Б. К. Млодзеевский.

Основы Аналитической геометрии на плоскости

ГЛАВА I

Координаты на прямой линии.

1. Метод координат. Аналитическая геометрия имеет своим предметом приложение алгебраического анализа к изучению пространственных форм при помощи особого метода — **метода координат.**

Уже в так называемом приложении алгебры к геометрии и в тригонометрии мы имеем применение анализа, как учения о соотношениях произвольными числами к изучению геометрических протяжений; но тогда как в этих отделах математики анализ применяется исключительно к изысканию зависимости между геометрическими величинами — длинами, площадями, объемами, углами — аналитическая геометрия отличается тем, что в ней выражается числами самая существенная особенность геометрических форм, свойственная им одним из всех математических величин — их положение. Числа, определяющие собою положение геометрической формы, называются ея **координатами.** Благодаря методу координат аналитическая геометрия получает возможность применять к решению геометрических вопросов средства математического анализа со всеми преимуществами его общности и сжатого символизма.

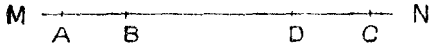
Аналитическая геометрия обязана своим происхождением знаменитому философу и математику Декарту (René Descartes), положившему основание методу координат в своем сочинении „Géométrie“ (1637 г.).

2. Прямолинейный ряд. Прежде чем перейти к изучению метода координат в его применении к геометрии на плоскости, мы рассмотрим его в приложении к геометрии на прямой линии.

Если мы имеем прямую линию, то совокупность всех точке этой неограниченной прямой образует прямолинейный ряд; прямая, на которой лежат точки этого ряда, называется его основанием. Две точки A, B прямолинейного ряда определяют на прямой отрезок AB. В элементарной геометрии обыкновенно не делают различия между одним и другим концом отрезка, так что символы AB и BA представляют один и тот же отрезок. Между тем, ниже мы увидим, что есть много случаев, когда нужно отличать начальную точку отрезка от ея конечной точки; так будет, напр., в том случае, когда отрезок образуется движением точки по прямой в определенном направлении, причем в рассматриваемом вопросе имеет значение направление движения. Во всех таких случаях отрезок обозначают, помещая начальную точку на первое место, а конечную на второе, так что, напр., символы AB и BA представляют один и тот же отрезок, но проходимый в первом случае от A к B, а во втором от B к A. С этой точки зрения, отрезки AB и BA будут уже два различных отрезка, равных по величине, но противоположных по направлению. Таким образом, тогда как, с прежней точки зрения, отрезки на прямой представляют величины абсолютные, теперь мы рассматриваем их, как величины относительные: они могут быть положительными и отрицательными.

Взгляд на отрезки, как на величины относительные, был впервые развит систематически в 1827 г. Мебиусом (Möbius).

Когда мы имеем один отрезок, то безразлично, какое из двух его направлений мы будем считать положительным и какое отрицательным; но если мы имеем несколько отрезков, лежащих на одной и той же прямой, то естественно выбрать на этой прямой определенное направление и считать все отрезки этого направления положительными, а отрезки противоположного направления – отрицательными. Так, если мы на прямой MN (черт. 1) примем за положительное направление то которое указано стрелкою, то отрезок AB будет положительным, а CD—отрицательным.



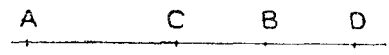
Черт. 1.

3. Введя понятие об отрезках, как величинах относительных, мы должны установить правила действий над ними. Рассматривая отрезки, как величины абсолютные, мы для получения суммы двух отрезков прикладывали к одному отрезку другой

так, чтобы один из концов одного отрезка совпал с одним из концов другого отрезка, а два остальных свободных конца расположились по разные стороны двух совмещенных концов. При сложении отрезков направленных необходимо установить, какие именно концы отрезков должны быть приведены в совпадение, так как теперь мы различаем в отрезке его начальную и конечную точку.

Будем рассматривать каждый отрезок, как путь, описываемый точкою, движущеюся в определенном направлении. Тогда естественно принять, что сумма двух направленных отрезков получится, если точка опишет последовательно те два пути, которые соответствуют обоим слагаемым. Для того, чтобы получить эту сумму, очевидно, нужно приложить к конечной точке первого отрезка начальную точку второго, так как второй путь должен быть описан, начиная с той точки, на которой окончился первый; тогда начальная точка первого отрезка будет начальною точкою отрезка, представляющего сумму, а конечная точка второго отрезка — конечною точкою отрезка, представляющего сумму.

В таком случае, когда оба слагаемых отрезка имеют одинаковое направление, то и другое определение сложения ведут к одинаковым результатам; но если оба отрезка имеют различные направления, то оба сложения существенно различны. Так, сумма AB и BC (черт. 2), понимаемых, как величины



Черт. 2.

отрезок AD, получим, прикладывая к AB отрезок AD, равный BC; напротив, понимая те же отрезки, как величины направленные, мы найдем, что их сумма равна AC, так как в этом случае для сложения отрезков надо совместить начальную точку B второго отрезка с конечною точкою B первого, и тогда начальная точка A первого и конечная C—второго будут начальною и конечною точкою отрезка-суммы. Действительно, если мы, выйдя из A, пройдем сначала отрезок AB, а потом BC, то придем в C, так что A и C будут, по определению начальною и конечною точкою отрезка, представляющего искомую сумму путей AB и BC.

Легко видеть, что для сложения двух противоположно направленных отрезков сохраняется правило, справедливое для всяких двух противоположно направленных величин: для сложения

таких отрезков нужно вычесть их абсолютные длины и остаток взять в направлении бо́льшего отрезка. Точно так же легко видеть, что сумма двух противоположно направленных отрезков не зависит от порядка слагаемых.

4. Сложение и вычитание отрезков. Введя понятие о направленных отрезках, мы можем установить в общем виде некоторые соотношения, которые без этого были бы справедливы не во всех случаях. Так, рассматривая отрезки, как величины относительные, мы найдем, что соотношение

$$AB + BC = AC \tag{1}$$

справедливо при всяком расположении точек на прямой, так как оно вытекает из самого определения сложения направленных отрезков, как оно было дано выше. Между тем, когда мы рассматриваем отрезки, как величины абсолютные, то это соотношение будет справедливо только в том случае, если точка B лежит между A и C. Точно также, если мы имеем сумму скольких угодно отрезков

$$AB + BC + CD + \ldots\ldots + KL + LM,$$

где конечная точка каждого слагаемого совпадает с начальною следующего, то эта сумма всегда равна отрезку AM между начальною точкою первого слагаемого и конечною точкою последнего, независимо от расположения остальных точек $B, C \ldots L$.

Составляя по общему правилу сумму $AB + BA$ двух равных и противоположных отрезков, мы найдем, что эта сумма представляет отрезок AA, которого начальная и конечная точки совмещены в точке A. Здесь мы, собственно, не имеем никакого отрезка; но мы будем условно рассматривать и эту сумму $AB + BA$ как отрезок с двумя совпавшими концами и обозначать его длину знаком 0. Таким образом, мы будем иметь

$$AB + BA = 0.$$

С другой стороны, из определения противоположных величин $+AB$ и $-AB$ следует

$$AB + (-AB) = 0.$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, находим

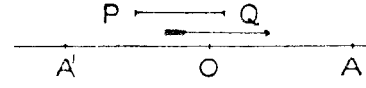
$$BA = -AB.$$

Это показывает, что при перемещении концов отрезка отрезок меняет свой знак.

Отсюда, между прочим, следует соотношение

$$AB - CB = AB + BC = AC. \qquad (2)$$

5. Координаты на прямой линии. Перейдем теперь к установлению координат для точек на прямой линии. Пусть мы имеем на прямой линии точку A (черт. 3). Чтобы отличить эту точку от других точек прямой, мы поступим следующим образом. Возьмем где нибудь на нашей прямой точку O, которую будем называть *началом координат*, и выберем на нашей прямой направление положительных отрезков, напр. слева направо. Тогда положение каждой точки A на прямой будет определяться ея расстоянием от начала ксординат, т.-е. отрезком OA; при этом точкам вправо от O будут соответствовать положительные отрезки, а точкам влево от O — отрицательные. Таким образом, каждой точке на прямой будет соответствовать определенный отрезок и каждому отрезку — одна определенная точка. Заметим что если бы мы рассматривали отрезки как величины не относительные, а абсолютные, то каждому отрезку соответствовала бы не одна, а две разных точки прямой; действительно, в этом случае мы могли бы отложить отрезок OA как в правую сторону от точки O, так и в левую, и таким образом получили бы не одну точку A, а две A и A', равно удаленные от O. Различение у отрезков двух противоположных направлений устраняет это существенное неудобство и позволяет установить *взаимно однозначное* соответствие между точками на прямой с одной стороны и их расстояниями от начала координат O с другой.



Черт. 3.

До сих пор мы определяли положение точек на прямой линейными величинами — расстояниями этих точек от начала. Чтобы перейти к определению положения точек числами, возьмем отрезок PQ определенной длины, примем его за единицу длины и будем искать отношение каждого из отрезков OA к PQ.

Это отношение будет равно некоторому числу, которое мы будем брать положительным или отрицательным смотря по тому, будет ли отрезок OA положительным или отрицательным. Таким образом, каждой точке A нашей прямой будет соответствовать число a, определяемое соотношением

$$a = \frac{OA}{PQ},$$

и обратно, каждому числу a будет соответствовать на нашей прямой определенная точка A, как конец отрезка OA, определяемого из равенства

$$OA = PQ \cdot a.$$

Таким образом, каждой точке A нашей прямой соответствует определенное число a. Это число, определяющее положение точки, называется ея **координатою**. Итак, **координата точки на прямой есть отношение отрезка от начала координат до этой точки к некоторому постоянному отрезку, принятому за единицу меры** Таким образом, координата точки есть отвлеченное число, измеряющее ея расстояние от начала координат; но иногда для краткости изложения называют координатою точки A самую длину OA. Хотя такое название и неправильно, но им часто пользуются в тех случаях, где это не может повести к недоразумениям. Причина такого словоупотребления заключается в том, что геометрические свойства точки A, зависящие от ея положения относительно O, определяются длиною отрезка OA, совершенно независимо от того, какою мерою эта длина измерена. Подобно этому и в тригонометрии иногда называют неправильно синусом угла при центре круга длину перпендикуляра, опущенного из конца подвижного радиуса на неподвижный, тогда как, собственно, этим именем называется **отношение** длины этого перпендикуляра к радиусу. Называя длину OA координатою точки A, мы подразумеваем, что эта длина измерена некоторою линейною единицею.

Координата начала O есть, очевидно, нуль. Собственно говоря, когда точка A приходит в положение O, то отрезка OA не существует; но рассматривая этот случай, как предельный, мы можем принимать, что в этом случае мы имеем отрезок совпадающими концами.

В аналитической геометрии часто является надобность рассматривать точку A, как непрерывно перемещающуюся по прямой. При этом ея координата a будет непрерывно изменяться, и так как в анализе принято обозначать переменные величины последними буквами латинского алфавита, то и координата точки на прямой обозначается одной из таких букв, всего чаще буквою x. Тогда числа a, a'..., представляющие координаты определенных точек A, A'... прямой будут различными значениями переменного x. Точка A, имеющая координату a, обозначается в аналитической геометрии символом $A(a)$.

Изложенный здесь способ определения положения точек на прямой при помощи чисел—самый простой; но кроме него, возможно и безчисленное множество других. Сущность метода координат заключается только в том, что в этом методе положение точек определяется при помощи чисел; поэтому всякий раз как мы можем установить соответствие между точками какой-либо прямой или кривой линии и числами, мы можем рассматривать эти числа, как координаты соответствующих им точек. В § 16 мы будем иметь пример координат на прямой линии, отличных от тех, которые мы описали выше.

6. Расстояние между двумя точками. Пусть нам даны координаты x, x' двух точек M, M'. Найдем, как выражается расстояние между этими точками при посредстве их координат. На основании соотношения (1) мы имеем

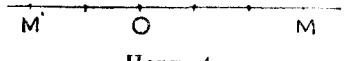
$$MM' = OM' - OM,$$

как $OM' = x'$, $OM = x$,

$$MM' = x' - x. \tag{3}$$

Здесь, собственно, следовало бы писать $MM' = PQ(x' - x)$ понимая под PQ единицу масштаба. Но в аналитической геометрии обыкновенно отрезки выражающиеся числами, так что MM' обозначает здесь не длину, а отвлеченное число $\frac{MM'}{PQ}$, отношение длины MM' к единице масштаба.

Из самого происхождения этой формулы ясно, что она остается справедливою при всяком положении точек M, M' на прямой. Напр., при $x = 3$, $x' = -2$ (черт. 4) имеем



Черт. 4.

$$MM' = -5.$$

Полученное отрицательное число показывает, что точка M лежит правее M'.

Чтобы получить абсолютную величину расстояния MM', должно взять не самую разность $x' - x$, а ея абсолютную величину. Абсолютная величина числа a обозначается в анализе знаком $|a|$. Поэтому для абсолютной величины отрезка MM' имеем

$$MM' = |x' - x| = |x - x'|.$$

7. Деление отрезка в данном отношении. Пусть на прямой даны две точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$. Найдем на той же прямой точку M, делящую отрезок M_1M_2 на две части в отношении λ. По условию задачи мы имеем

Черт. 5.

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda, \tag{4}$$

или, обозначая координату искомой точки M через

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

откуда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{5}$$

В том случае, когда отношение λ есть число рациональное, этой формуле можно дать более симметрический вид, полагая $\lambda = \frac{m}{n}$, где m и n — целые числа; тогда формула (5) принимает вид

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}.$$

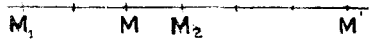
В частном случае, когда требуется разделить отрезок M_1M_2 пополам, мы имеем $\lambda = 1$, и следовательно

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{6}$$

Таким образом, координата средины отрезка полусумме координат его концов.

8. В формуле (5) число λ представляет отношение двух длин и есть поэтому число существенно положительное. Но если мы будем обращать внимание не только на величины отрезков M_1M и MM_2, но и на их направления, то число λ может иметь в (5) и отрицательные значения. Посмотрим, как должно изменить постановку решаемой нами задачи, чтобы сделать возможными для λ отрицательные значения.

Когда мы делим отрезок M_1M_2 в отношении λ, то мы ищем на прямой M_1M_2 такую точку, расстояния которой от M_1 и M_2 находилось бы в данном отношении λ. Но очевидно, что при такой постановке задачи искомая точка может лежать не только между точками M_1 и M_2, но и на продолжении отрезка M_1M_2; так, например (черт. 6), отношения $M_1M : MM_2$ и $M_1M' : M'M_2$ одинаковы и равны 2 : 1. Условимся говорить, что точка, если она лежит между двумя другими, делит отрезок между ними внутренним образом; если же она лежит на продолжении отрезка, заключающегося между этими точками, то она делит этот отрезок внешним образом. В нашем примере точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении 2 : 1 внутренним образом, а M'—в том же отношении, но внешним образом.



Черт. 6.

Легко видеть, что если в отношении отрезков $\frac{M_1M}{MM_2}$ мы будем принимать во внимание не только длины, но и знаки обоих отрезков, то точкам M, лежащим внутри отрезка M_1M_2, будут соответствовать положительные числовые значения этого отношения, а точкам, лежащим на продолжении того же отрезка,—отрицательные. Действительно, в первом случае точки M_1 и M_2 лежат по разные стороны точки M; поэтому отрезки M_1M и MM_2 имеют одинаковое направление, и их отношение положительно: напротив, во втором случае точки M_1 и M_2 лежат по одну сторону от точки M, отрезки M_1M и MM_2 имеют противоположные направления, и отношение их отрицательно. Таким образом в предыдущем примере отношение $\frac{M_1M}{MM_2}$ равно 2, отношение $\frac{M_1M'}{M'M_2}$

Теперь ясно, что мы можем давать в формуле (5) параметру

λ отрицательные значения, если только допустим деление стрезка не только внутренними, но и внешними точками. В таком случае, давая в (5) λ отрицательные значения, мы будем получать координаты x точек, лежащих на продолжении отрезка в ту или другую сторону и делящих его внешним образом в отношении λ, если принимать во внимание направление отрезков, и в отношении $|\lambda|$, если мы будем рассматривать только их абсолютную длину.

9. Безконечно-удаленная точка. Так как каждая точка прямой M_1M_2 делит отрезок M_1M_2 в определенном отношении внутренним или внешним образом, то каждой точке будет соответствовать определенное значение λ, положительное или отрицательное. Посмотрим, будет ли, обратно, каждому значению λ соответствовать некоторая точка прямой M_1M_2. Очевидно, что при всяком значении λ, кроме $\lambda = -1$, формула (5) дает для координата x вполне определенное значение. Но при $\lambda = -1$ знаменатель выражения (5) обращается в нуль, и выражение теряет смысл; таким образом, для значения $\lambda = -1$ на прямой нет соответствующей точки. Чтобы устранить, хотя бы только формально, такое исключение, условимся принимать, что значению $\lambda = -1$ также соответствует некоторая точка, и посмотрим, какие свойства должны мы приписать этой несуществующей точке, чтобы иметь возможность рассматривать ее рядом с другими точками прямой. Для этого будем приближать λ к значению—1, как к пределу, и посмотрим, как при этом будет изменяться координата x в формуле (5). По мере того, как λ будет приближаться к -1, делитель $1+\lambda$ будет приближаться к нулю, и значение координаты x будет неограниченно возрастать по абсолютной величине. Следовательно, с приближением λ к -1, точка M, соответствующая этому значению отношения λ, будет неограниченно удаляться по прямой M_1M_2. Поэтому, принимая, что значению $\lambda = -1$ также соответствует некоторая точка на нашей прямой, мы должны вместе с тем принять, что эта точка удалена от начала координат O далее, нежели все остальные точки нашей прямой. Отсюда эту несуществующую точку, соответствующую значению $\lambda = -1$, условились называть безконечно-удаленною точкою прямой, а ее расстояние от O—безконечно большим. Геометрически не трудно убедиться, что если точка неограниченно удаляется по прямой, то значение параметра λ, соответствующее этой точке, будет, действительно, иметь преде-

лом —1. В самом деле, отношение λ, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, может быть представлено в виде

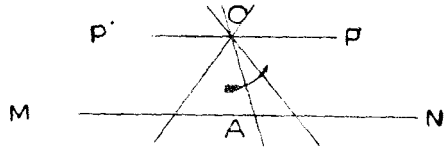
$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{M_1M_2 - MM_2}{MM_2} = \frac{M_1M_2}{MM_2} - 1.$$

Будем теперь удалять точку M в безконечность; тогда MM_2 будет неограниченно возрастать, а M_1M_2 будет оставаться без изменения; следовательно $\lim \frac{M_1M_2}{MM_2} = 0$ и $\lim \lambda = -1$.

Так как каждому значению λ соответствует только одна точка прямой, то мы должны принимать, что прямая имеет только одну безконечно-удаленную точку, так как эта точка соответствует единственному значению $\lambda = -1$. На первый взгляд кажется, что, принимая на прямой безконечно удаленную точку, мы должны допустить две таких точки.

поступая таким образом, мы сделали бы значение $\lambda = -1$ исключительным, так как всем остальным значениям параметра λ соответствует только по одной точке прямой. Поэтому мы должны принимать, что и значению $\lambda = -1$ соответствует только одна безконечно-удаленная точка прямой. Принимая у прямой одну безконечно-удаленную точку, мы тем самым рассматриваем прямую, как линию, замкнутую в безконечности, так как, удаляясь по прямой в безконечность в двух противоположных направлениях, мы приходим все к той же единственной безконечно-удаленной точке.

10. Можно указать на соображения геометрического характера, дающие основание принимать у прямой только одну безконечно-удаленную точку. Возьмем прямую MN (черт. 7) и проведем через точку O, взятую вне этой прямой, прямую, или луч OA, который встретит прямую MN в A. Если мы будем вращать луч OA около точки O в направлении, указанном стрелкою,



Черт. 7.

