)(x^2 - x + 1)$.

38. $(x^2 + 1)(x^3 - x^2 + 1)$.

39. $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$.

40. $(x^2 - x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

41. *Указание*: Помножить полином $x^3 + \lambda x \pm 1$ на многочлен третьей степени $x^3 + ax^2 + bx + c$ и сравнить произведение с заданной функцией.

ОТДЕЛ X

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ.

2. Корни уравнения заключены в промежутке $(-1, 5)$

Указание: При понижении верхней границы воспользоваться правилом Ньютона

3. Корни заключены в промежутке $(0, 18)$.

4. Корни заключены в промежутке $(-5, 1)$.

5. Корни заключены в промежутке $(-1, 4)$.

6. Корни заключены в промежутке $(-3, 1)$.

7. Корни заключены в промежутке $(0, 1)$.

8. Корни заключены в промежутке $(0, 7)$.

9. Корни заключены в промежутке $(0, 2)$.

10. Корни заключены в промежутке $(0, 1)$.

11. Корни заключены в промежутке $(-1, 1)$.

12. Корни заключены в промежутке $(0, 1)$.

13. Корни заключены в промежутке $(0, 1)$.

14. Корни заключены в промежутке $(0, 1)$.

15. Корни заключены в промежутке $(-3, 3)$.

16. Корни заключены в промежутке $(-3, 4)$.

17. Корни заключены в промежутке $(-3, 4)$.

18. Корни заключены в промежутке $(-20, 2)$.

19. *Указание*: Показать, что верхняя граница отрицательных корней уравнения -1 и нижняя граница отрицательных корней уравнения -1.

20. *Указание*: Воспользоваться неравенством:

$$f(x) \geqslant a_0 x^n + a_\alpha x^{n-\alpha} + \ldots + a_\lambda x^{n-\lambda} = a_0 x^n \left(1 + \frac{a_\alpha}{a_0 x^\alpha} + \ldots + \frac{a_\lambda}{a_0 x^\lambda}\right),$$

где $f(x)$ обозначает левую часть предложенного уравнения.

21. *Указание*: Положив $\frac{|a_\lambda|}{a_0} = l^\lambda$, $\frac{|a_\mu|}{a_0} = m^\mu$, убедиться в справедливости неравенства

$$\frac{1}{a_0} f(x) \geqslant x^n - mx^{n-1} - mlx^{n-2} - \ldots - ml^{\lambda-2} x^{n-\lambda+1} - l^\lambda x^{n-\lambda} -$$
$$- ml^\lambda x^{n-\lambda-1} - \ldots - ml^{n-1} > 0,$$

где $f(x)$ обозначает левую часть уравнения. Установить неравенство проще всего, показав, что

$$x^n - mx^{n-1} > lx^{n-1}, \quad x^n - mx^{n-1} - mlx^{n-2} > lx^{n-1} - mlx^{n-2} > l^2 x^{n-2} \ldots$$
$$x^n - mx^{n-1} - \ldots - l^\lambda x^\lambda > l^{\lambda-1} x^{n-\lambda+1} - l^\lambda x^{n-\lambda} > ml^{\lambda-1} x^{n-\lambda}, \ldots$$

при $x > l + m$. Число l предполагается большим чем m.

22. *Указание*: Обозначив через σ_k сумму положительных коэфициентов, a_k, представить левую часть уравнения $f(x)$ в виде

$$f(x) = (x-1)\,(a_0x^{n-1} + \sigma_1x^{n-2} + \sigma_2x^{n-3} + \ldots + \sigma_{n-1}) + \sigma_n + a_\alpha x^{n-\alpha} +$$
$$+ a_\beta x^{n-\beta} + \ldots + a_\lambda x^{n-\lambda} = \alpha_0(x-1)\,x^{n-1} + \sigma_1(x-1)\,x^{n-2} +$$
$$\ldots + \left[(x-1)\,\sigma_a + a_a\right] x^{n-a} + \ldots$$

26. Промежутки (0, 1), (— 3, 0) содержат по одному корню.

27. Промежутки (0, 2), (— 3, 0) содержат по одному корню.