то точка A будет перемещаться по прямой вправо, и по мере того, как OA будет приближаться к параллельности с MN, точка A будет неограниченно удаляться вправо. Когда OA при своем

вращении придет, наконец, в положение PP', параллельное MN точка пересечения обоих прямых исчезнет; но мы условимся принимать, что и в этом положении оба луча пересекаются к некоторой точке прямой MN, которою назовем безконечно-удаленною точкою прямой. Так как каждый луч пересекается с MN в одной точке, то мы должны принять, что и параллельный луч имеет с MN одну общую точку. Будем теперь вращать луч OA около точки O в направлении обратном предыдущему. Тогда точка A будет перемещаться влево и удалится в безконечность, когда луч OA, вращаясь, вновь примет положение параллельное MN. Так как через точку O можно провести только одну прямую параллельную MN, то, признавая, что две прямыя могут пересекаться только в одной точке, мы должны принять, что мы придем к одной и той же безконечно-удаленной точке, будет ли луч OA приближаться к параллельности с MN, вращаясь вправо или вращаясь влево.

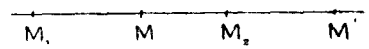
То же можно показать еще следующим образом. Предположим, что луч OA, вращаясь по направлению стрелки и придя в положение OP, продолжает вращаться далее в том же направлении; тогда точка пересечения OA с MN, исчезнув в безконечности справа, появится вновь с левой стороны. Если мы условимся принимать, что непрерывному вращению луча OA соответствует непрерывное перемещение точки A по прямой MN, то мы должны принять, что прямая MN смыкается в безконечности, так как при этом мы должны рассматривать переход точки A из весьма далекого положения справа через безконечность в весьма далекое положение слева, как перемещение непрерывное.

Заметим, что вводя понятие о безконечно-удаленной точке на прямой, мы этим нисколько не утверждаем, что такая точка действительно существует на прямой. В пространстве, как мы его себе обыкновенно представляем, нет безконечно удаленных точек, и две параллельных прямых не имеют общей точки, точно также, как в формуле (5) значению $\lambda = -1$ не соответствует никакого значения координаты x. Но чтобы объединить этот особый случай с остальными, мы условливаемся говорить, что и параллельные прямые имеют, подобно другим, общую точку, точно также как в формуле (5) мы принимаем, что значению $\lambda = -1$ соответствует $x = \infty$. Эта условно принятая точка и есть безконечно-удаленная точка прямой.

10—11]

Понятие о безконечно удаленных точках было систематически введено в геометрии в 1822 г. Понселе (Poncelet).

11. Пусть на прямой M_1M_2 (черт. 8) точке M соответствует число λ и точке M'—число λ'. Тогда мы будем иметь



Черт. 8.

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda,\quad \frac{M_1M_2}{M'M_2}=\lambda'.$$

Разделив эти равенства одно на другое и изменив для симметрии знаки нижних отрезков, получим:

$$\frac{M_1M}{M_2M}:\frac{M_1M'}{M_2M'}=\lambda:\lambda'$$

часть этого равенства представляет отношение между отношениями отрезков. Такое выражение имеет большое значение в высшей геометрии и называется сложным (Мебиус) или ангармоническим отношением (Шаль, Chasles четырех точек. Таким образом, сложное, или ангармоническое отношение четырех точек есть отношение тех отрезков, на которые две из этих точек M и M' делят отрезок между двумя остальными M_1, и M_2.

Сложное отношение четырех точек M_1, M_2, M, M', из которых M_1 и M_2—основные, обозначается символом (M_1M_2MM').

Так как четыре элемента M_1, M_2, M, M' допускают $4.3.2.1=24$ перестановки, то меняя порядок четырех данных точек, мы получим всего 24 значения сложного отношения этих точек. Эти 24 значения равны между собою по четыре. В самом деле, мы имеем тождественно

$$\frac{M_1M}{M_2M}:\frac{M_1M'}{M_2M'}=\frac{M_2M'}{M_1M'}:\frac{M_2M}{M_1M}=\frac{MM_1}{M'M_1}:\frac{MM_2}{M'M_2}=\frac{M'M_2}{MM_2}:\frac{M'M_1}{MM_1},$$

или

$$(M_1M_2MM')=(M_2M_1M'M)=(MM'M_1M_2)=(M'MM_2M_1).$$

Это показывает, что величина сложного отношения не меняется от одновременной перестановки элементов обеих пар M_1 и M_2, M и M', а также от перестановки обеих пар M_1,M_2 и M,M'. Поэтому 24 значения сложного отношения четырех точек равны между собою по 4, так что мы имеем только $24:4=6$

различных значений этого отношения. При более подробном исследовании можно убедиться, что если мы обозначим одно из этих значений через k, то шесть различных значений сложного отношения выразятся следующим образом:

$$(M_1M_2MM') = k, \qquad (M_1M_2M'M) = \frac{1}{k},$$

$$(M_1M\ M_2M') = 1 - k, \quad (M_1M\ M'M_2) = \frac{1}{1-k},$$

$$(M_1M'M_2M) = \frac{k-1}{k}, \quad (M_1M'MM_2) = \frac{k}{k-1}$$

Из этих соотношений второе очевидно, а третье получается при помощи следующего тождества, которое легко проверить, выразив все входящие сюда отрезки через отрезки, имеющие начало в M_1:

$$M_1M_2 \cdot MM' + M_1M \cdot M'M_2 + M_1M' \cdot M_2M = 0.$$

После этого уже легко получить и остальные соотношения.

12. Гармонические точки. Положим, что четыре точки M_1, M_2, M, M', расположены на прямой таким образом, что точки M, M' делят отрезок M_1M_2 в одинаковом отношении внутренним и внешним образом, так что

$$\frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{M_1M'}{M'M_2} \tag{7}$$

В таком случае говорят, что точки M, M' делят отрезок M_1M_2 гармонически. Самые точки M_1, M_2, M, M называются гармоническими точками, а их совокупность — гармоническим рядом.

Переставляя в последней пропорции средние члены, находим

$$\frac{MM_1}{M_1M'} = -\frac{MM_2}{M_2M'}.$$

Отсюда видно, что если точки M,M' делят гармонически отрезок M_1M_2, то и точки M_1, M_2 делят гармонически отрезок MM', так что четыре гармонические точки образуют две равноправные пары. Точки одной пары называются гармонически сопряженными по отношении к точкам другой.

Представив соотношение (7) в виде

$$\frac{M_1M}{M_2M} : \frac{M_1M'}{M_2M'} = -1,$$

видим, что *сложное отношение четырех гармонических точек равно* —1.

Если точка M есть средина отрезка M_1M_2, то она делит этот отрезок в отношении $\lambda = 1$; тогда четвертая гармоническая M' должна делить тот же отрезок в отношении $\lambda = -1$, т.-е. (§ 9) должна быть безконечно-удаленною точкою прямой. Таким образом *безконечно-удаленная точка и средина отрезка гармонически сопряжены относительно концов этого отрезка.*

Четыре точки M_1, M_2, M, M', которых сложное отношение равно —1, называются гармоническими потому, что расстояние каждой из них, например M_1, от ей сопряженной M_2 есть среднее гармоническое относительно расстояний той же точки M, от точек другой пары M, M'. В самом деле, мы можем представить (7) в виде

$$-\frac{M_1M}{M_1M'} = -\frac{M_1M_2 - M_1M}{M_1M' - M_1M_2}.$$

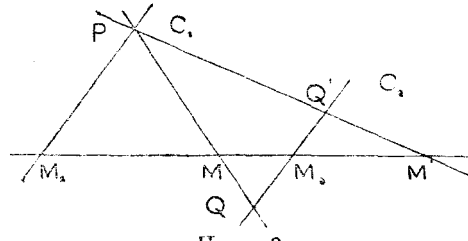
или

$$\frac{M_1M}{M_1M} = \frac{M_1M' - M_1M_2}{M_1M_2 - M_1M}.$$

Но известно, что величина c называется среднею гармоническою между a и b, если она удовлетворяет соотношению

$$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{c-b}$$

13. Имея три точки, можно построить к ним четвертую гармоническую следующим образом. Пусть требуется найти точку гармонически сопряженную с M (черт. 9) относительно точек M_1 и M_2. Проведем через M_1 и M_2 две параллельных прямых M_1C_1, M_2C_2 и на одной из них, напр. на M_2C_2, отложим от M_2 два равных отрезка $M_2Q = M_2Q'$. Пусть будет P точка пересече-



Черт. 9.

ния прямых MQ и M_1C_1; тогда прямая PQ' встретит M_1M_2 в точке M' гармонически сопряженной с M. В самом деле, из подобных треугольников имеем, принимая во внимание направления отрезков,

$$\frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{M_1P}{M_2Q}, \quad \frac{M_1M'}{M'M_2} = -\frac{M_1P}{M_2Q'};$$

но $M_2Q = -M_2Q'$, и потому

$$\frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{M_1M'}{M'M_2}.$$

14. Будем перемещать непрерывно точку M в положительном направлении по прямой и исследуем, как при этом будет изменяться отношение λ отрезков M_1M, MM_2. Для определенности предположим, что отрезок M_1M_2 имеет положительное направление, т.-е. что точка M_2 лежит вправо от M_1. Представив, как это мы делали в § 9, отношение $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ в виде

$$\lambda = \frac{M_1M_2}{MM_2} - 1,$$

мы видим, что когда точка M безконечно удалена, $\lambda = -1$. По мере того как M будет перемещаться из безконечности в положительном направлении, т.-е. слева вправо, отрезок MM_2, оставаясь положительным, будет убывать по абсолютной величине, отношение $\frac{M_1M_2}{MM_2}$ будет возрастать от нуля, и λ будет возрастать начиная от значения -1; когда точка M придет в M_1, отношение $\frac{M_1M_2}{MM_2}$ обратится в единицу, и λ будет равно нулю. Таким образом, точкам, лежащим вне отрезка M_1M_2 влево от M_1, соответствуют отрицательные значения λ от -1 до 0. Далее, когда точка M перемещается от M_1 к M_2, то $\frac{M_1M_2}{MM_2}$ делается больше единицы, и λ приобретает положительные значения. По мере того, как M приближается к M_2, отрезок MM_2 неограниченно убывает, и λ получает неограниченно возрастающие положительные значения, так что точкам, лежащим внутри отрезка

M_1M_2, соответствуют значения λ между 0 и $+\infty$. При дальнейшем перемещении точки M отрезок MM_2 сделается отрицательным и будет возрастать по абсолютной величине. Вследствие этого λ сделается отрицательным и будет убывать по абсолютной величине, пока, с удалением точки M в безконечность, не примет вновь значения -1, с которого мы начали наше исследование. Таким образом, точкам, лежащим вне отрезка M_1M_2 вправо от M_2, соответствуют отрицательные значения λ от $-\infty$ до -1.

15. Остановимся на том случае, когда точка M совпадает с одним из концов отрезка M_1M_2. Здесь, собственно, нет деления отрезка M_1M_2 на две части; но рассматривая этот случай, как предельный, мы можем, как и в §§ 4 и 5, сказать, что здесь точка M делит отрезок M_1M_2 на две части, из которых одна равна нулю. Поэтому, если точка M совпадает с M_1, то λ принимает значение $\frac{M_1M_1}{M_1M_2}=0$; если же M совпадает с M_2, то λ обращается в $\frac{M_1M_2}{M_2M_2}=\infty$.

Так как внутренним точкам отрезка M_1M_2 соответствуют положительные значения λ, а внешним—отрицательные, то значения 0 и ∞, соответствующия границам отрезка, являются не положительными или отрицательными, а переходными между теми и другими. То обстоятельство, что символ ∞, тем не менее, часто входит в вычисления с знаками $+$ и $-$, объясняется тем, что этот символ обыкновенно получается, как предел переменного числа, неограниченно возрастающего по абсолютной величине; если это число при своем изменении остается положительным, то его предел обозначают знаком $+\infty$, а если оно остается отрицательным, то знаком $-\infty$.

16. Формула (5) § 7

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \qquad (5)$$

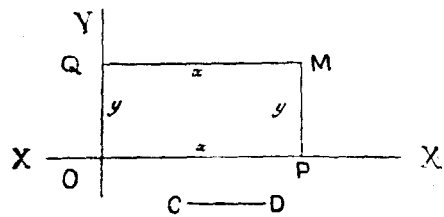
содержит четыре величины: λ, x, x_1, x_2. Считая в этой формуле координаты x, x_1, x_2 главными величинами, мы можем смотреть на λ, как на величину, при помощи которой устанавливается зависимость x от x_1 и x_2. Такие вспомогательные величины, входящия в формулу, называются ее параметрами (ср. § 9). Например, коэффициенты p,q квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ представляют его параметры.

Давая в формуле (5) параметру λ разные значения, мы получим координату x той точки M, которая делит отрезок M_1M_2 в отношении λ; обратно, каждой точке M соответствует определенное отношение λ, в котором эта точка делит отрезок M_1M_2. Так как число λ вполне определяет положение точки M на прямой, то оно может быть названо, наравне с числом x, координатою этой точки *в том смысле, как это было* разъяснено в § 1. Это показывает, что введенное в § 5 определение координаты точки, как отношения между расстоянием этой точки от начала координат и единицею длины, не есть единственное. Всякий раз как мы каким бы то ни было способом установили связь между точками прямолинейного ряда и рядом чисел, мы можем принять эти числа за координаты соответствующих точек. Тот род координат, которым мы пользовались в §§ 5—7,—самый простой; но соображения, изложенные в настоящем параграфе, доказывают возможность и других координат точек на прямой линии.

ГЛАВА II.

Координаты на плоскости.

17. Прямоугольные декартовы координаты. Возьмем на плоскости точку M (черт. 10). Очевидно, что положение точки на плоскости может быть определено только по отношению к каким нибудь другим геометрическим формам на этой плоскости; эти формы мы будем предполагать данными и не изменяющимися. Проведем на плоскости произвольную прямую XX. Если из M опустим на нее перпендикуляр PM и измерим его длиною отрезка CD, принятого нами за единицу, то в результате получим некоторое отвлеченно число, которое и определит



Черт. 10.

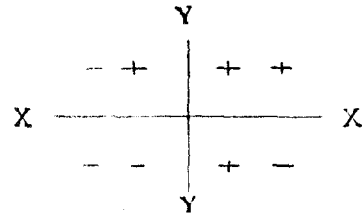
расстояние точки M от прямой XX. По аналогии с предыдущим, мы назовем это число координатою точки M. Пусть теперь это число дано. Легко видеть, что число это не вполне определяет положение точки M, так как существует не одна точка, а целый ряд точек, обладающих тем свойством, что разстояние их до неподвижной прямой XX равно данному отрезку PM; все эти точки расположены на линии параллельной к прямой XX, и проходящей на расстоянии PM от нея. Поэтому для полного определения положения точки на плоскости необходимо прибавить еще другое данное. Если мы проведем на плоскости вторую неподвижную прямую OY, перпендикулярную к прямой XX, опустим из M перпендикуляр QM на эту прямую и измерим его выбранною единицею CD, то получим вторую координату точки M. Двумя координатами положение точки на плоскости определяется

вполне. В самом деле, все точки прямой QM находятся на расстоянии PM от прямой OX и все точки прямой PM находятся на расстоянии QM от перпендикуляра OY; точка M также должна находиться на расстоянии PM от OX и на расстоянии OM от OY; следовательно, она должна лежать как на прямой QM, так и на прямой PM, т.-е находиться в точке пересечения этих прямых; а так как две прямые пересекаются только в одной точке, то QM и PM определяют своим пересечением положение только одной точки M. И так, положение точки на прямой определяется одною координатою, а положение точки на плоскости—двумя координатами.

Прямые, относительно которых определяется положение точки, называются осями координат. Горизонтальная ось называется обыкновенною осью x-ов, или осью X; вертикальная—осью y-ов, или осью Y; точка их пересечения O называется началом координат. Самые расстояния MP и MQ, выраженные в принятых единицах, суть координаты точки M; каждая из этих координат обозначается малою буквою, соответствующею той, какою обозначена ось, которой данная координата параллельна, т.-е. расстояние от оси Y обозначается буквой x, а расстояние от оси X обозначается буквой y. Первая из этих координат называется абсциссою, вторая — ординатою. Угол XOY называется координатным углом. Легко видеть, что фигура $OPMQ$ есть прямоугольник и, следовательно, противоположные стороны ея равны между собою, т.-е. $OP = x$, $OQ = y$; поэтому координаты можно откладывать не только на перпендикулярах, опущенных из данной точки, но также и на самых осях координат. Поэтому ось X называется также осью абсцисс, а ось Y—осью ординат.

Из предыдущего видно, что координаты x и y точки M, суть не что иное как координаты точек P, Q — оснований перпендикуляров, опущенных из M на оси координат. Таким образом, определение координат точки на плоскости приводится к определению координат точек P, Q на двух прямых линиях осях координат. Применяя к координатам точек P, Q правило знаков, установленное в § 5, мы будем считать абсциссу точки M положительною если P лежит вправо от начала координат, и отрицательною, если P лежит влево; точно также ордината точки M будет положительною, если Q лежит выше начала координат, и отрицательною, если она лежит ниже. Другими словами

это значит, что абсцисса x положительна для всех точек плоскости, лежащих вправо от оси Y, и отрицательна для точек, лежащих влево; ордината y положительна для точек, лежащих вверх от оси X, и отрицательна для точек, лежащих вниз. Таким образом, вся плоскость делится осями координат на четыре части, различающиеся между собою знаками той или другой координаты (черт. 11). Тот угол между осями, внутри которого обе координаты положительны, называется нормальным углом; обыкновенно за нормальный угол принимают правый верхний.



Черт. 11

Очевидно, что для всех точек на оси X координата y равна нулю; точно также для точек на оси Y координата x равна нулю. В начале координат равны нулю обе координаты x и y.

Мы определили координаты точки M, как отношения отрезков OP и OQ к одной и той же единице длины CD. Такое определение координат самое простое, но оно не необходимо: можно было бы измерять координаты на оси X одною мерою, а на оси Y—другою; но в элементарных вопросах аналитической геометрии такой прием лишь осложняет исследование и может быть полезен только в исключительных случаях. В нашем курсе мы будем всегда относить обе координаты к одной и той же единице.

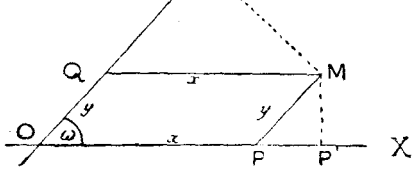
Описанная здесь система координат на плоскости называется системою прямоугольных декартовых координат.

18. Посмотрим, как можно построить точку, зная ея декартовы координаты. Пусть требуется построить точку, координаты которой имеют данные числовые значения $x=a$, $y=b$. Такая точка обыкновенно обозначается символом (a,b). Возьмем оси координат и, выбрав единицу масштаба CD, отложим на оси X отрезок $OP=CD.a$, или как обыкновенно пишут, опуская обозначение единицы масштаба, $OP=a$. Так как отрезок OP откладывается, или отсекается на оси X, то он и получил название абсциссы. Затем восставим в точке P перпендикуляр к оси X и отложим на нем отрезок $PM=CD.b$, или, короче, $PM=b$; отрезок PM называется ординатою. Точка M, построенная таким образом, будет искомою точкою (a,b). Можно

также отложить на осях X и Y отрезки $OP=a$, $OQ=b$ и провести через точки P, Q прямые PM, QM параллельно осям координат; в пересечении обеих прямых получится искомая точка M. Последнее построение имеет то преимущество, что обе координаты точки входят в него совершенно одинаковым образом. Очевидно, что построение точки по ее координатам сводится к построению прямоугольника данных размеров, две стороны которого лежат на осях координат.

При построении точки по ее координатам необходимо обращать внимание на то, что направление, в котором координата откладывается по оси, зависит от знака координаты. Так, строя точку (—2,—3), должно отложить отрезок $OP=-3$ влево от начала и восставить перпендикуляр $PM=-2$ вниз от точки P.