28. Промежутки (3, 4), (— 1, 0) содержат по одному корню.

29. Промежутки (2, 3), (— 1, 0) содержат по одному корню.

30. Промежутки (0, 1), (— 2, 0) содержат по одному корню.

31. Тройной корень 1. Простой корень равен 2.

32. Промежутки (2, 3), (— 1, 0) содержат по одному двойному корню.

33. Промежутки (3, 4), (1, 3), (—1,5, —1), (—2, —1,5) содержат по одному корню.

34. Промежутки (0, 1), (— 3, — 2) содержат по одному корню.

35. Тройной корень 1. Простой корень — 1.

36. Промежутки (— 0,25, 1), (—0,5, — 0,25), (— 2, — 1) содержат по одному корню.

37. Уравнение имеет только один вещественный корень, заключенный в промежутке (0, 2).

38. Промежутки (0, 3), (— 0,1, 0), (— 0,1, — 1) содержат по одному корню.

39. Единственный вещественный корень уравнения содержится в промежутке (1, 2).

40. Промежуток (0, 1) содержит корень.

41. Корни уравнения содержатся по одному в промежутках (6, 7), (4, 5), (3, 4), (1, 2), (— 1, 0), (— 4, — 3).

42. Два двойных корня содержатся в промежутках (3, 4), (0, 1) по одному в каждом. Простые корни содержатся в промежутках (1, 2), (— 2, 0) по одному в каждом.

43. Промежутки (6, 7), (— 1, — 2) содержат по одному простому корню.

44. Корень 2 четвертой кратности. Два простых корня в промежутках (0, 1), (— 2, 0).

45. Промежутки (5, 6), (— 1, 0) содержат по одному простому корню.

46. Промежутки (0, 2), $(-c, 0)$ содержат по одному вещественному корню, если $c > 1$. Промежутки (0, 2), $(-c^{-1}, 0)$ содержат по одному вещественному корню, если $c < 1$. При $c = 1$ двойной корень 1.

47. Два двойных корня $\frac{1}{2}\,p\,(1 \pm \sqrt{5})$. Один простой корень — $2p$

48. Условие вещественности корней выражается неравенством

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leqq 0.$$

49. Условие вещественности корней выражается неравенством $p^5 \geqq q^2$. При $p^5 = q^2$ уравнение имеет кратные корни. В том случае, когда $p^5 < q^2$, уравнение имеет только один вещественный корень.

53. *Указание*: Вывести соотношения

$$P_{k+1}(x) - (2k+1-x)\,P_k(x) + k^2\,P_{k-1}(x) = 0.$$
$$P_{k+1}(x) = x\,P'_k(x) + (k+1-x)\,P_k(x)$$

и, воспользовавшись ими, показать, что ряд

$$P_n(x),\ P_{n-1}(x), \ldots P_1(x), P_0(x) = 1$$

обладает свойствами α), β), γ), δ). С помощью первого соотношения установить, что коэфициент при старшей степени x у $P_n(x)$ равен $(-1)^n$, и с помощью второго показать, что $P_k(0) = k!$

54. Корни многочлена $P_4(x)$ разделяются числами 6, 4, 2, 0.

55. *Указание*: Установить соотношения

$$\varphi_{k+1}(x) + (2k+2)\,x\varphi_k(x) + k(k+1)\,(1+x^2)\,\varphi_{k-1}(x) = 0,$$

$$\varphi'_k(x) + k(k+1)\,\varphi_{k-1}(x) = 0$$

и, пользуясь ими, показать, что ряд $\varphi_n(x), \varphi_{n-1}(x), \ldots \varphi_0(x) = 1$ обладает свойствами α), β), γ), δ). С помощью первого соотношения показать, что полиномы $\varphi_{2k+1}(x)$ нечетные, а полиномы $\varphi_{2k}(x)$ четные функции x и, пользуясь вторым, показать, что коэфициент при старшей степени x у многочлена $\varphi_k(x)$ равен $(-1)^k(k+1)!$ Из этих данных заключить о вещественности корней многочлена $\varphi_n(x)$.

56. Числа 2, 0, -2 разделяют корни многочлена $\varphi_n(x)$.

57. Все корни вещественные и отрицательные.

Указание: Вывести соотношения

$$\omega_{k+1}(x) - [(2k+2)\,x+1]\;\omega_k(x) + k(k+1)\,x^2\omega_{k-1}(x) = 0,$$

$$\omega_{k+1}(x) = [(2k+2)\,x+1]\;\omega_k(x) - x^2\omega'_k(x)$$

и показать, что ряд $\omega_n(x), \omega_{n-1}(x), \ldots \omega_0(x) = 1$ обладает свойствами α), β), γ), δ). С помощью второго равенства показать, что $\omega_n(0) = \omega_{n-1}(0) = \ldots = \omega_0(0) = 1$. Пользуясь первым, убедиться, что коэфициент при старшей степени x у многочлена $\omega_k(x)$ равен $k!$ Из этих данных заключить, что все корни многочлена $\omega_n(x)$ вещественны и отрицательны.

58. Корни многочлена перемежаются числами $-0{,}25$, $0{,}5$.

59. $m = n$, $v(+\infty) = 0$ и $v(-\infty) = n$, если произведение $f(x)\cdot f_1(x)$ при переходе через корни $f(x)$ меняет знак с $-$ на $+$; $v(+\infty) = n$, $v(-\infty) = 0$, если произведение $f(x)f_1(x)$ при переходе через корни $f(x)$ меняет знак с $+$ на $-$.

60. Все корни вещественны. Произведение $f(x)\cdot f_1(x)$ при переходе через корни $f(x)$ все время меняет знак с $-$ на $+$

61. *Указание*: Ряд $f_s(x), f_{s+1}(x)\ldots f_n(x)$ обладает свойствами α), β), γ). При достаточно больших положительных значениях x ряд представляет одни постоянства знака, при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях x одни перемены знака, или наоборот. Все корни функции $f_s(x)$, как то следует из предыдущей задачи, вещественны, и произведение $f_s(x)\cdot f_{s+1}(x)$ при переходе через корень $f_s(x)$ меняет все время знак с $-$ на $+$ или все время с $+$ на $-$. Сравнить $f_{s+1}(x_0+h)$ и $f_{s+1}(x_1-h)$, где x_0 и x_1 два смежные корня функции $f_s(x)$ и $h>0$, для того чтобы показать, что между каждой парой смежных корней $f_s(x)$ лежит корень $f_{s-1}(x)$.

62. *Указание*: Сравнить число $v(x)$ перемен знака в ряду

$$f(x),\ f_1(x), \ldots f_m(x)$$

числом $v_s(x)$ перемен знака в ряду

$$f_s(x), \ldots f_m(x)$$

и воспользоваться соотношениями:

$$\sigma = v(-\infty) - v(+\infty), \qquad \sigma_s \geqq [v_s(-\infty) - v_s(+\infty)],$$

где σ обозначает число вещественных корней функции $f(x)$, а σ_s число вещественных корней функции $f_s(x)$, выведя $\sigma \leqq s + \sigma_s$ [n степень $f(x)$]. Для числа $2i$ мнимых корней $f(x)$ вывести отсюда неравенство

$$2i \geqq n - s - \sigma_s \geqq 2i_s,$$

где $2i_s$ число мнимых корней $f_s(x)$.

63. $2i \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p - p$.

Указание: Сравнить число перемен знака $v(x)$ в ряду $f(x), f_1(x), \ldots f_m(x)$ с числом $v_k(x)$ перемен знака в ряду $f_k(x), f_{k+1}(x)\ldots f_m(x)$, отметив, что число σ_k раз-

личных вещественных корней $f_k(x)$ равно p и что степень функции $f_k(x)$ не меньше $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$. Сравнивая $v(x)$ и $v_k(x)$, получить неравенство

$$2i = n - \sigma \geqq n - k - \sigma_k \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p - p,$$

где σ обозначает число вещественных корней функции $f(x)$.