19. Косоугольные координаты. До сих пор мы определяли положение точки относительно двух взаимно-перпендикулярных осей. Но нет необходимости брать оси координат взаимно-перпендикулярными. Возьмем две прямые, пересекающиеся под произвольным углом (черт. 12). Очевидно, что положение точки M будет определено, если будут даны расстояния $P'M$ и $Q'M$ точки M от обеих осей. Но удобнее принять за координаты точки M не длины перпендикуляров из точки M на оси, а длины линий, проведенных из нее параллельно осям. Преимущество такого выбора координат заключается в том, что фигура $OPMQ$ есть параллелограмм; поэтому здесь, как и в случае прямоугольных осей, можно откладывать координаты точки не параллельно осям, а прямо на осях. В таком случае абсциссой точки M будет служить длина линии QM, параллельной оси X, или длина отрезка OP, а ординатой длина линии PM параллельной оси Y, или длина отрезка OQ. Правило знаков остается здесь то же, что и в прямоугольной системе. Если координатный угол XOY обозначим через ω, то между координатами точки M и ее расстояниями от осей будут следующие соотношения:



Черт. 12.

$$MP=Y\sin\omega,\quad MQ=X\sin\omega.$$

Отсюда видно что определение положения точки на плоскости при помощи косоугольных координат выполняется так же, как и при помощи прямоугольных; разница состоит лишь в том что прежний прямоугольник $OPMQ$ обращается теперь в параллелограмм. Система прямоугольных координат есть частный случай, соответствующий $\omega = \frac{\pi}{2}$

В последующем мы обыкновенно будем выражать углы не в градусах, минутах и секундах, а в отвлеченных числах, представляющих в круге радиуса, равного единице, длину дуги, которою измеряется данный угол, как центральный. Так как прямой угол измеряется четвертью окружности, а длина окружности при радиусе равном единице есть 2π, то мера прямого угла есть $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Здесь единицею меры служит радиан, угол в $\frac{360}{2\pi} = 57°17'45''$.

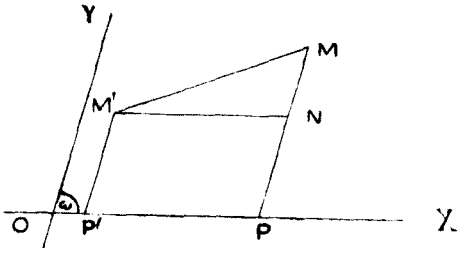
Обыкновенно оси X и Y располагаются так, что переход от положительного направления оси X к положительному направлению оси Y соответствует повороту около начала координат в направлении обратном вращению часовой стрелки.

Рассмотрим некоторые частные случаи положения точки. Найдем координаты начала координат. Абсцисса точки M представляет расстояние, считаемое параллельно оси X, между осью Y и прямою PM параллельною оси Y; если точка M будет в начале координат, то расстояние это будет равно нулю. Далее, когда точка M придет в O, то сюда же придет и точка P; расстояние между точками O и P будет равно нулю; следовательно и вторая координата начала есть нуль. Таким образом координаты начала суть

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Посмотрим, где лежат точки, для которых только одна абсцисса равна нулю. Абсцисса есть расстояние от точки O до точки P, считаемое по оси X; если это расстояние равно нулю, то это значит, что прямая PM совпадает с осью Y, а следовательно и точка M лежит на оси Y. Точно также те точки, для которых ордината равна нулю, лежат на оси X; в самом деле, если ордината точки M равна нулю, то M совпадает с P, т.-е. лежит на оси X.

20. Задача. Определить расстояние между двумя точками. Так как в аналитической геометрии дать точку значит дать ее координаты, то решить предложенную задачу значит выразить расстояние между двумя точками через их координаты. Пусть даны точки $M(x\ y)$ и $M'(x'.y')$. Строим координаты данных точек (черт. 13) и через одну из них, — напр. через M' — проводим прямую $M'N$ параллельно оси X. Мы получаем таким образом треугольник MNM' в котором известны стороны MN и $M'N$ и угол MNM', именно:



Черт. 13.

$$M'N = P'P = OP - OP' = x - x',$$
$$MN = PM - PN = PM - P'M' = y - y'.$$

Угол MNM' дополняет координатный угол до двух прямых углов, или до π, так как стороны этих двух углов параллельны и обращены в разные стороны; таким образом

$$\angle MNM' = \pi - \omega.$$

По этим трем данным можно определить сторону MM'. По известной теореме тригонометрии имеем

$$MM'^2 = MN^2 + NM'^2 . - 2MN . NM' . \cos MNM',$$

или

$$MM'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\omega. \qquad (1)$$

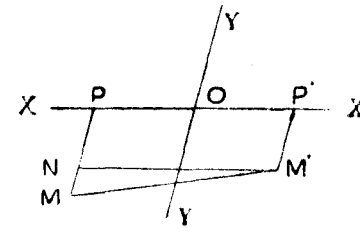
Отсюда имеем выражение искомого расстояния

$$MM' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\omega}. \qquad (2)$$

В отличие от того, что мы имели на прямой линии, расстояние между двумя точками плоскости рассматривается, как величина абсолютная; по этому в формуле (2) корень надо понимать в арифметическом смысле, т.-е брать его абсолютное значение. Но если мы имеем на плоскости несколько точек, расположенных

на одной прямой, то иногда бывает нужно приписывать расстояниям между точками знаки + или —, смотря по направлениям соответствующих отрезков на прямой, как это мы видели выше (§ 2); тогда в формуле (2) нужно рассматривать оба значения корня и решить, какое из них должно быть взято в данном случае.

При выводе формулы (2) мы брали точки M и M' так, что разности $x - x'$, $y - y'$ были положительны; но легко убедиться, что если бы мы их взяли в каком-нибудь другом расположении, то формула (2) сохранила бы свой вид. Возьмем, например, точку M в третьей четверти и M' в четвертой (черт. 14) и покажем, что формула останется та же. Построим и в этом случае координаты данных точек и прямую $M'N$, параллельную оси X; мы получим таким образом треугольник $M'NM$, в котором $M'N = PP' = OP' + PO$. Отрезок OP' есть x'; так как длина отрезка OP откладывается влево от начала, то координата x точки M отрицательна; но длина отрезка PO, как величина существенно положительная, равна не x, а $-x$; поэтому, понимая под MN' абсолютную длину отрезка $M'N$, будем иметь



Черт. 14.

$$M'N = x' + (-x) = x' - x.$$

Точно также:

$$MN = MP - NP = MP - M'P' = -y - (-y') = y' - y.$$

Таким образом, две стороны треугольника выражаются через координаты данных точек так же, как и раньше, а угол, лежащий против искомой стороны, равен $\pi - \omega$. Отсюда заключаем, что в этом случае

$$MM'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2(x' - x)(y' - y)\cos\omega.$$

Мы видим, что и в этом случае полученное выражение тождественно с (1).

Посмотрим, какой вид будет иметь формула (1), если точка M' находится в начале координат. В этом случае координаты

точки M' суть $x=0$, $y=0$. Подставив эти значения в формулу (1), получим:

$$MO^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega. \qquad (3)$$

В случае прямоугольных осей $\cos\omega = 0$, последний член формулы (1) исчезает, и мы имеем:

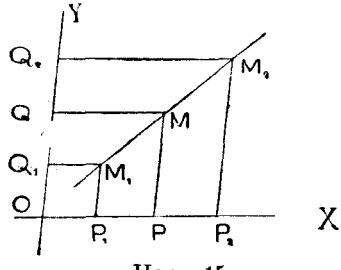
$$MM'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2. \qquad (4)$$

Эта формула может быть выведена непосредственно из пифагоровой теоремы, так как в случае прямоугольных координат MM' представляет гипотенузу, а MN и $M'N$—два катета прямоугольного треугольника.

Полагая в (4) $x'=0$, $y'=0$, получим выражение в прямоугольных координатах расстояния точки M (x,y) от начала координат:

$$MO^2 = x^2 + y^2. \qquad (5)$$

21. Задача. Разделить отрезок в данном отношении. Пусть нам даны точки M_1 (x_1,y_1) и M_2 (x_2,y_2) (черт. 15) и требуется найти на прямой M_1M_2 точку M так, чтобы отрезки M_1M и MM_2 находились в данном отношении λ.



Черт. 15.

Пусть будут x, y координаты искомой точки M. Проведя прямые P_1M_1, P_2M_2, PM параллельно оси Y, будем иметь

$$OP_1 = x_1,\quad OP_2 = x_2,\quad OP = x.$$

Параллельные прямые P_1M_1, P_2M_2, PM отсекают на прямой M_1M_2 и на оси X пропорциональные отрезки. Отсюда имеем

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

Но, по условию,

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda,$$

и потому

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda.$$

Так как положение точек P_1, P_2 на оси X известно, то наша задача приводится к делению в данном отношении отрезка P_1P_2,

лежащего на оси X, т.-е. к решению той же задачи, но не на плоскости, а на прямой (§ 7). Пользуясь полученными ранее результатами и прилагая затем те же соображения и к оси Y, находим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{6}$$

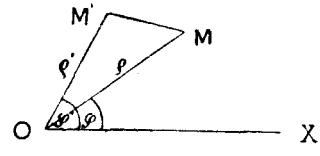
К формулам (6) применимы все заключения §§ 7—16. Таким образом, каждой точке прямой M_1M_2 соответствует определенное отношение λ, причем точкам внутри отрезка M_1M_2 соответствуют положительные значения λ, а точкам вне отрезка — отрицательные; значению $\lambda = -1$ соответствует безконечно-удаленная точка прямой; если две точки M, M' прямой соответствуют двум равным и противоположным значениям λ, так что

$$\frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{M_1M'}{M'M_2},$$

то четыре точки M_1, M_2, M, M' образуют гармонический ряд, и т. д.

22. Полярные координаты. Кроме Декартовых координат, возможны еще и безчисленные другие системы координат, позволяющия определять положение точки на плоскости при помощи чисел.

Простейшая после декартовой системы координат есть полярная система координат, примененная впервые Яковом Бернулли (J. Bernouilli) в 1691 г. Возьмем произвольную точку O, называемую полюсом (черт. 16), и проведем через нее прямую OX в одну сторону от точки O. Эта прямая называется полярною осью. Пусть дано расстояние ρ точки M от полюса — радиус-вектор точки M и угол φ, образуемый радиусом-вектором и полярною осью; угол этот называется полярным углом, азимутом, или амплитудою.



Черт. 16.

Две координаты—радиус-вектор и амплитуда—вполне определяют положение точки на плоскости. В самом деле, если мы

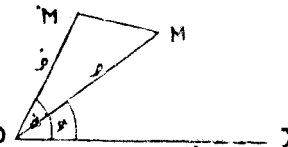
опишем данным радиусом окружность из точки O, то все точки, лежащие на этой окружности, будут одинаково отстоять от полюса O,—для всех них радиус-вектор будет иметь одну и ту же величину ρ; если мы таким же образом дадим один только угол φ, то все точки, лежащие на прямой OM, будут иметь амплитуду равную φ. Если же заданы обе координаты ρ и φ, то этим указывается, что точка должна одновременно лежать и на окружности, описанной из O радиусом ρ, и на прямой OM; а эти две линии пересекаются только в одной точке (прямая OM берется здесь только по одну сторону от точки O, так как остальная часть ее наклонена к полярной оси не под углом φ, а под углом $\varphi + \pi$). Легко видеть, что для полюса O радиус-вектор ρ равен нулю, а полярный угол φ—величина неопределенная.

Заметим, что радиус-вектор дается всегда, как величина существенно положительная; но если, решая какую-либо задачу, мы получим для радиуса-вектора отрицательное значение, то это обыкновенно не указывает на невозможность вопроса, а только на то, что полученную длину нужно отложить не на данном направлении радиуса-вектора, а на его продолжении по другую сторону полюса. Если мы всегда задаем радиус-вектор положительным, то это только потому, что уже одних положительных его значений достаточно для определения всех точек плоскости. Что касается угла φ, то он считается положительным, когда соответствует вращению радиуса-вектора от полярной оси в сторону, обратную вращению часовой стрелки.

Легко видеть, что одной и той же точке на плоскости соответствует безчисленное множество значений полярного угла. Пусть точке M соответствует значение полярного угла $\varphi = \alpha$. Повернув радиус-вектор в положительном направлении на полный оборот, т.-е. на 360^0, или на 2π, мы очевидно, придем к прежней точке, причем ей будет таким образом соответствовать угол $\varphi = \alpha + 2\pi$. Если бы мы повернули радиус-вектор в обратном направлении, то получили бы для M азимут $\varphi = \alpha - 2\pi$. Вообще ясно, что если точка M имеет полярный угол α, то ей же соответствуют и все полярные углы, заключающиеся в формуле $\varphi = \alpha + 2k\pi$, где k произвольное целое число, положительное или отрицательное. Если точка M дана непосредственно, то углу φ естественно приписывать простейшее возможное для него значение; это значение обыкновенно берут или между 0 и 2π (0^0 и 360^0), и иначе между $-\pi$ и $+\pi$ (-180^0 и $+180^0$). Но если точка M полу

чена непрерывным перемещением движущейся точки из некоторого начального положения M_0 с координатами ρ_0, φ_0, то полярному углу точки M удобнее приписывать то значение, которое получится, если при перемещении точки из M_0 в M полярный угол будет изменяться непрерывно. Если, например, точка M, лежащая на полярной оси, опишет окружность около полюса O в положительном направлении, то после одного обхода ее полярный угол будет уже на 0, а 2π, так как при движении точки по окружности ее полярный угол постоянно возрастал и, изменяясь непрерывно, не мог возвратиться к своему первоначальному значению.

23. Решим в полярных координатах задачу об определении расстояния между двумя точками. Пусть даны в полярной системе координат (черт. 17) точки $M(\rho, \varphi)$ и $M(\rho', \varphi')$. Мы здесь опять имеем треугольник, в котором известны две стороны $OM = \rho$ и $OM = \rho'$ и угол $\angle MOM' = \varphi' - \varphi$ между ними; отсюда находим:

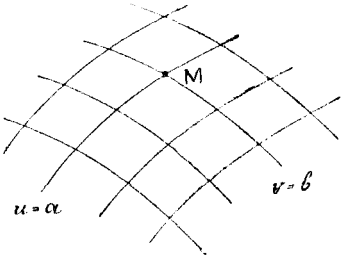


Черт. 16.

$$MM'^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi' - \varphi). \qquad (7)$$

Так выражается расстояние между двумя точками через их полярные координаты.

24*. Общие свойства координат на плоскости. В декартовой и полярной системе координат положение точки на плоскости определяется двумя числами, координатами точки. Покажем, что такое определение возможно и безчисленными другими способами. Вообразим на плоскости семейство линий, непрерывно следующих одна за другою, и притом таких, чтобы через каждую точку M плоскости проходила одна из линий семейства (черт. 18). Тогда мы можем условиться, что каждому значению некоторого переменного u будет соответствовать одна определенная линия этого семейства и, обратно, каждой линии — одно определенное значение переменного u, причем непрерывному изменению переменного u должен соответствовать и непрерывный переход от одной линии



Черт. 17.

нашего семейства к другой. Точно также рассмотрим другое семейство линий, связанных таким же образом с другим переменным v. Тогда через каждую точку M плоскости будут проходить по одной линии каждого из двух семейств и, следовательно, каждой точке будут соответствовать определенные значения параметров u и v, именно те, которые соответствуют двум линиям, пересекающимся в M. Обратно, если нам даны два значения $u = a$ и $v = b$, то этим значением будет соответствовать по одной линии каждого семейства, и эти две линии своим пересечением определят некоторую точку M. Таким образом, мы можем сказать, что при посредстве наших двух семейств линий каждой точке плоскости соответствуют два числа a и b, определяющих положение этой точки; эти числа и будут двумя координатами этой точки. Отсюда видно, что какой бы системой координат мы ни пользовались, для определения положения точки на плоскости нужно иметь два числа, данных независимо одно от другого. Число независимых данных, нужных для определения элементов данной геометрической формы, называется **числом измерений** этой формы относительно ее элементов. Таким образом, плоскость, как место точек, есть форма двух измерений.

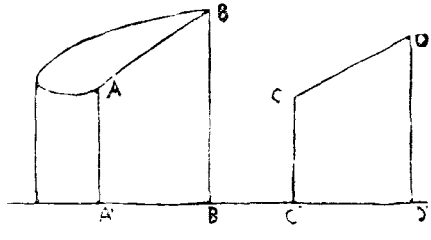
Линия, для всех точек которой одна из координат u, v имеет одно и то же значение, называется **координатною линиею**. Таким образом, каждой системе координат соответствуют два семейства координатных линий $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, и каждая точка плоскости определяется в этой системе, как точка пересечения двух координатных линий.

В общем случае координатные линии суть кривые, почему и соответствующие координаты называются также **криволинейными**. Нетрудно, однако, видеть, что в декартовой системе координат оба семейства координат линий состоят из прямых параллельных осям координат. Поэтому декартовы координаты называются также **прямолинейными координатами**. В полярных координатах одно семейство координат состоит из окружностей с центром в полюсе, а другое из прямых линий выходящих из полюса.

ГЛАВА III.

Преобразование координат.

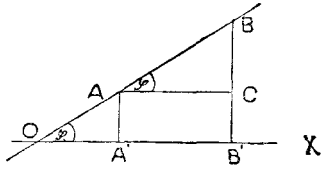
25. Проекции. Возьмем на плоскости прямую, которую будем называть осью проекций. Рассмотрим какую-нибудь точку A плоскости. Основание A' перпендикуляра, опущенного из точки на ось, называется проекцией этой точки на ось; если бы точка находилась на оси, то она была бы сама своею проекцией. Если мы имеем некоторую линию AB (черт. 19), то проекцией этой линии на данную ось будет геометрическое место проекций всех ее точек. В частности, проекцию $C'D'$ прямолинейного отрезка CD получим, если построим проекции C', D' концов этого отрезка и возьмем отрезок, $C'D'$, заключенный между ними. Очевидно, что для кривых последнее свойство будет иметь место только в том случае, если все точки кривой лежат внутри полосы, заключенной между перпендикулярами, опущенными из концов кривой на ось проекций; этого не будет, например, для кривой AMB, представленной на черт. 19, так как не все проекции ее точек лежат на отрезке $A'B'$.



Черт. 19.

Выведем зависимость между длиною прямолинейного отрезка и длиною его проекции. Рассмотрим отрезок AB и его проекцию $A'B'$ (черт. 20). Пусть угол между осью проекций и направлением отрезка будет φ; тогда

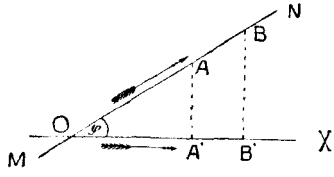
$$A'B' = AC = AB \cos \varphi. \qquad (1).$$



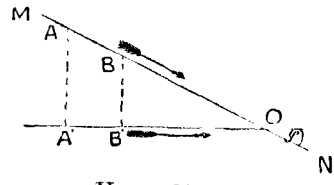
Черт. 20.

Таким образом, длина проекции прямолинейного отрезка равна длине проектируемого отрезка, умноженной на косинус угла между ними.

Если мы рассматриваем отрезок AB, как принадлежащий некоторой прямой линии, на которой установлено положительное направление, то этот отрезок может быть положительным или отрицательным. На оси проекций мы также можем выбрать положительное направление, и тогда проекция $A'B'$ также будет иметь тот или другой знак. Нетрудно дать формуле (1) такое истолкование, при котором она будет давать не только величину, но и знак проекции. Пусть отрезок AB (черт. 21) лежит на прямой MN,

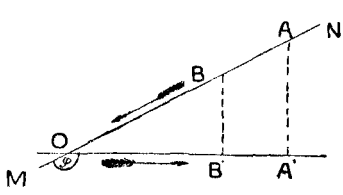


Черт. 21.

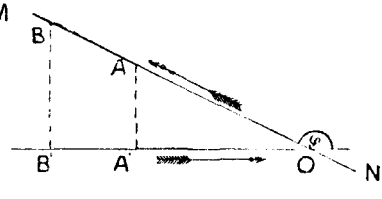


Черт. 22.

положительное направление которой указано стрелкою. Пусть, далее, дано также положительное направление на оси проекций OX. При точке O пересечения прямой MN с осью проекций образуются четыре угла. Будем понимать в формуле (1) под φ тот из этих углов, который заключается между положительными



Черт. 23.



Черт. 24.

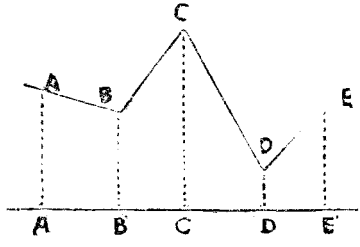
направлениями обоих прямых. Тогда формула (1) будет давать не только величину проекции, но и ее знак.

Таким образом, формула (1) получает следующее истолкование.

Длина проекции прямолинейного отрезка равна длине проектируемого отрезка, умноженной на косинус угла между положительным направлением прямой, содержащей проектируемый отрезок и положительным направлением оси проекций.

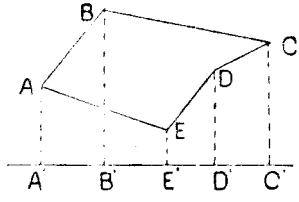
Не трудно убедиться, что это соотношение справедливо при всяких положениях оси и проектируемого отрезка. Если угол φ острый (черт. 21 и 22), то $A'B'$ и AB будут иметь одинаковые знаки, и так как $\cos\varphi$ здесь положительно, то формула (1) даст правильный знак. Если же угол φ тупой (черт. 23 и 24), то переменим положительное направление на прямой MN; тогда угол φ заменится смежным с ним, а вместе с тем изменится и знак отрезка AB. Так как тупой угол φ заменился теперь острым, то формула (1) даст правильный знак; но переменив положительное направление на прямой MN, мы переменили знаки как у AB, так и у $\cos\varphi$. Следовательно, правая часть формулы (1 при этом не изменится, и формула будет справедлива и при φ тупом.

26. Проекция ломаной линии. Рассмотрим ломаную линию $ABCDE$ и ее проекцию $A'B'C'D'E'$ (черт. 25). Очевидно, что длина проекции $A'E'$ нашей ломаной равна сумме $A'B' + B'C' + C'D' + D'E'$, т.-е. равна сумме проекций отдельных звеньев ломаной.



Черт. 25.

В данном случае это очевидно потому, что при перемещении по ломаной от A к E все проекции отдельных звеньев ломаной проходятся в одном и том же направлении и потому имеют одинаковые знаки. Но если мы возьмем более сложную ломаную $ABCDE$ (черт. 26), то проекции ее звеньев будут проходиться то в положительном направлении, то в отрицательном, и здесь нужно условиться, что считать за длину проекции ломаной линии.



Черт. 26.

Будем рассматривать ломаную, как описанную непрерывным движением точки от одного конца ломаной до другого. При перемещении точки вдоль ломаной проекция точки будет перемещаться по оси проекций, описывая последовательно в определенном направлении проекции отдельных звеньев. Следуя началу, изложенному в § 3, условимся понимать всегда под длиною проек-

ции ломаной алгебраическую сумму проекций ее отдельных звеньев, взятых в том направлении, в каком они описываются проекциею точки, движущейся вдоль ломаной. Таким образом, обозначая символом пр. AB длину проекции отрезка AB, мы будем иметь, по определению, какова бы ни была ломаная $ABCDE$,

$$\text{пр. } ABCDE = \text{пр. } AB + \text{пр. } BC + \text{пр. } CD + \text{пр. } DE.$$

Из этого определения проекции ломаной линии непосредственно вытекает следующее предложение:

Проекция ломаной не зависит от ее формы, а зависит только от положения ее концов и равна проекции отрезка, соединяющего концы ломаной.

Пусть будет $ABCDE$ ломаная, A',B',C',D', E' проекции ее вершин. По определению имеем

$$\text{пр. } ABCDE = A'B' + B'C' + C'D' + D'E'.$$

Но так как здесь проекции $A'B'$, $B'C'$... берутся с их знаками, то по § 4 имеем

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' = A'E'$$

и потому

$$\text{пр. } ABCDE = A'E',$$

откуда видно, что проекция ломаной зависит только от положения ее конечных точек A и E и равна проекции отрезка AE, соединяющего концы ломаной.

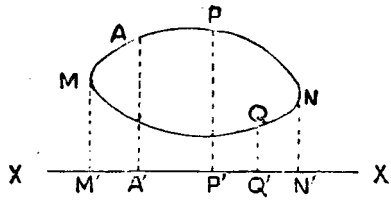
Отсюда, в частности, следует, что проекция замкнутой ломаной на ось равна нулю; действительно, в этом случае оба конца ломаной совпадают, и потому длина отрезка между их проекциями равна нулю. Если, например, точка будет двигаться вдоль замкнутой ломаной $ABCDEA$ (черт. 26), то ее проекция опишет последовательно отрезки $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'A'$. Из них два первые положительны, а три последние отрицательны, и алгебраическая сумма всех пяти отрезков равна нулю.

Рассматривая кривую, как предел вписанной в нее ломаной, мы можем определить и проекцию кривой на ось, как предел проекции вписанной в нее ломаной. При этом предыдущие предложения остаются верными и в пределе, и мы имеем:

Проекция дуги кривой не зависит от ее формы и равна проекции хорды, стягивающей дугу.

Проекция замкнутой кривой равна нулю.

Например, если точка A будет двигаться по кривой (черт. 27), описывая замкнутый путь $MPNQM$, то при движении точки по дуге MPN ее проекция $'A$ опишет отрезок $M'N'$ в положительном направлении; при дальнейшем движении точки по дуге NQM ее проекция опишет тот же отрезок $N'M'$, но в отрицательном направлении; алгебраическая сумма обоих отрезков $M'N'$, $N'M'$, очевидно, равна нулю.



Черт. 27.

27. Преобразование координат. Так как координаты одной и то же точки в разных системах координат различны, то в аналитической геометрии нужно иметь способ, зная координаты точки по одной системе, находить координаты той же точки по другой системе. Такой переход от одной системы координат к другой называется преобразованием координат. Пусть координаты точки M по старой системе будут x, y, а по новой x', y'. Так как координаты x, y определяют точку M, а положение точки M определяет, в свою очередь, координаты x', y', то x', y' должны выражаться определенным образом через x, y. Пусть будут

$$x' = A(x, y),\ y' = B(x, y) \qquad (2)$$

формулы, дающие выражения новых координат каждой точки плоскости через ее старые координаты. Символы $A(x, y)$, $B(x, y)$ представляют выражения, содержащие определенным образом x и y, или, как эти выражения называются в анализе, $A(x, y)$, $B(x, y)$ суть определенные функции от x и y. Подставляя в выражения (2) вместо x, y определенные числа a, b и производя над ними действия, соответствующие символам $A(x, y)$, $B(x, y)$, мы получим для x', y' также определенные числа a', b'; тогда a', b' будут новыми координатами той точки M, старыми координатами которой были числа a, b. Ниже мы будем иметь примеры формул преобразования координат различных систем.

Формулы (2) дают выражения новых координат x', y' через

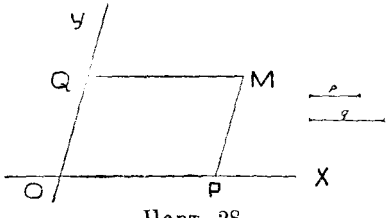
старые x, y. Выражая отсюда x, y через x', y', мы получим те же соотношения в виде

$$x = A'(x', y'),\ y = B'(x', y'), \tag{3}$$

где $A'(x', y')$, $B'(x', y')$ суть некоторые функции от x', y'. В аналитической геометрии формулы преобразования употребляются обыкновенно именно в этом последнем виде, т.-е. решенными не относительно новых координат x', y', а относительно старых x, y. Причина этого следующая. В аналитической геометрии чаще приходится иметь дело не с числовыми значениями координат, а с уравнениями, которым должны удовлетворять координаты той или другой точки. Пусть координаты x, y точки M, взятые по старой системе, удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — символ некоторой функции от x, y. Чтобы получить то уравнение, которому удовлетворяют координаты x', y' той же точки M, взятые по новой системе, мы должны подставить в $F(x, y) = 0$ выражения старых координат x, y через новые x', y'; а для этого необходимо иметь формулы преобразования решенными относительно старых координат x, y, т.-е. в виде (3). Подставив в $F(x, y) = 0$ вместо x, y их выражения (3), мы получим уравнение, которому удовлетворяют новые координаты x', y' точки M, в виде

$$F[A'(x', y'), B'(x', y'] = 0.$$

Мы начнем с вывода формул преобразования декартовых координат в другие декартовы. Общее преобразование декартовых координат может быть разложено на следующие частные преобразования: 1) перемена масштаба; 2) перемена начала координат; 3) перемена направления осей.



Черт. 28.

28. Преобразование масштаба. Имеем оси координат и точку $M(x, y)$ (черт. 28). Пусть единицею масштаба для координаты x будет длина p, а для координаты y — длина q. Тогда (ср. §§ 5 и 18):

$$x = \frac{OM}{p},\ y = \frac{PM}{q} \tag{4}$$

Положим теперь, что единица длины для координаты x в m раз, а для координаты y — в n раз, и пусть будут x', y' новые координаты точки M. Тогда имеем

$$x' = \frac{QM}{mp}, \quad y' = \frac{PM}{nq}, \tag{5}$$

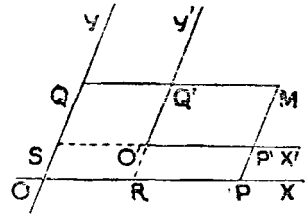
и отсюда, деля (4) на (5),

$$x = mx', \; y = ny'. \tag{6}$$

Таким образом, прежняя координата равна новой, умноженной на отношение между новым и старым масштабом.

В элементарной части аналитической геометрии преобразование масштаба не играет существенной роли, так как соотношения между различными точками плоскости зависят от расстояний этих точек от осей координат, а не от того, в каких мерах эти расстояния выражены. Поэтому в последующем мы будем предполагать, что при всех преобразованиях координат единицы масштаба остаются неизменными и притом одинаковыми для обеих координат x и y.

29. Преобразование начала. Пусть начало координат перенесено из O в O', но направление осей осталось прежнее, так что ось X' параллельна оси X и ось Y' — оси Y, причем положительные направления каждой пары осей одинаковы (черт. 29). Чтобы определить положение новой системы осей относительно прежней, нужно знать координаты нового начала O' относительно старой системы осей; обозначим их через a, b. Возьмем какую-нибудь точку M и построим ее координаты по старой системе OP, OQ и по новой $O'P'$, $O'Q'$. Обозначив через R, S точки пересечения новых осей со старыми, будем иметь



Черт. 29.

$$OP = RP + OR = O'P' + OR,$$
$$OQ = SQ + OS = O'Q' + OS;$$

а так как $OP = x$, $OQ = y$, $O'P' = x'$, $O'Q' = y'$, $OR = a$, $OS = b$, то отсюда

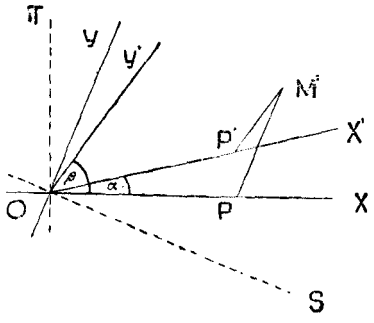
$$x = x' + a,$$
$$y = y' + b. \tag{7}$$

т. е. старая координата точки равна новой, сложенной с координатою нового начала по старой системе.

Если бы мы пожелали иметь выражение новых координат через старые, то нашли бы

$$x' = x - a, \quad y' = y - b.$$

30. Преобразование направления осей. Пусть мы имеем старую систему осей XOY и пусть через то же начало O проходит новая система $X'OY'$ с другим направлением осей (черт. 30).



Черт. 30.

Положение новых осей относительно старых будет известно, если будут даны углы наклонения новых осей к одной из старых. Пусть ось X' наклонена к оси X под углом α, а ось Y' к той же оси X под углом β. Если мы обозначим координатный угол XOY через ω, то углы наклонения новых осей к оси Y будут $X'OY = \omega - \alpha$, $Y'OY = \omega - \beta$. Условимся приписывать каждому из углов α, β, определенный знак, руководствуясь тем же началом, как и при определении знака полярного угла в полярной системе координат (§ 22), т. е. будем считать положительными те углы, которые получаются вращением прямой линии против часовой стрелки. Обозначая каждый угол, мы будем называть первою его начальную сторону; тогда если напр. $\angle AOB$ будет положительным, то $\angle BOA$ будет отрицательным. В декартовой системе координат оси обыкновенно располагаются так, чтобы угол XOY между положительными направлениями осей был положительным. Очевидно, что новый координатный угол ω' будет равен $\beta - \alpha$. Возьмем точку M (черт. 30) и построим ее координаты по старой и новой системе:

$$OP = x, \; PM = y, \; OP' = x', \; P'M = y'$$

Чтобы найти связь между этими координатами, воспользуемся способом проекций. Проведем через O перпендикуляр OS к оси Y и будем проектировать на него ломаные OPM и $OP'M$. Так

как обе эти линии имеют общее начало и общий конец, то их проекции на OS равны между собою:

$$\text{пр.}OP + \text{пр.}PM = \text{пр.}OP' + \text{пр.}P'M.$$

Так как длина проекции равна длине проектируемого отрезка умноженной на cos угла между ними, то нам необходимо знать углы наклонения к оси проекций осей X, Y, X', Y'. Нетрудно видеть, что ось проекций образует с осью X угол $\frac{\pi}{2} - \omega$, с осью Y — угол $\frac{\pi}{2}$, с осью X' — угол $\frac{\pi}{2} - (\omega - \alpha)$, и с осью Y' — угол $\frac{\pi}{2} - (\omega - \beta)$.

Из равенства обоих проекций имеем

$$x\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) + y\cos\frac{\pi}{2} =$$
$$= x'\cos\left[\frac{\pi}{2} - (\omega - \alpha)\right] + y'\cos\left[\frac{\pi}{2} - (\varphi - \beta)\right],$$

или

$$x\sin\omega = x'\sin(\omega - \alpha) + y'\sin(\omega - \beta),$$

откуда

$$x = \frac{x'\sin(\omega - \alpha) + y'\sin(\omega - \beta)}{\sin\omega} \qquad (8)$$

Формулу для y мы могли бы составить по аналогии. В самом деле, для этого нужно переменить роли осей X и Y и на место углов α и β осей X' и Y' с осью X поставить углы $\omega - \alpha$ и $\omega - \beta$ тех же осей с осью Y. Полезно заметить, что определяя углы осей X', Y' с осью Y, мы здесь отступаем от установленного выше правила знаков для углов, так как в нашем случае углы эти, очевидно, направлены по часовой стрелке, а между тем мы считаем их положительными. Это происходит оттого, что переменив роли осей X и Y, мы должны считать положительное направление углов не от оси X к оси Y, а от оси Y к оси X. Поступая указанным способом, находим:

$$y = \frac{x'\sin[\omega - (\omega - \alpha)] + y'\sin[\omega - (\omega - \beta)]}{\sin\omega},$$

или

$$y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\omega}. \qquad (8)$$

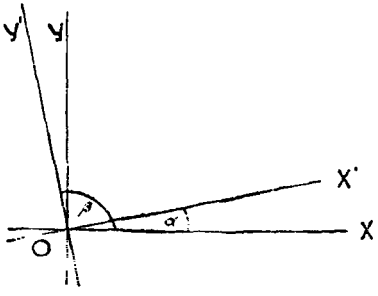
Выведем ту же формулу непосредственно. Для этого надо переменить роли осей X и Y, т.-е. взять за ось проекций линию OT, перпендикулярную к оси X. Она будет наклонена к осям X, Y, X', Y' под углами $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \omega$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$. Напишем, что проекция на OT ломаной OPM равна проекции ломаной $OP'M$

$$x\cos\frac{\pi}{2} + y\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = x'\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + y'\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

откуда, по прежнему

$$y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\omega} \qquad (8)$$

Посмотрим, какой вид примут формулы преобразования (8), если обе системы осей будут прямоугольными (черт. 31). Предположим, что положительное направление оси Y' относительно оси X' такое же, как положительное направление оси Y относительно оси X, т.-е что наша прежняя система повернута около O на угол α. В этом случае



Черт. 31.

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

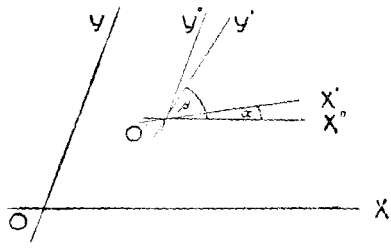
Вставив эти значения в формулы (8), находим

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (9)$$

Последние формулы особенно важны, так как в приложениях всего чаще приходится пользоваться прямоугольными координатами.

31. Общий случай преобразования декартовых координат. Рассмотрим две системы осей координат (черт. 32),—систему XOY и другую систему $X'O'Y'$ с новым началом и новым напра-

влением осей. Пусть даны координаты нового начала a и b углы α и β новых осей с прежней осью X. Требуется перей от системы XOY к системе $X'O'Y'$. Легко видеть, что это сло ное преобразование может быть разложено на два более пр стых, на преобразование начала и на преобразование направления осей. В самом деле, введем новую вспомогательную систему координат $X''O'Y''$, имеющую новое начало O', но прежнее направление осей. Перейдем сначала от системы XOY к системе $X''O'Y''$:



Черт. 32.

$$x = x'' + a, \quad y = y'' + b, \tag{10}$$

а затем от системы $X''O'Y''$ к системе $X'O'Y'$:

$$x'' = \frac{x' \sin(\omega - \alpha) + y' \sin(\omega - \beta)}{\sin \omega},$$

$$y'' = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \omega} \tag{11}$$

Исключив из формул (10) и (11) x'' и y'', получим общия формулы преобразования декартовых координат:

$$x = \frac{x' \sin(\omega - \alpha) + y' \sin(\omega - \beta)}{\sin \omega} + a,$$

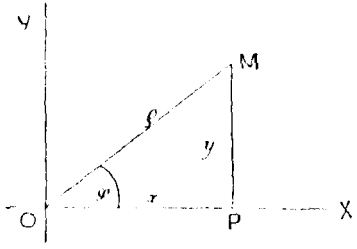
$$y = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \omega} + b \tag{12}$$

Заметим важную особенность всех выведенных выше формул (6), (8), (12): первые части их представляют целые выражения первой степени относительно x' и y', или, как говорят, координаты x' и y' входят в эти формулы линейно. Обратно, нетрудно было бы убедиться, что если мы имеем выражения x и y в виде двух линейных многочленов по x' и y'

$$x = Ax' + By' + C, \quad y = A'x' + B'y' + C',$$

то такие выражения можно рассматривать, как формулы преобразования декартовых координат в декартовы, включая сюда и преобразование масштаба, если только детерминант $\begin{matrix} A & B \\ A' & B' \end{matrix}$ не равен нулю.

32. Преобразование декартовых координат в полярные. Возьмем прямоугольные оси XOY (черт. 33). Так как мы уже умеем переходить от одной декартовой системы к другой, то мы можем ограничиться рассмотрением того случая, когда начало декартовых координат совпадает с полюсом, а положительное направление оси X с полярною осью полярной системы координат строим координаты точки M. Из треугольника OPM имеем



Черт. 33.

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \tag{13}$$

Эти формулы выражают прямоугольные декартовы координаты через полярные. Из них же или непосредственно из треугольника OPM находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{14}$$

Здесь радикал берется в его абсолютном значении, так как радиус-вектор рассматривается, вообще, как величина абсолютная (§ 22). Формулы (14) выражают полярные координаты через декартовы.

Заметим, что так как всякому тангенсу соответствует в пределах одной окружности, т. е. между 0 и 2π, не один, а два угла, отличающихся один от другого на π, то для нахождения угла φ по x и y необходимо знать, кроме величины тангенса еще знак синуса или косинуса. Для этого заметим, что из треугольника OPM имеем:

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho}$$

Следовательно, синус имеет одинаковый знак с y, а косинус — с x.