64. *Указание*: Изучить характер изменения знака произведения $f(x)\varphi(x)$ переходе через корень $f(x)$ и показать, что этот знак меняется с — на + при переходе через корень меньший λ, с + на — при переходе через корень больший Пользуясь этим, доказать высказанные в задаче утверждения.

65. *Указание:* Вывести тождество

$$[1 - 5P(x)]f(x) = (\lambda - x)P(x) \cdot f'(x) + R(x)$$

и принять во внимание результат задачи 64.

68. Промежутки $(-\infty, -2{,}966)$, $(-2{,}966, -0{,}259)$, $(-0{,}259, 0)$, $(0, 2{,}966)$ $(2{,}966, 18{,}499)$ содержат по одному корню.

69. Промежутки $(-\infty, -3{,}34)$, $(-0{,}24, 0)$, $(3{,}34, 30)$ содержат по одному корню уравнения.

70. Уравнение имеет один вещественный корень меньше $-0{,}7$.

73. Промежутки $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 3)$ содержат по одному корню.

74. Промежутки $(-2, -1{,}5)$, $(-1{,}5, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 1{,}3)$, $(1{,}3, 2)$ содержат по одному корню.

75. Уравнение имеет два вещественных корня по одному в промежутках $(-2, 0)$ $(0, 1)$.

76. Уравнение имеет два вещественных корня по одному в промежутках $(0, 1)$ $(1, 2)$.

77. Один вещественный корень, заключенный в промежутке $(10, 18)$.

78. Один вещественный корень, заключенный в промежутке $(-3, -2)$.

79. Уравнение имеет два вещественных корня по одному в промежутках $(-3, 0)$, $(0, 1)$.

80. Два вещественных корня по одному в промежутках $(0, 2)$, $(2, 4)$.

81. Два двойных корня по одному в промежутках $(-5, -4)$, $(0, 1)$.

82. Промежутки $(0, 0{,}5)$, $(0{,}5, 1)$ содержат по одному корню внутри. Третий корень равен 0,5.

83. Два вещественных корня по одному в промежутках $(-2, -1)$ $(0, 2)$.

84. Один вещественный корень в промежутке $(-3, 0)$.

85. Два вещественных корня по одному в промежутках $(-3, -1)$, $(-1, 0)$.

86. Четыре вещественных корня по одному в промежутках $(-2, -1{,}5)$, $-1{,}5, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$.

87. Два вещественных корня в промежутках $(3, 4)$, $(4, 6)$ соответственно.

88. *Указание*: Отметив, что

$$s + 2h = v(-\infty) - v(+\infty),$$

где s число вещественных корней $f(x)$, воспользоваться неравенствами

$$v(\infty) - v(a_1) = \sigma'_1 + 2h'_1 \qquad h'_1 \geqq 0$$

$$v - (a_1) - v(b_1) = s_1 + 2h_1 \qquad h_1 \geqq 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v(b_k) - v(+\infty) = s'_{k+1} + 2h'_{k+1} \qquad h'_{k+1} \geqq 0$$

и показать, что

$$2h \geqq 2h_1 + 2h_2 + \ldots + 2h_k.$$

2. 4,35.
3. 6,25.
4. 7,05.
5. 4,26.
6. 9,88.
7. 1,637, 0,337.
8. 13,213, 13,229.
9. 2,858.
10. — 0,315, 0,446, 1,069.
11. 1,247, — 0,445, — 1,802.
12. — 0,285.
14. 0,25693.
15. 2,09455.
16. 28,52128.
17. — 0,80194, 0,55496, 2,24698.
18. 2,45592, 20,43067.
19. 3,176814.
20. 2,858083.
21. — 2,7639, — 0,1250, 2,8887.
22. — 0,31469, 0,44603, 10,6865.
23. — 18,7938, 0,34729, 15,3209, — 20,9455
25. — 0,145, 1,476, 4,669.
26. — 1,166, 0,217, 3,949.
27. 0,913.
28. 0,859.
29. — 1,802, — 0,445, 1,247.
30. — 1,9489, 1,7828, 3,1660
31. — 0,7912, 3, 3,7912.
32. 0,6386.
33 1,8887.
34. — 2,4730, 0,5638, 0,9065.