Можно, впрочем, дать формулу, которая определяла бы полярный угол φ по прямоугольным координатам x, y при помощи только одной тригонометрической функции. Внося в формулу

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

вместо $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ их выражения через x и y, имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}, \tag{15}$$

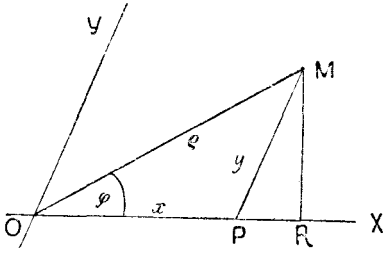
где радикал должен быть взят положительным, так как он заменяет собою радиус-вектор. Формула эта вполне определяет направление радиуса-вектора. В самом деле, так как угол $\frac{\varphi}{2}$ определяется по тангенсу, то мы найдем для него два значения, разнящиеся между собою на π; соответствующие значения для φ будут различаться на 2π, т.-е. на полный оборот, и потому оба значения будут определять одно и тоже направление радиуса-вектора. Предыдущая формула становится неопределенною при $y=0$, $x>0$; но тогда из формулы

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$$

находим

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}=0, \text{ и } \varphi=0.$$

33. Случай косоугольных координат. Выведем теперь формулы преобразования косоугольных декартовых координат в полярные. Эти формулы будут нам нужны далее. Предположим, как и выше, что полюс лежит в начале координат, а полярная ось лежит на оси X в положительном направлении. Построив (черт. 34) координаты точки M, получим треугольник OPM, в котором $OP=x$, $PM=y$, $OM=\rho$, $\angle POM=\varphi$, $\angle OPM=\pi-\omega$, $\angle OMP=\omega-\varphi$. Из этого треугольника находим:



Черт. 34.

$$\frac{x}{\varrho} = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}, \quad \frac{y}{\varrho} = \frac{\sin\varphi}{\sin\omega},$$

откуда

$$x = \varrho\frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}, \quad y = \varrho\frac{\sin\varphi}{\sin\omega}. \tag{16}$$

Таковы формулы перехода от косоугольных декартовых координат к полярным. Так как в дальнейшем они будут часто встречатся, то мы будем их писать в более сжатом виде, введя обозначения:

$$\frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega} = m, \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\omega} = n. \tag{17}$$

Тогда предыдущие формулы принимают более простой вид

$$x = m\varrho, \quad y = n\varrho. \tag{18}$$

Легко видеть, что количества m и n не независимы между собою. Действительно, они содержат только одно неопределенное количество φ; его мы можем исключить и тогда получим соотношение между m и n. Это соотношение может быть всего проще получено следующим образом. Выражая по формуле (3) § 20 квадрат расстояния ϱ точки M от начала O, имеем

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega = \varrho^2.$$

Внося сюда вместо x, y их значения $m\varrho, n\varrho$ и сокращая на ϱ^2, получим искомое соотношение между m и n:

$$m^2 + n^2 + 2mn\cos\omega = 1. \tag{19}$$

Выведем теперь формулы перехода от полярных координат к косоугольным декартовым. Из треугольника OPM имеем:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega. \tag{20}$$

из формул (16) имеем

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\omega - \varphi)},$$

Отсюда

$$y\sin\omega\cos\varphi - y\cos\omega\sin\varphi = x\sin\varphi,$$

и наконец

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y\sin\omega}{x + y\cos\omega}. \tag{21}$$

Последняя формула может быть получена и непосредственно. Если мы опустим из M перпендикуляр RM на ось X, то $\operatorname{tg}\varphi = \frac{RM}{OR}$. Из треугольника MPR находим:

$$RM = PM\sin\omega;\ PR = PM\cos\omega.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{RM}{OP+PR} = \frac{PM\sin\omega}{OP+PM\cos\omega} = \frac{y\sin\omega}{x+y\cos\omega}$$

Здесь, как и в формуле (14), кроме тангенса, нужно знать знак $\sin\varphi$ или $\cos\varphi$. Поступая, как и в случае прямоугольных координат, мы получим из (21):

$$\sin\varphi = \frac{y}{\varrho},\ \cos\varphi = \frac{x+y\cos\omega}{\varrho}.$$

ГЛАВА IV.

Геометрическое значение уравнений между координатами.

34. Уравнение линии. Мы знаем, что положение точки на плоскости вполне определено, если даны ее две координаты. Но нет необходимости давать координаты точки непосредственно: можно дать два уравнения, связывающие две координаты. Решив эти уравнения, мы определим координаты, а следовательно определим и положение точки. Пусть даны два таких уравнения:

$$F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 0, \qquad (1$$

где F и G суть выражения, содержащие x и y. Решив эту систему двух уравнений, мы получим для x и y одну или несколько пар числовых значений, удовлетворяющим обоим уравнениям; каждая пара таких значений даст нам точку, а все найденные пары значений x, y будут определять некоторую совокупность точек. Если даже система двух уравнений между двумя координатами и не разрешена, то в алгебре доказывается, что эта система всегда имеет определенную совокупность отдельных пар решений, которым точно также будут соответствовать определенные точки. Таким образом система двух независимых уравнений между двумя координатами определяет в аналитической геометрии одну или несколько точек. Обыкновенно это выражают, говоря, что система двух уравнений между координатами точки на плоскости изображает одну или несколько точек.

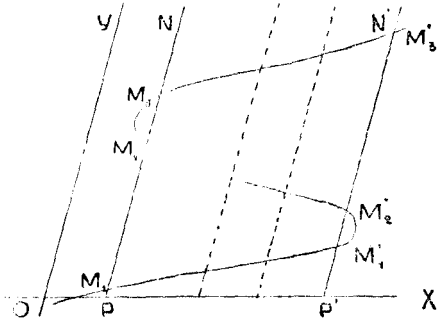
Посмотрим теперь, что будет, если даны не два уравнения между координатами x, y а только одно. Легко видеть, что одно уравнение определяет не одну или несколько точек, а бесчисленное множество их. В самом деле, одно уравнение с двумя неизвест-

ыми есть уравнение неопределенное и удовлетворяется бесчисленным множеством пар значений x и y; а так как каждая пара таких значений определяет точку, то наше уравнение определит бесчисленное множество точек. Докажем, что точки, которых координаты удовлетворяют данному уравнению, образуют, вообще, некоторую линию, т.-е. следуют одна за другою непрерывно

нам дано уравнение

$$F(x, y) = 0,$$

$F(x, y)$ есть непрерывная функция координат x и y. Дадим числовое значение a. Очевидно, что все точки,



Черт. 35.

на прямой PN, параллельной оси Y и отсекающей на X отрезок $OP = a$ (черт. 35), будут иметь координату x a, и, следовательно, будут удовлетворять условию $x = a$. Подставив в данное уравнение a вместо x, мы получим уравнение с одним неизвестным y

$$F(a, y) = 0.$$

Решив это уравнение относительно y, мы получим для y столько значений, какова степень уравнения. Пусть, напр., наше уравнение—третьей степени; тогда мы получим для y три значения b_1, b_2, b_3 и таким образом будем иметь три точки $M_1(a, b_1)$, $M_2(a, b_2)$, $M_3(a, b_3)$, лежащие на прямой PN; координаты всех этих точек, будут, очевидно, удовлетворять уравнению $F(x, y) = 0$. Дадим теперь x другое значение a'; вставив это значение в данное уравнение, будем иметь уравнение

$$F(a', y) = 0$$

уже с другими коэффициентами; следовательно, и корни его будут другие: $y_1=b_1'$; $y_2=b_2'$; $y_3=b_3'$; построим точки $M_1'(a', b_1')$, $M_2'(a', b_2')$, $M_3'(a', b_3')$. Будем теперь изменять непрерывно x от значения a до значения a'. Так как мы предположили, что $F(x, y)$ есть непрерывная функция от x и y, то при непрерывном изменении x от a до a' коэффициенты уравнения $F(x, y)=0$ будут также меняться непрерывно, а следовательно будут непрерывно меняться и корни этого уравнения, переходя от группы значений b_1, b_2, b_3 к группе значений b_1', b_2', b_3'. Ясно, что такому непрерывному изменению значений x и y будет соответствовать и непрерывное перемещение той точки M, координаты которой равны одной из пар решений уравнения $F(x, y)=0$, причем точка M, перемещаясь непрерывно, опишет некоторую линию. Таким образом мы доказали, что одно уравнение между двумя координатами точки изображает в аналитической геометрии линию, как геометрическое место всех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Обратно, если дана линия, описанная по определенному закону, то должно существовать уравнение, которому удовлетворяют координаты всех точек, лежащих на этой линии, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней. В самом деле, если кривая описана по определенному закону, то все ея точки должны обладать некоторым общим свойством, принадлежащим только точкам этой кривой и вытекающим из закона ея построения; так, например, точки каждой окружности имеют то свойство, что оне, и только оне, находятся на данном расстоянии от данной точки — центра окружности. Выразив это свойство каждой точки кривой через координаты точки, мы получим уравнение, которому должны удовлетворять координаты всех точек данной кривой; это уравнение и будет уравнением кривой в данной системе

В уравнении кривой

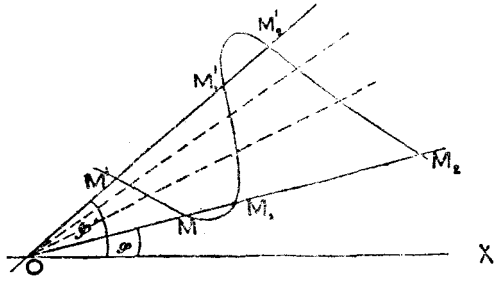
$$F(x, y)=0$$

неизвестные x, y, представляющие координаты произвольной точки кривой, называются текущими координатами.

Весьма важно обратить внимание на существенное различие между тем способом, каким в аналитической геометрии определяются точки и тем, каким в ней определяются линии. Тогда

как точка дается непосредственно своими координатами,—давая уравнение линии, мы определяем им не самую линию, а те точки, которые на ней лежат; линия является здесь только как геометрическое место тех точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению,—как основание (§ 2) ряда этих точек.

35. Все, что было здесь сказано относительно геометрического значения одного уравнения между двумя декартовыми координатами точки, применимо и ко всякой другой системе координат. В какой бы системе ни были взяты координаты



Черт. 36.

точки на плоскости, одно уравнение между ними будет представлять линию. Пусть, например мы имеем уравнение $F(\varrho, \varphi) = 0$ между полярными координатами ϱ, φ точки. Давая φ определенное значение и подставляя его в данное уравнение, мы получим для ϱ одно или несколько значений ϱ, ϱ_1, ϱ_2 и таким образом получим точки M, M_1, M_2 (черт. 36). Давая φ другое значение φ', мы и для ϱ получим другие значения ϱ', ϱ_1', ϱ_2', соответствующие точкам M', M_1', M_2'. Если теперь мы будем непрерывно изменять φ от одного значения до другого, то вместе с ним будет меняться непрерывно и ϱ, переходя от группы значений ϱ, ϱ_1, ϱ_2 к группе значений ϱ', ϱ_1', ϱ_2'; таким образом мы получим непрерывный ряд точек, или линию (черт. 36). Отсюда видно, что одно уравнение между полярными координатами изображает линию.

36. Пусть теперь мы имеем систему двух уравнений между координатами x, y

$$F(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

Мы уже видели выше, что такая система уравнений изображает одну или несколько точек. Посмотрим, как это вытекает из вы-

веденного выше геометрического значения одного уравнения. Обозначим через A, B те две линии, которые изображаются каждым из двух данных уравнений, взятым отдельно. Так как каждая пара значений x, y, удовлетворяющих первому уравнению, соответствует одной из точек линии A, а каждая пара значений, удовлетворяющих второму уравнению, соответствует одной из точек линии B, то очевидно, что значения, удовлетворяющие системе (1), соответствуют точкам, лежащим одновременно на обеих линиях A, B, т.-е. их точкам пересечения. Таким образом, система двух уравнений между двумя координатами точки изображает точки пересечения тех двух линий, которые изображаются каждым уравнением в отдельности.

Очевидно, что все сказанное справедливо только в том случае, когда оба данные уравнения независимы между собою, т. е. когда одно из них не есть следствие другого. В противном случае из двух данных уравнений было бы существенно только одно и потому оба уравнения представляли бы одну и ту же линию.

Когда точка дается своими двумя координатами a, b, то и тут можно сказать, что она дается двумя уравнениями, но уже приведенными к простейшему виду, $x = a$, $y = b$. Условие $x = a$ есть одно уравнение и, следовательно, должно изображать линию; эта линия должна быть такова, чтобы координаты всех ея точек удовлетворяли условию $x = a$; это — прямая, параллельная оси Y (§ 19). Точно также условие $y = b$ есть уравнение прямой, параллельной оси X. Таким образом, дать точку ея декартовыми координатами, значит определить ее, как точку пересечения двух прямых, из которых одна параллельна оси X, другая — оси Y.

37. Мнимые точки. Система двух уравнений между координатами может иметь, кроме действительных, также и мнимые решения. Эти последние не имеют соответственных точек; тем не менее, в аналитической геометрии оказывается полезным рассматривать на ряду с действительными также и мнимые значения координат. Когда нам дана система уравнений общего вида с буквенными коэффициентами, то число действительных решений этой системы будет зависеть от того, какие числовые значения мы дадим этим коэффициентам. Поэтому, исследуя в аналитической геометрии систему уравнений общего вида, мы были бы должны рассматривать отдельно целый ряд случаев, соответственно различному числу действительных решений возможных для этой системы. Чтобы объединить все эти случаи, условимся

говорить, что мнимым значениям координат также соответствуют особые, мнимые точки плоскости; этим мы не утверждаем геометрической действительности этих точек, а только вводим в целях обобщения особый термин чисто формального характера. Так как в аналитической геометрии точки входят только через свои координаты, то мы имеем полную возможность понимать в аналитической геометрии под словом „точка“ не только геометрический образ, но также и каждую совокупность, или систему двух значений координат x, y. Если эти значения действительны, то им на самом деле соответствует некоторая точка; если они мнимы, то хотя им и не соответствует никакой точки, но мы все-таки можем рассуждать над ними так же, как если бы и им соответствовала некоторая точка; такая точка называется мнимою.

Ниже мы будем иметь случаи видеть, какую пользу может принести в геометрии введение понятия о мнимых точках. Исследуя тот или другой геометрический вопрос методами аналитической геометрии, мы в некоторых случаях можем получить действительный результат независимо от того, будут ли координаты данных точек числами действительными или мнимыми. Этот результат будет поэтому иметь в обоих случаях действительное геометрическое содержание, и мы получим таким образом возможность объединить в одном предложении соотношения, соответствующие совершенно различным геометрическим условиям. Ниже (гл. VI и след.) мы будем иметь примеры того значения, какое имеет в геометрии введение в нее мнимых элементов.

38. Рассмотрим несколько примеров составления уравнения кривой по ее геометрическим свойствам. Выведем уравнение окружности в косоугольных декартовых координатах. Обозначим через a, b координаты центра и через r радиус окружности. Обозначая через x, y координаты какой-нибудь точки окружности, мы будем иметь по форм. (2) § 20, что расстояние этой точки от центра равно

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\omega}.$$

Поэтому для каждой точки окружности будем иметь

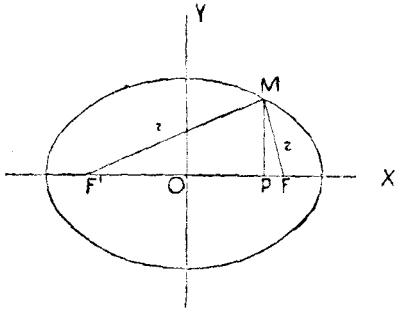
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\omega}=r.$$

или по уничтожении иррациональности

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\omega=r^2.$$

Таково уравнение окружности в косоугольных декартовых координатах.

Выведем, далее, уравнение эллипса, — линии, точки которой обладают тем свойством, что сумма их расстояний от двух данных точек F, F' равна данной длине $2a$ (черт. 37). Примем за ось X прямую FF', за ось Y перпендикуляр, восставленный к оси X в середине отрезка FF', и обозначим через c расстояния точек F, F' от начала координат. Тогда координаты этих точек будут $(c,0)$ и $(-c,0)$. Пусть будет $M(x,y)$ одна из точек эллипса. Расстояния FM и $F'M$ выразятся формулами



Черт. 37.

$$FM=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad F'M=\sqrt{(x+c^2)+y^2}.$$

Так как точка M лежит на эллипсе, то мы имеем

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Так как точка M есть любая точка эллипса, то этому уравнению удовлетворяют координаты каждой точки эллипса, и потому оно есть уравнение эллипса. Освободившись от радикалов и разделив обе части уравнения на $a^2(a^2-c^2)$, будем иметь

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Полагая здесь $a^2-c^2=b^2$, мы получим уравнение эллипса в наиболее употребительном виде:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

39. Классификация линий. Так как в аналитической геометрии линии изучаются при помощи тех уравнений, которые их изображают, то и классификация линий в аналитической геометрии производится на основании свойств уравнений, соответствующих этим линиям.

Положим, что мы имеем уравнение кривой в декартовых координатах, преобразованное так, чтобы в правой части был нуль. Левая часть уравнения представляет некоторую функцию текущих координат x и y. Классификация линий в аналитической геометрии производится на основании характера тех функций, которые входят в уравнение кривой. Вопрос, почему за основание классификации берется уравнение кривой в декартовых координатах, а не в каких-либо других, например, не в полярных, будет разъяснен дальше (§ 40). Как известно из анализа, функции различаются по тем действиям, посредством которых значения функции получаются из соответствующих значений независимых переменных,—в нашем случае из значений x и y. Те функции, в которых над переменными производятся только шесть алгебраических действий,—сложение, вычитание, умножение, деление, возвышение в целую положительную степень и извлечение корня целой положительной степени,—и притом конечное число раз, называются *алгебраическими* функциями этих переменных; все остальные функции называются *трансцендентными*. Например, x^a есть функция алгебраическая, если a — число рациональное. Наоборот, a^x есть функция трансцендентная, так как нет таких алгебраических действий, производя которые конечное число раз над любым значением переменного x, мы получили бы соответствующее значение функции a^x. Как было сказано выше, в аналитической геометрии классификация линий производится на основании характера тех функций, которые входят в уравнения этих линий в декартовых координатах. Если линия выражается в декартовых координатах уравнением, содержащим трансцендентную функцию текущих координат x и y, то такая линия называется *трансцендентною*; если же уравнение линии содержит алгебраическую функцию текущих координат, то и самая линия называется *алгебраическою*. При этом необходимо иметь в виду, что характер линии зависит от того, под знаками каких действий входят в уравнение именно текущие координаты точек линии, а не другие какие нибудь величины. Так например, кривая, изображаемая уравнением $y^2 - x \log a = 0$,

есть алгебраическая кривая, потому что, хотя в уравнение ее и входит трансцендентное действие логарифмирования, но оно совершается не над текущими координатами x и y, а над постоянным количеством a.

40. Классификация кривых основана на виде их уравнений в декартовых координатах потому, что в декартовых координатах характер и порядок уравнения линии не меняется от преобразования координат. В самом деле, формулы преобразования декартовых координат в другие декартовы суть формулы линейные вида (ср. § 31):

$$x = Ax' + By' + C, y = A'x' + B'y' + C'.$$

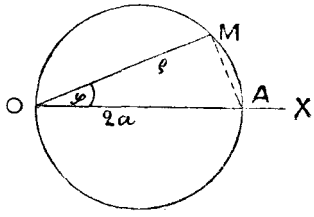
Отсюда легко видеть, что если мы имеем алгебраическое уравнение между декартовыми координатами x, y, то после преобразования к другим декартовым координатам оно обратится также в алгебраическое уравнение между x', y'. Действительно, к тем алгебраическим действиям, которые производились в первоначальном уравнении над x и y, после преобразования присоединятся еще те действия, которые производятся над x', y' в формулах преобразования координат; а так как эти последние действия — также алгебраические, именно, сложение и умножение, то уравнение останется алгебраическим и в координатах x', y'. Отсюда следует, что линия алгебраическая относительно одной системы декартовых координат будет алгебраическою и относительно каждой другой системы декартовых координат. Точно также, если кривая трансцендентна относительно одной системы декартовых координат, то она будет трансцендентною и во всяких других декартовых координатах, так как если бы она была алгебраическою хотя бы в одной из них, то, на основании предыдущего, она была бы алгебраическою и во всех остальных. Таким образом, алгебраический или трансцендентный характев кривой, определяемый по ея уравнению в декартовых координатах, не есть нечто случайное, зависящее от выбора осей координат, а зависит единственно от свойств самой кривой.

Иначе будет, если кривая отнесена к каким-нибудь другим координатам, напр., к полярным. Здесь характер уравнения может существенным образом зависеть от выбора системы координат. Посмотрим, напр., какой вид будет иметь уравнение окружности в полярных координатах при разных положениях полюса. Возьмем окружность с радиусом a, поместим полюс в

центре и рассмотрим какую-нибудь точку M на окружности. Расстояние ее от центра равно радиусу окружности; но расстояние от центра есть здесь вместе с тем и радиус-вектор ρ точки M, следовательно, $\rho = a$ или

$$\rho - a = 0.$$

Это — уравнение круга. Мы видим, что в нем производится над текущею координатою ρ одно действие—вычитание и, следовательно, наша кривая—алгебраическая. Теперь поместим полюс на окружности (черт. 38). Рассмотрим на окружности какую-нибудь точку $M(\rho, \varphi)$; здесь $\rho = 2a\cos\varphi$, и уравнение окружности в новых координатах принимает вид



Черт. 38.

$$\rho - 2a\cos\varphi = 0.$$

Мы видим, что при новом положении полюса уравнение нашего круга—трансцендентное, так как координата φ входит под знаком трансцендентной функции—$\cos\varphi$. Таким образом, в полярных координатах одна и та же кривая может быть то алгебраическою, то трансцендентною.

41. Остановимся на линиях алгебраических. Как известно, всякое алгебраическое уравнение может быть освобождено посредством соответствующих преобразований от радикалов и от делителей. Мы будем предполагать, что эти преобразования выполнены. Тогда в уравнение $F(x, y) = 0$ алгебраической кривой текущие координаты x, y не будут входить ни под знаком корня, ни в знаменателе, так что левая часть уравнения будет целым многочленом по x и y.

Известно, что, освобождая уравнение от радикалов, мы можем получить уравнение и не вполне равносильное первоначальному, так как новому уравнению могут удовлетворять и такие значения неизвестных, которые не удовлетворяли первоначальному уравнению. Поэтому может случиться, что, освобождая уравнение алгебраической кривой от радикалов, мы получим уравнение не этой кривой, а другой, в которую первоначальная кривая входит, как часть. Например, уравнение

$$y = \sqrt{25 - x^2}, \qquad (3)$$

где радикал берется в его арифметическом значении, после уничтожения иррациональности обращается в

$$x^2 + y^2 = 25, \tag{4}$$

и например, значения $x = 4$, $y = -3$, удовлетворяющие новому уравнению, не удовлетворяют первоначальному. Тем не менее, в аналитической геометрии всегда понимают под алгебраической кривой геометрическое место точек, декартовы координаты которых удовлетворяют целому рациональному алгебраическому уравнению; при таком условии, если алгебраическое уравнение содержит радикалы, то оно представляет, вообще, не целую алгебраическую кривую, а только часть такой кривой. Такой взгляд на алгебраические кривые имеет, между прочим, и то основание, что, сохраняя в уравнении радикалы, мы иногда выделяем из кривой часть, отличающуюся от остальной кривой лишь несущественными особенностями и притом только по отношению к данной системе координат. Так, например, представив уравнение (3) в виде (4), мы видим, что оно представляет окружность, описанную из начала координат радиусом, равным 5. Между тем, первоначальное уравнение (3) представляет только половину этой окружности, именно ту, для точек которой $y \geqq 0$, т.-е. полуокружность, лежащую над осью X. Эта половина кривой не отличается от другой половины своими геометрическими свойствами, и, переменив направление осей координат, мы найдем, что уравнение (3) опять представляет полуокружность, но уже не ту, что прежде.

42. Порядок алгебраической кривой. Алгебраические кривые делятся на кривые различных порядков в зависимости от степеней их уравнений. Порядком алгебраической кривой называется степень ея уравнения в декартовых координатах. Степенью уравнения с несколькими неизвестными называется степень высшего члена уравнения по отношению ко всем неизвестным вместе. Например, в уравнении

$$x^2 - 2y^4 + 7x^2y^3 - 6 = 0$$

степень первого члена есть 3, второго 4, третьего 5 и последнего 0; следовательно, это уравнение пятой степени, и кривая, им изображаемая,—пятого порядка. Точно также линия

$$xy = 1$$

есть линия второго порядка.

Порядок алгебраической кривой не изменяется от преобразования декартовых координат. Докажем сначала, что от преобразования координат порядок кривой не может повыситься. Формулы преобразования декартовых координат суть целые линейные, т.-е. содержат x' и y' в первой степени; поэтому, если мы вставим в уравнение кривой на место x и y их выражения через x', y', то получим уравнение не выше прежней степени, так как на место множителей первой степени x и y станут множители первой же степени $Ax'+By'+C$ и $A'x'+B'y'+C'$ (§ 31). Отсюда ясно, что порядок кривой в декартовых координатах не может от преобразования повыситься. Но можно предположить, что степень уравнения после преобразования понизится, так как старшие члены, может быть, сократятся. Очевидно, однако, что и это невозможно, так как обратное преобразование должно было бы восстановить прежнюю степень и, следовательно, сопровождалось бы повышением степени уравнения, чего, как мы только что видели, быть не может.

43. Распадающиеся кривые Пусть мы имеем два алгебраических уравнения

$$F=0,\quad G=0$$

где F и G — многочлены, содержащие x и y. Каждое из этих уравнений в отдельности изображает некоторую линию. Посмотрим, что будет изображать уравнение

$$FG=0. \tag{5}$$

Легко видеть, что линия, изображаемая этим уравнением, есть совокупность двух прежних линий. В самом деле, так как в уравнении (5) произведение двух множителей должно быть равно нулю, то для этого один из множителей должен быть равен нулю: поэтому новому уравнению удовлетворяют те и только те значения координат x, y, которые удовлетворяют по крайней мере одному из двух первоначальных уравнений. Отсюда видно что уравнению (5) удовлетворяют как координаты точек кривой $F=0$, так и координаты точек кривой $G=0$, т. е. уравнение $FG=0$ представляет совокупность кривых $F=0$ и $G=0$. Таким образом, если первая часть уравнения алгебраической кривой разлагается на целые рациональные множители, то самая кривая распадается на более простые алге-

бранческие линии, причем уравнение каждой из этих простейших кривых получим, приравняв нулю отдельных множителей, на которые распадается первая часть данного уравнения. Пусть, например, дано уравнение $xy = 0$. Этому уравнению мы удовлетворим, положив или $x = 0$ или $y = 0$. Но уравнение $x = 0$ представляет ось Y, а $y = 0$ — ось X: следовательно, предложенное уравнение представляет пару осей координат.

Важно заметить, что предыдущие рассуждения справедливы только для таких уравнений, все члены которых перенесены в одну часть. Если бы мы имели уравнения $F = F'$ и $G = G'$, где F, F', G, G', суть многочлены, содержащие x и y, то было бы ошибочно думать, что кривая

$$FG = F'G$$

распадается на кривые $F = F'$ и $G = G'$. Действительно, значения координат, удовлетворяющие одному из двух последних уравнений, не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнению $FG = F'G'$. Все, что мы можем сказать о кривой $FG = F'G'$, это то, что она проходит через все точки пересечения линий $F = F'$ и $G = G'$, а также линий $F = G'$ и $G = F'$.

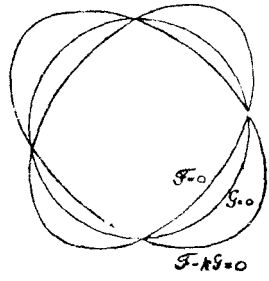
44. Пучек кривых. Пусть мы имеем два уравнения $F = 0$, $G = 0$. Посмотрим, что представляет уравнение

$$F - kG = 0. \tag{6}$$

Очевидно, что это уравнение при всевозможных значениях множителя k, называемого параметром уравнения, представляет бесчисленное множество кривых, так как каждому значению k будет соответствовать своя кривая. Эта совокупность кривых называется пучком кривых. Таким образом, пучком кривых называется семейство кривых, в уравнение которых входит линейно, т.-е. в первой степени, переменный параметр. Должно заметить, что уравнение может представлять пучек и в том случае, если параметр входит в него и не линейно, если только заменою параметра мы можем привести его к линейному виду. Так, уравнение $F - k^2G = 0$ представляет пучек, так как положив $k^2 = t$, мы получим уравнение $F - tG = 0$, где параметр t входит линейно.

Пучек кривых обладает тем свойством, что все кривые, принадлежащие пучку, пересекаются в одних и тех же точках, именно,

в точках пересечения основных кривых $F=0$, $G=0$ (черт. 39). В самом деле, если некоторая точка лежит на кривых $F=0$, $G=0$, то ея координаты обращают в нуль как F, так и G. Следовательно, эти координаты обращают в нуль выражение $F-kG$, каково бы ни было значение параметра k, а это значит, что точки пересечения кривых $F=0$ и $G=0$ принадлежат всем кривым пучка. Эти общие точки пересечения всех кривых пучка называются центрами пучка (на нашем чертеже их четыре). Очевидно, что основные кривые $F=0$ и $G=0$ также принадлежат к пучку $F-kG=0$ и соответствуют значениям параметра $k=0$ и $k=\infty$. Действительно, положив в уравнении пучка $k=0$, получим $F=0$; точно также, разделив уравнение на k, имеем $\frac{F}{k}-G=0$, или, при $k=\infty$, $G=0$.



Черт. 39.

Легко показать, что через каждую точку плоскости, кроме центров пучка, проходит одна кривая пучка. Пусть нам дан пучек

$$F(x,y)-kG(x,y)=0$$

Найдем кривую пучка, проходящую через данную точку (a,b). Подставив в уравнение пучка вместо текущих координат данные значения a,b, будем иметь:

$$F(a,b)\quad kG(a,b)=0.$$

Так как искомая кривая проходит через точку (a,b), то для этой кривой последнее равенство должно обратиться в тождество. Отсюда получаем, что искомой кривой соответствует единственное значение параметра k

$$k=\frac{F(a,b)}{G(a,b)}$$

и что поэтому через каждую данную точку (a,b) проходит кривая—и притом только одна—данного пучка. Исключение буде только для тех точек, для которых имеем одновременно

$$F(a,b)=0 \text{ и } G(a,b)=0.$$

Для этих точек k неопределенно и потому через них проходят все кривые данного пучка. Очевидно, что такие точки (a, b) лежат на пересечении кривых $F(x,y)=0$ и $G(x,y)=0$ и суть, следовательно, центры пучка.

45. Число условий, определяющих кривую n-го порядка. Чтобы найти, сколькими условиями определяется алгебраическая кривая n-го порядка, найдем сначала, сколько членов содержит общее уравнение такой кривой. Располагая левую часть общего уравнения n-ой степени по степеням его членов, мы представим его в виде:

$$\begin{gathered} A+ \\ +Bx+Cy+ \\ +Dx^2+Exy+Fy^2+ \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +Kx^n+Lx^{n-1}y+\ldots\ldots+My^n=0 \end{gathered} \tag{7}$$

Мы видим, что число членов нулевого измерения равно 1, число членов первого измерения равно 2 и т. д.; вообще, число членов каждого измерения на единицу больше самого измерения. Таким образом, обще число членов уравнения равно

$$1+2+3+\ldots\ldots+n+(n+1),$$

или, суммируя эту арифметическую прогрессию,

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Зная число членов в общем уравнении кривой n-го порядка, мы можем найти, сколькими условиями определяется эта кривая. Если бы для того, чтобы знать уравнение кривой, нужно было знать все его коэффициенты, то в таком случае число данных, или условий, необходимых для определения кривой n-го порядка, было бы равно числу коэффициентов в ея уравнении, т.-е $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Однако, на самом деле число условий, определяющих кривую n-го порядка, на единицу меньше. Действительно, если мы помножим обе части уравнения кривой на какое-нибудь число, то коэффициенты уравнения изменятся, но уравнение будет изображать ту же кривую, что и прежде, так как и перво-

начальное, и новое уравнение будут удовлетворяться теми же самыми значениями координат. Отсюда следует, что уравнение определяется не самими коэффициентами, а только отношениями между ними. Поэтому уравнение будет известно, если будут даны отношения всех его коэффициентов к одному из них, например, к последнему, лишь бы этот коэффициент не был равен нулю. Мы можем дать этому одному коэффициенту произвольное числовое значение и затем по данным отношениям найдем остальные коэффициенты. Все эти отношения независимы между собою, и потому мы только тогда можем составить уравнение кривой, когда все они будут даны. Надо заметить, что невозможно брать отношения коэффициентов уравнения всегда к одному и тому же коэффициенту, например, к последнему, так как в данном уравнении этот коэффициент может быть равен нулю; в таком случае необходимо выбрать вместо этого коэффициента какой-нибудь другой, не равный нулю и определять уравнение кривой отношениями всех остальных коэффициентов к выбранному.

Так как число отношений коэффициентов уравнения к одному из них на единицу меньше числа самих коэффициентов, и все эти отношения независимы между собою, то число N независимых условий, необходимых для определения кривой n-го порядка, равно

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$

Например, число коэффициентов в уравнении линии первого порядка, или, как увидим ниже, прямой линии, равно

$$\frac{(1+1)(1+2)}{2} = 3;$$

но число условий, определяющих прямую, равно

$$\frac{1.(1+3)}{2} = 2.$$

Действительно, прямая, как известно, вполне определяется двумя условиями; напр., ее можно провести через 2 данные точки, или через одну данную точку параллельно данной прямой и т. д.

Часто приходится определять кривую требованием, чтобы она проходила через известное число данных точек. Легко видеть, что требование, чтобы кривая проходила через заданную точку, равносильно одному условию, налагаемому на коэффициенты уравнения кривой. Действительно, если кривая $F(x,y)=0$ должна проходить через данную точку (x', y'), где x', y' — данные числа, то подставив эти числа в уравнение кривой, мы должны обратить его в тождество. Отсюда получаем условие

$$F(x', y')=0$$

Так как здесь числа x', y' даны, то в этом соотношении неизвестными являются коэффициенты уравнения $F(x, y)=0$, и получаемое таким образом соотношение налагает на них одно условие. Отсюда следует, что кривая n-го порядка, вообще вполне определяется $N=\frac{n(n+3)}{2}$ точками, через которые она должна проходить. Однако, нужно заметить, что в частных случаях, при особых относительных положениях этих N точек, их может быть и недостаточно для определения кривой. Пример такого исключительного расположения в случае кривых второго порядка будет указан ниже (гл. VI).

Иногда в уравнение кривой входят, кроме текущих координат, еще одна или несколько произвольных величин, называемых параметрами кривой; так например, уравнение пучка кривых (§ 44) содержит один параметр k. Очевидно, что такое уравнение представляет не одну определенную кривую, а целое семейство кривых; давая всем параметрам те или другие числовые значения, мы получим уравнения различных кривых этого семейства. Так как кривая n-го порядка определяется $\frac{n(n+3)}{2}$ условиями, то ея общее уравнение должно содержать такое же число независимых между собою параметров; в частности, за параметры кривой могут быть приняты отношения всех коэффициентов уравнения кривой к одному из них. Так например, мы увидим в главе V, что в каком бы виде мы ни представили общее уравнение линии первого порядка, или прямой, это уравнение будет всегда содержать два независимых параметра.

46. Параметрические уравнения кривой. Вместо того, чтобы изображать кривую одним уравнением между координатами ея точек, мы можем представить ту же кривую посредством двух уравнений, связывающих координаты ея точек с некоторым переменным параметром. Пусть мы имеем уравнение кривой

$$F(x, y) = 0 \tag{8}$$

Примем в этом уравнении x за некоторую функцию переменного параметра t: $x = \varphi(t)$. Подставив в уравнение кривой вместо x его выражение, мы получим уравнение между y и t; решив его относительно y, мы найдем y, как некоторую другую функцию от t: $y = \psi(t)$. Система двух уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{9}$$

изображает ту же кривую, как и уравнение (8), так как, исключив из уравнений (9) параметр t, мы, очевидно, получим уравнение (8). Так напр., мы можем заменить уравнение эллипса (2) (§ 38) системою двух уравнений

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

Давая в уравнениях (9) параметру t различные значения, мы, вообще, будем получать всякий раз различные точки кривой, так что каждой точке будет соответствовать свое значение параметра. Поэтому мы можем рассматривать параметр t в уравнениях (9), как координату точки на кривой, изображаемой этими уравнениями (см. § 5).

Изложенный здесь способ выражения координат точек кривой в функции параметра имеет обширное применение в кинематике, учении о движении. Если в уравнениях (9) мы будем понимать под параметром t время, то каждому мгновению будет соответствовать определенное значение t, а вместе с этим и определенная точка кривой. С изменением t координаты точки будут меняться, и точка будет перемещаться по кривой, описывая ее своим движением. Поэтому можно сказать, что уравнения (9) представляют кривую, как путь, или траекторию движущейся точки (x, y)

В настоящем курсе мы рассмотрим только простейшие алгебраические линии—линии первого и второго порядка. Исследование алгебраических кривых высших порядков составляет более высокий отдел аналитической геометрии и связано с изучением свойств алгебраических функций. Исследование трансцендентных кривых требует применения методов анализа безконечно малых и входит в задачи дифференциальной геометрии.

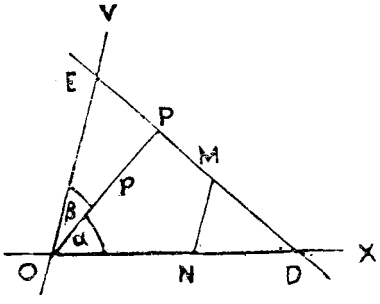
ГЛАВА V.

Прямая линия.

47. Уравнение прямой относительно отрезков. Обратимся к изучению линий по их уравнениям. Мы начнем с рассмотрения линий первого порядка. Общий вид уравнения линии первого порядка в декартовых координатах есть

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение содержит три члена, и потому, согласно § 45, заключает два независимых параметра. Посмотрим, какой вид будет иметь линия, изображаемая таким уравнением. К решению этого вопроса мы подойдем косвенным путем: мы сначала докажем, что прямая линия изображается уравнением 1-й степени определенного вида, а потом докажем, что общее уравнение 1-й степени, — уравнение линии первого порядка, — может быть приведено к тому виду, который мы получили для уравнения прямой; отсюда и будет следовать, что всякое уравнение 1-й степени в декартовых координатах изображает прямую.



Черт. 40.

Рассмотрим прямую DE, отнесенную к осям XOY декартовой системы координат (черт. 40). Составим уравнение этой прямой. Для этого необходимо иметь данные, которыми определялось бы положение прямой относительно осей. Примем за такие данные длины отрезков OD, OE, отсекаемых прямою на осях координат. Положим

$$OD = a, \quad OE = b$$

будет $M(x, y)$ одна из точек прямой DE. Из подобия треугольников MND, EOD имеем

$$\frac{NM}{ND} = \frac{OE}{OD},$$

или

$$\frac{y}{a-x} = \frac{b}{a}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$ay = ab - bx.$$

Перенося член с x в первую часть и деля на ab, получим окончательно

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2)$$

Так как при выводе этого уравнения мы предполагали только то, что точка M лежит на прямой DE, то оно удовлетворяется координатами каждой точки прямой DE. Следовательно, уравнение (2) есть уравнение прямой DE, или, как говорят иначе, уравнение (2) представляет прямую DE.

Так как уравнение (2) — первой степени, то мы, таким образом, доказали, что всякая прямая изображается уравнением первой степени и есть, следовательно, линия первого порядка.

Докажем теперь, обратно, что всякое уравнение первой степени представляет прямую линию. Для этого нужно только показать что всякое уравнение вида (1) может быть приведено к виду (2). Действительно, перенеся в уравнении (1) свободный член во вторую часть и разделив обе части на $-C$, мы представим уравнение (1) в виде

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Это уравнение примет вид (2), если мы положим

$$a = -\frac{C}{A}, \; b = -\frac{C}{B}. \qquad (3)$$

Таким образом, мы доказали, что общее уравнение первой степени может быть приведено к виду (2) и, следовательно, представляет прямую, если только C не равно нулю.