35. $\underset{m\to\infty}{\text{пред}}\, a_m = \xi$, $\underset{m\to\infty}{\text{пред}}\, b_m = \eta$, где ξ и η суть наименьший и наибольший из корней уравнения в промежутке (a, b). В том случае, когда уравнение имеет только один корень в промежутке (a, b) $\underset{m\to\infty}{\text{пред}}\, a_m = \underset{m\to\infty}{\text{пред}}\, b_m$.

Указание: Воспользоваться тем обстоятельством, что последовательность a_0, $a_1, \ldots a_m, \ldots$ возрастающая, а последовательность $b_0, b_1, \ldots b_m, \ldots$ убывающая. Вывести, что $\underset{m\to\infty}{\text{пред}}\, a_m = \xi \leqq \eta = \underset{m\to\infty}{\text{пред}}\, b_m$, и, исходя из соотношений

$$a_{m+1} = a_m + \frac{|f(a_m)|}{M}, \quad b_{m+1} = b_m - \frac{|f(b_m)|}{M},$$

заключить, что ξ и η суть корни $f(x)$.

36. $\Delta_{k+1} < \Delta_k\left(1 - \frac{m}{M}\right)$; $\Delta_k < (b-a)\left(1 - \frac{m}{M}\right)^k$

Указание: Положив корень уравнения равным α, воспользоваться соотношениями:

$$a_{k+1} - \alpha = a_k - \alpha + \operatorname{sign} f(a_k) \quad \frac{f(a_k) - f(\alpha)}{M} \text{ [1]}$$

$$b_{k+1} - \alpha = b_k - \alpha + \operatorname{sign} f(b_k) \quad \frac{f(b_k) - f(\alpha)}{M}$$

применив к ним формулу Лагранжа.

37. $M\,|f'(a)|$, если $f(a) \cdot f''(a) > 0$; $M = |f'(b)|$, если $f(b) \cdot f''(b) > 0$.
В первом случае приближения имеют вид

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \qquad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

Во втором случае

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(b)} \qquad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Указание: Показать, что $|f'(x)|$ достигает наибольшего значения на той границе промежутка (a, b), для которой произведение $f(x) \cdot f''(x) > 0$.

38. $a_1 = a - \dfrac{f(a)}{f'(b)}$; $\quad b_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$

40. 1,35689, 1,69202,

41. 0,59368, 2,04727.

42. 11,19732.

43. — 3,90738.

44. — 2,31469, — 1,55397, — 0,93135.

45. 0,40742, — 2,08717, — 2,45857.

46. 0,60742.

47. — 0,80194, 0,55496, 0,85858, 1,14142, 2,24698.

48. — 0,47299, 2,56877, 2.90647.

49. $\underset{k \to \infty}{\text{Пред.}}\, x_k = \alpha$.

Указание: Воспользоваться тем обстоятельством, что числа последовательности возрастают вместе с k.

50. *Указание*: Представить равенство, определяющее последовательность задачи 49 в виде

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{x_k - a}{f(x_k) - f(\alpha)} \cdot [f(x_k) - f(\alpha)],$$

и приложить формулу Лагранжа. Получив соотношение

$$x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha) \cdot \frac{f'(\xi) - f'(\eta)}{f'(\xi)}, \qquad a < \xi < x_k, \quad \alpha < \eta < x_k,$$

вновь приложить к числителю формулу Лагранжа.

51. *Указание:* Представить разность $b_1 - a_1$ в виде

$$b_1 - a_1 = f(a)\left(\frac{1}{f'(a)} - \frac{b-a}{f(b) - f(a)}\right) =$$

$$= \frac{f(a)}{f'(a)\,[f(b) - f(a)]} \cdot \left[f'(a) \cdot (b-a) + \frac{f''(\xi)}{1 \cdot 2}(b-a)^2 - f'(a)\,(b-a)\right], \qquad a < \xi < b.$$

и воспользоваться неравенством

$$\left[\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}\right] < 1$$

[1]) $\operatorname{sign} a = +1$, если $a > 0$; $\operatorname{sign} a = -1$, если $a < 0$; $\operatorname{sign} a = 0$, если $a = 0$.

52. $a < \alpha < a + h$, если $f(a+1) \cdot f''(a+1) > m f''(a+1)$;

$a + h < \alpha < a + 1$, если $f(a) \cdot f''(a) > m f''(a)$.

54. 7,09455.

55. — 1,90194, — 0,54504, 1,14698.

56. 2,68531, 3,44608, 4,06865.

57. 0,45592, 18,43067

58. 2,59368, 4,04727.

59. — 2,41421, 0,26795, 0,41421, 3,73205.

60. 0,68531, 1,44603, 2,06865.

61. — 1,80194, — 0,44504, — 0,14142, 0,14142, 1,24698.

62. 0,52701 3,56877, 3,90647.

63. 2,09455, 3,17681.

64. — 2,87938, — 0,65271, 0,53209, — 3,09455.

65. — 2,31469, — 1,55397, — 0,93135, — 0,80194, 0,55496, 2,24698.

66. 0,59368, 2,04727, 2,09455.

67. — 3,41421, — 0,80194, — 0,73205, —0,58579, 0,55496, 2,24698, 2,26795.

69. — 3,80194. — 2,44504, — 0,75302.

70. 0,68531, 1,44603, 2,06865.

71. 2,12062, 4,34729, 5,53209.

72. — 1,23607, 0,26795, 3,23607, 3,73205.

73. 0,76393, 5,23607.

74. — 1,44949, — 0,23607, 3,44949, 4,23607.

75. 0,28463.

76. 0,63860580.

77. — 2,80194, — 1,44504, — 1,14142, — 0,85858, 0,24698.

78. — 2,09455, — 1,87938, 0,34729, 1,53209.

79. 1,09455, 2,17681.

80. $\frac{1}{3} = 0{,}33333$, 0,68531, 1,44603 2,06865.

81. — 0,40632, 1,04727, 1,09455.

82. 0,25, 2,59368, 4,04727.

83. $\operatorname*{Пред}_{k \to \infty} (\xi_{ik} - \xi_{jk}) = 0$, $\operatorname*{Пред}_{k \to \infty} \frac{\xi_{ik}}{\xi_{jk}} = 1$.

Указание: Воспользоваться соотношением

$$\frac{P_k \xi_{ik} + P_{k-1}}{Q_k \xi_{ik} + Q_{k-1}} = \xi_i,$$

выразив разность ξ_{ik} и ξ_{jk} через ξ_i и ξ_j.

84.

Указание: Воспользоваться результатом предыдущей задачи, положив

$$\xi_{ik} = -\mu_k - \eta_{ik}. \qquad \operatorname*{Пред}_{k \to \infty} \eta_{ik} = 0.$$

85. $\xi_{ik} > 0$, если ξ_i содержится между $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ и $\frac{P_k}{Q_k}$;

$\xi_{ik} < 0$, если ξ_i не содержится между $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ и $\frac{P_k}{Q_k}$

Указание: Выразить ξ_{ik} через ξ_i, пользуясь соотношением

$$\xi_i = \frac{P_k \xi_{ik} + P_{k-1}}{Q_k \xi_{ik} + Q_{k-1}},$$

и представить полученное выражение в виде

$$\xi_{ik} = \frac{Q_{k-1}}{Q_k} \cdot \frac{\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - \xi_i}{\xi_i - \frac{P_k}{Q_k}}$$

86. Отрицательный.

Указание: Пользуясь тем же соотношением, что и в предыдущей задаче, выразить вещественную часть ξ_{ik} через вещественную и мнимую часть ξ_i.

87.

Указание: Воспользоваться результатом задач 85 и 86

88.

Указание: Воспользоваться результатом задачи 85, представив левую часть $f_k(x)$ уравнения (***) в виде

$$f_k(x) = (x - \xi_{ik})\, \varphi_k(x),$$

где ξ_{ik} обозначает корень $f_k(x)$, соответствующий корню ξ_i уравнения (**), равному непрерывной дроби (*).