Возвратимся к уравнению (2). В нем параметрами служат длины a, b двух отрезков, отсекаемых прямою на осях координат. Поэтому уравнение (2) и называется уравнением прямой относительно отрезков. Отрезки a, b могут иметь здесь как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от их направления, то-есть от того, по какую сторону от начала координат они расположены.

Если бы прямая DE была параллельна одной из осей координат, например, оси Y, то она совсем бы не пересекла этой оси. Однако, мы можем включить в наше рассмотрение и этот случай, как предельный, рассматривая две параллельные прямые, как пересекающиеся в безконечности. Поэтому мы в этом случае положим $b = \infty$. Тогда член с делителем b в пределе обратится в нуль, и мы получим уравнение прямой параллельной оси Y в виде

$$\frac{x}{a} = 1, \text{ или } x = a$$

(ср. § 36). Точно также уравнение прямой параллельной оси X будет

$$y = b$$

Особо стоит тот случай, когда прямая DE проходит через начало координат, и когда, следовательно, оба отрезка a и b равны нулю. Как видно из формул (3), это будет тогда, когда в уравнении (1) коэффициент C равен нулю; в этом случае уравнение (1) нельзя делить на $-C$ и его нельзя привести к виду (2). Следовательно, мы, собственно, еще не доказали, что уравнение прямой, проходящей через начало—первой степени и что уравнение $Ax + By = 0$ представляет прямую. Мы докажем это в следующем параграфе, когда представим уравнение прямой в другом виде.

48. Уравнение с угловым коэффициентом. Если, имея уравнение прямой, мы хотим найти значения x, y, удовлетворяющие этому уравнению, то всего удобнее поступать следующим образом: дадим одной из координат, напр. x, определенное значени и найдем из уравнения прямой соответствующее значение y

затем дадим x другое значение, получим другое значение для y, и т. д. Для этой цели удобно иметь уравнение, решенное относительно одной из координат, напр. относительно y. Приведя к такому виду уравнение прямой (1), получим

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

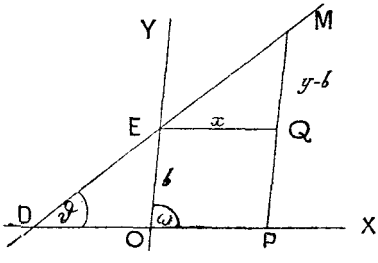
предполагая, что B не равно нулю. Выше мы уже обозначили $-\frac{C}{B}$ через b; положим еще

$$-\frac{A}{B} = k. \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$y = kx + b. \tag{5}$$

Посмотрим, какой геометрический смысл имеют параметры b и k. Мы уже знаем, что b есть отрезок, отсекаемый прямою на оси Y; действительно, если положим $x = 0$, то из последнего уравнения найдем $y = b$, т.-е. b есть ордината той точки прямой, абсцисса которой есть нуль, то-есть, той точки прямой, в которой последняя пересекается с осью Y. Что касается параметра k, то он зависит только от направления прямой. В самом деле, возьмем на прямой DE произвольную точку M (черт. 41). Построим ее координаты и проведем через точку E пересечения прямой с осью Y прямую EQ параллельно оси X; мы получим треугольник EQM, в котором



Черт. 41.

$$EQ = x,\ QM = y - b.$$

Уравнение (5) прямой DE может быть написано в виде

$$k = \frac{y - b}{x},$$

тому

$$k = \frac{QM}{EQ} = \frac{PM}{DP},$$

параметр k равен отношению двух сторон треугольника PM. Но в треугольнике отношение сторон равно отношению синусов противолежащих углов, и если угол, образуемый прямою с осью X, мы обозначим через ϑ, а координатный угол через ω, то

$$k = \frac{\sin\vartheta}{\sin(\omega - \vartheta)}. \tag{6}$$

Это выражение показывает, что, в самом деле, коэффициент k зависит только от угла наклонения прямой к оси X, а следовательно от направления прямой. Поэтому k называется угловым коэффициентом прямой. При $\omega = \frac{\pi}{2}$, т.-е. для прямоугольных осей координат, формула (6) обращается в следующую:

$$k = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \operatorname{tg}\vartheta. \tag{7}$$

Таким образом, в уравнении прямой относительно прямоугольных осей координат угловой коэффициент равен тангенсу угла между направлением прямой и положительным направлением оси X.

Пусть, обратно, нам дан угловой коэффициент k и требуется найти угол, который прямая образует с осью X косоугольной системы координат. Решая уравнение (6) относительно ϑ, найдем

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{k\sin\omega}{1 + k\cos\omega}. \tag{8}$$

При выводе формул преобразования косоугольных декартовых координатах в полярныя, мы нашли (§ 33)

$$x = m\varrho,\ y = n\varrho,$$

причем

$$m = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega},\ n = \frac{\sin\varphi}{\sin\omega},$$

φ — полярный угол.

Пусть будет k угловой коэффициент в уравнении в декартовых координатах той прямой, на которой расположен радиус вектор ρ Так как угол радиуса-вектора с осью X есть φ, то, заменяя в (6 ϑ через φ, имеем

$$k = \frac{\sin \varphi}{\sin (\omega - \varphi)} \tag{9}$$

Отсюда находим

$$k = \frac{m}{n} \tag{10}$$

Это соотношение будет нам полезно впоследствии.

Если прямая проходит через начало координат, то в уравнении (5) имеем $b = 0$ и уравнение принимает вид

$$y = kx$$

Таким образом, мы видим, что и в том случае, когда прямая проходит через начало координат, она изображается уравнением первой степени.

Если в уравнении (1) коэффициент B равен нулю, то это уравнение нельзя привести к виду (5). Это будет в том случае, когда прямая параллельна оси Y. Действительно, в том случае имеем $\vartheta = \omega$, и угловой коэффициент k, равный $\frac{\sin \vartheta}{\cos (\omega - \vartheta)}$, обращается здесь в бесконечность.

49. Нормальное уравнение прямой. Полученные нами две простейших формы уравнения прямой, уравнение (2) — уравнение относительно отрезков, и уравнение (5)—уравнение разрешенное относительно y, имеют обе тот недостаток, что к этому виду можно привести уравнение не каждой прямой; уравнение (2) непригодно для прямых, проходящих через начало, а уравнение (5)—для прямых параллельных оси Y. Мы рассмотрим здесь третий вид уравнения, к которому можно привести уравнение каждой прямой.

Рассмотрим прямую DE, отнесенную к осям XOY декартовой системы координат (черт. 40, стр. 65). Составим уравнение этой прямой. Пусть нам дано расстояние прямой от начала координат, т.-е. длина p перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, и угол α между этим перпендикуляром и осью

X. Этими двумя данными положение прямой определяется вполн и количества p и α будут двумя независимыми параметрами (§ 45) в искомом уравнении прямой. Для большей симметрии в вычислениях введем третий параметр, именно, угол β между перпендикуляром OP и осью Y. Легко видеть, что количества α и β не независимы между собою; они связаны условием

$$\alpha + \beta = \omega,$$

где ω — координатный угол, так что у нас, по прежнему, остается только два независимых параметра. Здесь, как и во многих других случаях, выгодно вводить бо́льшее число параметров, чем это необходимо, связывая параметры между собою определенными соотношениями, или условиями. Этим достигается большая симметрия формул; например, в нашем случае, вводя одновременно углы α и β, мы восстановляем равноправие обоих координат x и y. Будем теперь искать уравнение нашей прямой, т.-е. такое соотношение между текущими координатами точки на нашей прямой, которое было бы справедливо для всех точек этой прямой. Возьмем на прямой какую-нибудь точку M и построим ее координаты ON и NM. Найдем длину проекции ломаной ONM на перпендикуляр OP. Проекцией точки O будет сама точка O; проекцией точки M будет P, так как линия MP перпендикулярна к OP. Поэтому имеем

$$\text{пр. } ON + \text{пр. } NM = OP,$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0. \tag{11}$$

Так как это уравнение удовлетворяется координатами любой точки M, лежащей на прямой DE, то оно есть уравнение прямой DE. Уравнение (11) называется нормальным уравнением прямой.

Если угол между осями—прямой, т.-е. $\omega = \frac{\pi}{2}$, то $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $\cos\beta = \sin\alpha$. Таким образом, нормальное уравнение прямой в прямоугольных координатах имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{12}$$

В нормальном уравнении прямой параметр p, представляющий абсолютное расстояние прямой от начала координат, рассматривается, как величина существенно положительная. Отступление от этого общего правила будет указано ниже (§ 59).

50. Докажем теперь, что всякое уравнение 1-й степени может быть приведено к нормальному виду. Для этого достаточно доказать, что всегда можно найти такой множитель M, по умножении на который общее уравнение 1-й степени принимает нормальный вид. Рассмотрим сначала тот случай, когда система координат прямоугольная. Умножив уравнение (1) на M, получим

$$MAx + MBy + MC = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения должны быть тождественны с коэффициентами нормального уравнения (12). Отсюда получим три условия:

$$MA = \cos\alpha,\ MB = \sin\alpha,\ MC = -p.$$

Из этих трех условий найдем величины M, α и p. Возведя два первых равенства в квадрат и сложив их, получим

$$M^2(A^2 + B^2) = 1,$$

и отсюда

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Если теперь подставим найденную величину M в написанные выше равенства, то определим α и p:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},\ \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},\ p = \mp\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (13)$$

Таким образом, мы доказали, что всегда существует такой множитель, по умножении на который общее уравнение 1-й степени приводится к нормальному виду. Множитель M называется нормирующим множителем данного уравнения 1-й степени.

Легко определить, который из двух знаков должен быть взят при M в каждом отдельном случае. Действительно, в нормальном уравнении p должно быть существенно положительным (§ 49);

поэтому из двух значений множителя M должно брать то, которое делает p положительным. Так как

$$p = \mp \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

то при C положительном для M надо взять знак —; напротив, при C отрицательном знак M будет +. Другими словами, знак нормирующего множителя должен быть противоположен знаку свободного члена в данном уравнении.

Несколько сложнее приведение уравнения 1-й степени к нормальному виду в косоугольных координатах. Пусть мы имеем то же самое уравнение $Ax + By + C = 0$ и пусть M—его нормирующий множитель. Уравнения

$$MAx + MBy + MC = 0 \text{ и } x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

должны быть тождественны между собою. Отсюда

$$MA = \cos\alpha,\ MB = \cos\beta,\ MC = -p.$$

Присоединив сюда условие $\alpha + \beta = \omega$, мы из этих четырех соотношений можем определить M, α, β и p. Для этого предварительно заменим соотношение $\alpha + \beta = \omega$ между углами α, β соотношением между $\cos\alpha$ и $\cos\beta$. Это соотношение может быть получено разными способами, например, следующим. Рассмотрим треугольник ODE (черт. 40). В нем $\angle D = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle E = \frac{\pi}{2} - \beta$. Из этого треугольника имеем:

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD.OE\cos\omega.$$

Так как в треугольнике отношение каждой стороны к синусу угла ей противолежащего равно диаметру $2R$ описанного круга, то

$$\frac{DE}{\sin\omega} = \frac{OD}{\cos\beta} = \frac{OE}{\cos\alpha} = 2R,$$

или

$$DE = 2R\sin\omega,\ OD = 2R\cos\beta,\ OE = 2R\cos\alpha.$$

Вставив эти значения в предыдущую формулу, имеем

$$4R^2 \sin^2\omega = 4R^2\cos^2\beta + 4R^2\cos^2\alpha - 8R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega,$$

или

$$\sin^2\omega = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega,$$

—тождество, имеющее место при условии $\alpha+\beta=\omega$. Подставив сюда MA вместо $\cos\alpha$ и MB вместо $\cos\beta$, получим:

$$\sin^2\omega = M^2A^2 + M^2B^2 - 2M^2AB\cos\omega,$$

или

$$M^2(A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega) = \sin^2\omega.$$

Отсюда

$$M = \pm\frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}.$$

При $\omega = \frac{\pi}{2}$ эта формула переходит в формулу, полученную выше для случая прямоугольных осей. Получив нормирующий множитель, мы затем находим

$$\cos\alpha = \pm\frac{A\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{B\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}},$$

$$p = \mp\frac{C\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}. \qquad (14)$$

Из последней формулы видно, что и в этом случае нормирующий множитель должен иметь знак противоположный знаку известного члена. Таким образом, если дано уравнение

$$Ax + By + C = 0,$$

то всегда можно найти нормирующий множитель и значения α, β и p.

51. То обстоятельство, что прямая линия изображается в декартовых координатах уравнением первой степени, позволяет дать простое истолкование тому числу, которое называется порядком кривой (§ 42). Пусть будет $F(x, y) = 0$ уравнение кривой n-го порядка; найдем число точек пересечения этой кривой

с произвольною прямою $Ax + By + C = 0$. Из уравнения прямой имеем

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Подставив это выражение в уравнение кривой, мы получим уравнение с одним неизвестным x, причем степень этого уравнения будет, вообще, равна n. Действительно, степень высшего члена в уравнении кривой равна, по предположению, n; но так как y заменяется в этом уравнении целым выражением первой степени относительно x, то после подстановки высший член уравнения будет содержать x также в n-й степени (ср. § 42). В частных случаях степень этого уравнения может понизиться от обращения в нуль коэффициента при x^n; но при произвольных значениях коэффициентов A, B в уравнении прямой этого, вообще, не будет. Решив полученное уравнение относительно x, мы получим, как это доказывается в высшей алгебре, всего n решений, действительных или мнимых. Подставив каждое из полученных значений координаты x в уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, мы найдем из него соответствующее значение координаты y. Таким образом, мы будем иметь n пар решений (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ системы уравнений

$$F(x, y) = 0, \quad Ax + By + C = 0,$$

и каждая пара определит одну действительную или мнимую (§ 37) точку пересечения кривой с прямою. Отсюда видно, что число точек пересечения кривой с прямою равно порядку кривой, и, следовательно, порядок алгебраической кривой равен числу точек ее пересечения с произвольною прямою. Если бы коэффициент при x^n обратился в нуль и степень уравнения понизилась, то, рассматривая этот случай, как предельный, мы знаем из высшей алгебры, что при этом один из корней уравнения обращается в бесконечность; таким образом и в этом случае кривая пересекается с прямою в n точках, но только одна из этих точек удалена в бесконечность. Если бы обратился в нуль не только коэффициент при x^n, но также и коэффициенты при x^{n-1}, x^{n-2} и т. д., то в этом случае в бесконечность удалилась бы не одна, а несколько точек пересечения прямой с кривой.

Если мы имеем две алгебраические кривыя, одну m-го порядка, а другую n-го, то, чтобы найти их точки пересечения, мы должны решить совместно уравнения обеих кривых. В высшей алгебре доказывается, что число решений системы нескольких алгебраических уравнений, вообще, равно произведению степеней уравнений; поэтому мы будем иметь в нашем случае всего mn решений. Таким образом, число точек пересечения двух алгебраических кривых равно произведению порядков обеих кривых. Так, например, две кривых 2-го порядка пересекаются в четырех точках, кривая 2-го порядка с кривою 3-го—в шести и т. д.

Если решение известной геометрической задачи может быть приведено к решению алгебраического уравнения n-й степени, то такая задача называется задачею n-го порядка. Из предыдущего видно, что изыскание точек пересечения данной кривой n-го порядка с данною прямою есть задача n-го порядка; но если p из точек пересечения известны заранее, то степень окончательного уравнения может быть понижена на p единиц, и нахождение остальных точек пересечения составит задачу порядка $n-p$. Точно также изыскание точек пересечения двух кривых порядков m и n составляет задачу порядка mn; но если p точек пересечения известны заранее, то нахождение остальных точек пересечения будет задачею порядка $mn-p$. Так, например, решение уравнения третьей степени с одним неизвестным может быть представлено геометрически или как изыскание точек пересечения кривой 3-го порядка с прямою, или как изыскание точек пересечения двух кривых 2-го порядка, одна из точек пересечения которых известна. Так как задача о делении угла на три равных части приводится к решению уравнения 3-й степени, то для решения этой задачи нужно иметь или кривую 3-го порядка, или две кривых 2-го порядка, например, окружность вместе с кривою 2-го порядка иного вида. Это показывает, что решение задачи о трисекции угла при помощи только циркуля и линейки, т.-е. окружности и прямой, в общем случае невозможно.

52. Частные случаи уравнения прямой. Рассмотрим, что представляет уравнение прямой $Ax+By+C=0$, когда в нем некоторые из коэффициентов равны нулю.

Начнем с предположения, что только один из коэффициентов равен нулю.

1) Пусть $C=0$; тогда, как видно из формул (14), $p=0$. Но если длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, равна нулю, то это значит, что прямая проходит через начало координат. То же видно из формул (3): при $C=0$ имеем

$$a=-\frac{0}{A}=0,\quad b=-\frac{0}{B}=0,$$

т. е. длина отрезков a и b, отсекаемых прямою на осях, равна нулю; а это значит, что прямая проходит через начало координат. Наконец, то же самое видно и из следующего соображения: если $C=0$, то уравнение прямой принимает вид

$$Ax+By=0$$

и удовлетворяется при $x=0, y=0$, а $x=0$ и $y=0$ суть координаты начала. Легко видеть, что последний вывод может быть распространен на уравнения всякой степени: если в уравнении кривой нет свободного, или постоянного члена, то кривая проходит через начало координат, так как в каждый член уравнения входят или x или y, и, следовательно, уравнение удовлетворяется при $x=0, y=0$.

2) Положим, что один из коэффициентов при текущих координатах обращается в нуль; пусть, например, $A=0$; тогда равнение (1) принимает вид

$$By+C=0.$$

Если $A=0$, то, как видно из формул (14), $\cos\alpha=0$, т.-е. $\alpha=\frac{\pi}{2}$; это значит, что перпендикуляр, опущенный из начала координат на прямую, образует с осью X прямой угол, т.-е. прямая параллельна оси X. Это же видно и из другого соображения: если $A=0$, то из формул (3) имеем:

$$a=-\frac{C}{0}=\infty,$$

т.-е. прямая встречает ось X в бесконечности, или, что то же, параллельна оси X. Вместе с тем, решая уравнение $By+C=0$, находим

$$y=-\frac{C}{B},$$

т.-е. y имеет для всех точек прямой одно и то же значение, тогда как x может иметь произвольное значение, а это также показывает, что уравнение $By + C = 0$ изображает прямую параллельную оси X.

Если $B = 0$, то уравнение прямой принимает вид

$$Ax + C = 0,$$

и из тех же соображений следует, что оно представляет прямую параллельную оси Y.

Заметим, что, полагая в формуле (4) $A = 0$, имеем $k = 0$, так что при $k = 0$ прямая параллельна оси X; при $B = 0$ имеем $k = \infty$; поэтому при $k = \infty$ прямая параллельна оси Y. В этом можно также убедиться из соотношения (6)

$$k = \frac{\sin \vartheta}{\sin (\omega - \vartheta)}.$$

Из него при $k = 0$ имеем $\vartheta = 0$, а при $k = \infty$ имеем $\vartheta = \omega$.

3) Положим, что в уравнении прямой одновременно равны нулю два коэффициента. Пусть $A = 0$, $C = 0$. Уравнение (1) обратится в

$$By = 0.$$

Так как, по предположению, B не равно нулю, то, сократив на B, будем иметь

$$y = 0,$$

т.-е. уравнение оси X.

Точно также при $B = 0$, $C = 0$ имеем по сокращении на A

$$x = 0,$$

— уравнение оси Y.

53. Бесконечно-удаленная прямая. Рассмотрим, наконец, последний случай.

4) Если $A=0$ и $B=0$, но C не равно нулю, то уравнение прямой (1) принимает вид:

$$C=0,$$

или по сокращении на C:

$$1=0.$$

Такое равенство, очевидно, невозможно, и потому предположение $A=0$, $B=0$ должно быть отброшено, как не имеющее смысла. Таким образом, положение, что всякое уравнение вида $Ax+By+C=0$ представляет прямую, является не вполне общим: оно имеет исключение при $A=0$, $B=0$. Между тем, решая какую-либо задачу аналитической геометрии в общем виде и получив уравнение первой степени, мы не можем быть уверены в том, что при известных частных предположениях коэффициенты A и B в этом уравнении не делаются равными нулю. Поэтому желательно устранить, хотя бы формально, это исключение, подобно тому, как это мы сделали в § 9, введя понятие о бесконечно-удаленной точке. Для этого будем рассматривать равенство $1=0$, как предельный вид уравнения $Ax+By+C=0$ при $A=0$, $B=0$, и будем условно говорить, что уравнение $1=0$ также представляет некоторую особую прямую. Это утверждение имеет, конечно, исключительно формальный смысл и не имеет никакого отношения к вопросу о действительном существовании этой особой прямой, как геометрической формы.

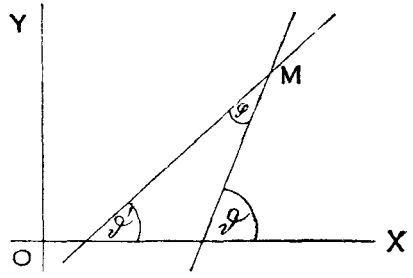
Чтобы узнать, какие свойства должны быть приписаны этой предельной прямой, исследуем, как изменяются свойства прямой $Ax+By+C=0$ по мере того, как A и B стремятся к нулю. Выражение (14) для расстояния p прямой (1) от начала координат показывает, что по мере того, как A и B приближаются к нулю, расстояние это беспредельно возрастает. В пределе, при $A=0$, $B=0$, оно обращается в бесконечность, и потому наша предельная прямая должна быть рассматриваема, как такая, расстояние которой от начала координат, а следовательно и от всякой другой точки плоскости, бесконечно велико. Поэтому то условно принимаемое нами предельное положение, к которому стремится прямая по мере того, как в ее уравнении коэффициенты A и B стремятся к нулю, называется бесконечно-удаленною прямою. Бесконечно-удаленная прямая есть геометрическое место всех бесконечно-удаленных точек плоскости

Полагая в формуле (4) $A=0$, $B=0$, мы найдем, что для бесконечно-удаленной прямой угловой коэффициент k принимает неопределенный вид. Это показывает, что бесконечно-удаленная прямая образует с осью X, а следовательно и со всякою другою прямою, угол неопределенной величины. Поэтому на бесконечно-удаленную прямую нужно смотреть, как на прямую с неопределенным направлением. Отсюда, между прочим, следует, что бесконечно-удаленная прямая должна считаться параллельною с каждою прямою на плоскости. Последнее вытекает и из других соображений. В самом деле, введя понятие о бесконечно-удаленных точках, мы условились принимать, что параллельные прямые встречаются в бесконечно-удаленной точке (§ 9); поэтому бесконечно-удаленная прямая параллельна всякой прямой, потому что встречается с нею в бесконечности. Так как бесконечно-удаленная прямая параллельна всякой прямой, то она имеет любое направление.

Введение понятия о бесконечно-удаленной прямой дает объяснение противоречия, заключающегося в невозможном равенстве $C=0$, или $1=0$. Если в уравнении $Ax+By+C=0$ коэффициенты A, B стремятся к нулю, то в пределе этому уравнению нельзя удовлетворить никакими конечными значениями неизвестных x, y, так как во всяком случае произведения Ax, By будут стремиться к нулю и мы придем в пределе к невозможному равенству $C=0$. Но если по мере приближения A и B к нулю мы будем давать неизвестным x и y значения, неограниченно возрастающие по абсолютной величине, или, как говорят, увеличивать их значения до бесконечности, то произведения Ax, By могут стремиться не к нулю, а к другим значениям, в зависимости от того, по какому закону будут возрастать значения x и y по мере убывания A и B. Поэтому при надлежащем выборе закона возрастания x и y сумма $Ax+By$ может дать в пределе не нуль, а $-C$, так что уравнение $Ax+By+C=0$ обратится в пределе не в невозможное равенство $C=0$, а в тождество $0=0$. Таким образом, рассматривая равенство $C=0$, как предельный случай уравнения $Ax+By+C=0$, мы можем сказать, что это уравнение удовлетворяется при бесконечно-больших значениях текущих координат x, y, и, следовательно, представляет бесконечно-удаленную прямую, как геометрическое место бесконечно-удаленных точек. (ср. § 51).

54. Угол между двумя прямыми. Пусть нам даны две прямые (черт. 42)

$$y = kx + b, \quad y = k'x + b'.$$



Черт. 42.

Определим угол φ между ними. Начнем с того случая, когда оси координат прямоугольны. Обозначим через ϑ и ϑ' углы данных прямых с осью X. Угол φ, как внутренний угол треугольника, равен разности внешнего угла и другого внутреннего, не смежного с последним. Поэтому

$$\varphi = \vartheta - \vartheta',$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta'}{1 + \operatorname{tg}\vartheta \operatorname{tg}\vartheta'}$$

Но

$$\operatorname{tg}\vartheta = k, \quad \operatorname{tg}\vartheta' = k',$$

и потому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k - k'}{1 + kk'} \tag{15}$$

Легко найти соответствующую формулу и для того случая, когда прямые даны общими уравнениями

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

Если мы решим каждое из этих уравнений относительно y, то найдем угловые коэффициенты k, k' обеих прямых:

$$k = -\frac{A}{B}, \quad k' = -\frac{A'}{B'}$$

Вставив эти значения k и k' в выражение (15), имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{A}{B} + \frac{A'}{B'}}{1 + \frac{A}{B} \cdot \frac{A'}{B'}} = \frac{BA' - AB'}{AA' + BB'}$$

Найдем, при каком условии две прямые параллельны. В этом случае угол φ между ними равен нулю или π, и следовательно $\operatorname{tg}\varphi = 0$; для этого числитель формулы (15) должен быть равен нулю, т.-е.

$$k = k'. \tag{17}$$

Следовательно, две прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны. Это условие может быть непосредственно получено из значения углового коэффициента: угловой коэффициент определяет угол прямой с осью X а этот угол при параллельности прямых должен быть одинаков для обеих прямых.

Если прямые даны общими уравнениями, то, на основании рассуждений, подобных предыдущим, получим условие параллельности в виде

$$BA' - AB' = 0,$$

или

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}, \tag{18}$$

т.-е. две прямые параллельны, если в их уравнениях коэффициенты при текущих координатах пропорциональны.

Если две прямые перпендикулярны между собою, то $\operatorname{tg}\varphi$ должен быть равен бесконечности, для чего необходимо

$$1 + kk' = 0, \tag{19}$$

или

$$k' = -\frac{1}{k}. \tag{20}$$

общими уравнениями, то условие их перпендикулярно будет

$$AA' + BB' = 0,$$

или

$$\frac{B}{A'} = -\frac{A}{B'} \tag{21}$$

Отсюда видно, что если дано уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

и требуется составить уравнение прямой перпендикулярной к данной, то нужно вместо коэффициента A поставить B и вместо B поставить $-A$. Действительно, так как в уравнении линии мы можем дать одному из коэффициентов произвольное значение (§ 45), то мы можем положить $A' = B$; тогда условие перпендикулярности даст $B' = -A$, и уравнение искомой прямой будет иметь вид

$$Bx - Ay + C' = 0.$$

55. Решим ту же задачу в косоугольных координатах. Формула (8) дает

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{k\sin\omega}{1 + k\cos\omega}, \quad \operatorname{tg}\vartheta' = \frac{k'\sin\omega}{1 + k'\cos\omega}$$

Вставляя эти выражения в формулу

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta'}{1 + \operatorname{tg}\vartheta\operatorname{tg}\vartheta'},$$

получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{k\sin\omega}{1 + k\cos\omega} - \dfrac{k'\sin\omega}{1 + k'\cos\omega}}{\left(1 + \dfrac{kk'\sin^2\omega}{(1 + k\cos\omega)(1 + k'\cos\omega)}\right)} = \frac{(k - k')\sin\omega}{1 + (k + k')\cos\omega + kk'}. \quad (22)$$

Если $\omega = \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin\omega = 1$, $\cos\omega = 0$, и формула (22) переходит в формулу (15).

Если прямые параллельны, то $\operatorname{tg}\varphi = 0$; следовательно, числитель формулы (22) должен равняться нулю, и мы получим, как и в случае прямоугольных осей

$$(K - K')\sin\omega = 0,$$

или

$$k = k',$$

т.-е. угловые коэффициенты равны, как и должно быть, потому что наклон обеих прямых к оси X один и тот же.

Условие перпендикулярности получим, если приравняем нулю знаменатель:

$$1 + (k + k')\cos\omega + kk' = 0 \qquad (23)$$

В отличие от условия параллельности, условие перпендикулярности содержит в своем выражении координатный угол ω. Поэтому условие перпендикулярности выражается различным образом при различных значениях координатного угла.

Посмотрим, какой вид принимает выражение (22) в том случае, когда прямые даны общими уравнениями

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

Заменяя k и k' их выражениями (4), получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\left(-\frac{A}{B} + \frac{A'}{B'}\right)\sin\omega}{1 - \left(\frac{A}{B} + \frac{A'}{B'}\right)\cos\omega + \frac{AA'}{BB'}} = \frac{(BA' - AB')\sin\omega}{AA' - (AB' + BA')\cos\omega + BB}$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(BA' - AB')\sin\omega}{AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\omega}$$

Отсюда получаем прежнее условие параллельности:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}, \qquad (18)$$

и условие перпендикулярности

$$AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\omega = 0 \qquad (24)$$

56. Уравнение прямой, проходящей через данную точку по данному Представим уравнение искомой прямой в виде

$$y = kx + b.$$

Так как каждому направлению соответствует определенное значение углового коэффициента k, то в этом уравнении k известно; остается найти b. Так как прямая должна проходить че-

рез данную точку (x', y), то координаты x', y' должны удовлетворять уравнению искомой прямой. Отсюда имеем условие

$$y' = kx' + b.$$

Вычитая это равенство из первоначального уравнения и этим исключая b, получим искомое уравнение:

$$y - y' = k(x - x'). \tag{25}$$

Решим ту же задачу, предполагая, что направление искомой прямой определяется другою прямою, которой искомая прямая должна быть параллельна. Пусть будет

$$Ax + By + C = 0$$

уравнение данной прямой и

$$A'x + B'y + C' = 0$$

уравнение искомой прямой. Так как обе прямые параллельны, то (§ 55)

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

Примем в искомом уравнении коэффициент A' равным A. Тогда из предыдущей пропорции получим $B' = B$, и уравнение искомой прямой примет вид

$$Ax + By + C' = 0.$$

Так как эта прямая должна проходить через точку $(x'y')$, то мы имеем условие

$$Ax' + By' + C' = 0.$$

Вычитая это равенство из предыдущего уравнения, мы исключим C' и получим уравнение искомой прямой в виде

$$A(x - x') + B(y - y') = 0.$$

Будем давать коэффициенту k в уравнении (24) всевозможные значения; тогда мы получим бесчисленное множество прямых,

проходящих через одну и ту же точку (x', y'), но имеющих разные направления, соответствующие различным значениям k. Такая совокупность прямых, проходящих через одну точку, называется пучком прямых, а точка (x', y') — центром пучка равнение

$$y - y' = k(x - x') \tag{25}$$

представляет уравнение пучка прямых. Мы имеем здесь частный случай общего уравнения пучка кривых (§ 44), так как уравнение $y - y' = k(x - x')$ содержит один переменный параметр k и притом в первой степени.

57. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Составим уравнение прямой, проходящей через две данные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Возьмем уравнение пучка с центром (x_1, y_1)

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Из всех лучей этого пучка нам нужно выбрать тот, который проходит через точку (x_2, y_2). Вставив в уравнение вместо текущих координат координаты (x_2, y_2), находим условие

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Исключим k из этого равенства и из уравнения пучка, разделив одно равенство на другое:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{26}$$

Это и будет уравнение искомой прямой.

Из соотношения, определяющего k, имеем

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \tag{27}$$

Так выражается угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки. Отсюда видно, что в уравнении прямой угловой коэффициент равен отношению между разностью ординат двух каких-либо точек прямой и разностью абсцисс тех же точек.

Приведя найденное уравнение к обычной форме, получим

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0. \qquad (28)$$

Легко убедиться, что это уравнение, действительно, представляет прямую, проходящую через две данные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2). В самом деле, оно первой степени относительно текущих координат и, следовательно, представляет прямую; кроме того, если мы вместо текущих координат подставим x_1, y_1 или x_2, y_2, то уравнение обратится в тождество. Сравнивая это уравнение с общим уравнением прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

заключаем, что здесь

$$A = y_1 - y_2, \quad B = -(x_1 - x_2), \quad C = x_1y_2 - y_1x_2.$$

Выведем уравнение (28) иным способом. Пусть будет $Ax + By + C = 0$ искомое уравнение прямой, проходящей через две данные точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Если прямая должна проходить через две данные точки, то координаты последних должны удовлетворять уравнению прямой; отсюда имеем условия:

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0. \end{aligned}$$

Пусть будет (x, y) какая-нибудь точка той же прямой; тогда мы имеем третье соотношение

$$Ax + By + C = 0.$$

В этих трех уравнениях неизвестными являются коэффициенты A, B, C. Так как это система трех однородных уравнений с тремя неизвестными и A, B, C не могут быть все три нулями, то условие совместности тих трех уравнений заключается, как известно, в равенстве нулю детерминанта системы, т.-е.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (29)$$

Это и есть уравнение нашей прямой. Оно первой степени, так как текущие координаты входят только в первую строку детерминанта, а известно, что в состав каждого члена детерминанта входит из каждой строки только один элемент. Координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 удовлетворяют нашему уравнению, так как если на место текущих координат мы поставим координаты x_1, y_1 или x_2, y_2, то детерминант обратится тождественно в нуль. Если мы раскроем этот детерминат, то получим уравнение (28).

58. Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой. Пусть эти точки будут (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). По предыдущему, уравнение прямой, проходящей через вторую и третью точки, есть

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Если и первая точка лежит на этой прямой, то ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой; следовательно, вставив на место текущих координат x_1, y_1, мы должны иметь

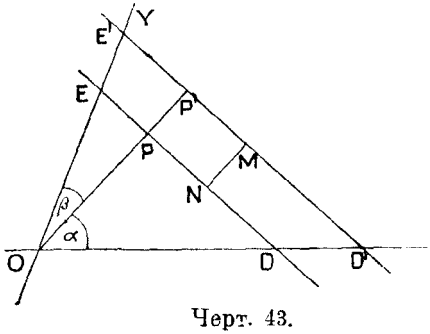
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (30)$$

Это и есть искомое условие.

59. Расстояние данной точки от данной прямой. Пусть данная точка будет $M(x', y')$, а нормальное уравнение данной прямой DE есть

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0.$$

Расстояние точки M (черт. 43) от прямой DE измеряется длиною перпендикуляра NM, опущенного из точки на прямую. Проведем через M прямую $D'E'$ параллельно данной прямой и продолжим перпендикуляр OP, опущенный на данную прямую из начала координат, до пересечения с прямою $D'E'$ в точке P'. Тогда будем иметь



Черт. 43.

$NM = OP' - OP$, и, обозначая искомое расстояние NM через δ, а OP' через p',

$$\delta = p' - p.$$

Следовательно, нашу задачу можно решить, найдя расстояние p' от начала координат до прямой $D'E'$ и вычтя из него расстояние p от начала до прямой DE. Так как прямая $D'E'$ параллельна прямой $ДЕ$, то ее уравнение будет отличаться от уравнения этой прямой только длиною перпендикуляра p', но углы этого перпендикуляра с осями будут прежние. Поэтому уравнение прямой $D'E'$ будет иметь вид

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - p' = 0.$$

Эта прямая проходит через точку M (x', y'), что дает условие

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta - p' = 0,$$

из которого и определяется p':

$$p' = x' \cos\alpha + y' \cos\beta.$$

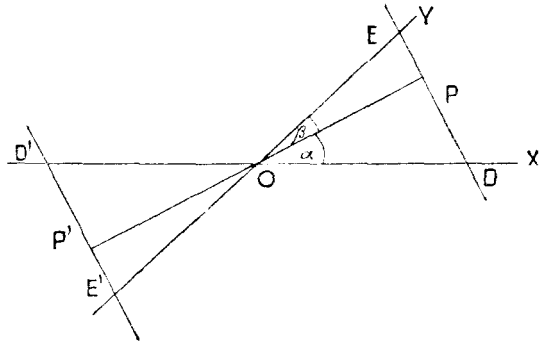
Вставив это значение в равенство $\delta = p' - p$, имеем для искомого расстояния следующее выражение

$$\delta = x' \cos\alpha + y' \cos\beta - p. \qquad (31)$$

Мы видим, что выражение представляет левую часть нормального уравнения (11) прямой DE, в котором текущие координаты заменены координатами точки M. Отсюда следует, что если мы приведем уравнение прямой к нормальному виду и подставим вместо текущих координат координаты какой-нибудь точки, то получим расстояние этой точки от прямой. С этой точки зрения, нормальное уравнение прямой можно рассматривать, как условие, выражающее, что расстояние прямой от лежащей на ней точки равно нулю. Нормальный вид уравнения имеет особое значение именно потому, что левая часть выражает при произвольных x и y, расстояние точки (x, y) от данной прямой.

Следует заметить, что разность $\delta = p' - p$, а следовательно, и расстояние точки от прямой, вычисленное по формуле (31), может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Легко определить, при каких условиях будет иметь место тот и другой случай. Так как p' представляет расстояние от начала координат до прямой $D'E'$, проведенной через точку M параллельно данной прямой DE, то разность $p'-p$ будет положительна для тех точек M, которые лежат по другую сторону прямой DE относительно начала координат, так как для таких точек расстояние p', очевидно, больше p. Напротив, для точек, лежащих по одну сторону прямой DE с началом координат, расстояние p' меньше p, и разность $p'-p$ отрицательна. Так, например, расстояние начала координат от прямой DE, вычисленное по формуле (31), равно $-p$.

Здесь следует обратить внимание на тот случай, когда прямые DE, $D'E'$ лежат по разные стороны от начала координат



Черт. 44.

Тогда, очевидно, углы перпендикуляра OP' с осями будут уже не α и β, а $\alpha - \pi$ и $\beta - \pi$ (черт. 44), так что уравнение прямой $D'E'$ будет не $x\cos\alpha + y\cos\beta - p' = 0$, а $-x\cos\alpha - y\cos\beta - p' = 0$; легко видеть, что в этом случае и расстояние δ равно уже не разности $p'-p$, а сумме $-(p'+p)$, при чем знак — взят здесь в согласии с предыдущим. Однако, и этот случай можно привести к предыдущему, если мы условимся считать длину p' не абсолютною величиною, а приписывать ей тот или другой знак. Действительно, примем для всех отрезков, лежащих по прямой PP', а следовательно и для отрезка OP', за положительное направление, направление от O к P. Тогда углы перпендикуляра OP' с

осями (углы его положительного направления) останутся, по прежнему, α и β, но длину OP' мы уже должны будем считать отрицательною, так как положительным направлением на прямой $P\,P'$ мы теперь условились считать направление от O к P. При таком допущении, уравнение прямой $D'E'$ будет такое же, как и в первом случае

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p'=0,$$

с тою только разницею, что коэффициент p' будет теперь иметь отрицательное значение; тогда расстояние δ будет, по прежнему, равно $p'-p$. Мы видим отсюда, что иногда бывает выгодно отступить от принятого нами основного положения (§ 47), по которому в нормальном уравнении прямой линии параметр p считается положительным. Такое отступление может оказаться удобным в тех случаях, когда мы имеем несколько параллельных прямых; их расстояния от начала будут при этом измеряться по одной и той же общей для всех прямой, и тогда, выбрав на этой прямой положительное направление, мы можем, если это будет удобнее, условиться считать отрицательными те расстояния, которые будут отложены в направлении, обратном выбранному.

До сих пор мы предполагали, что уравнение данной прямой имеет нормальный вид. Если прямая дана общим уравнением

$$Ax+B+C=0,$$

то нужно только привести уравнение к нормальному ставить в него вместо текущих координат

Таким образом, в случае

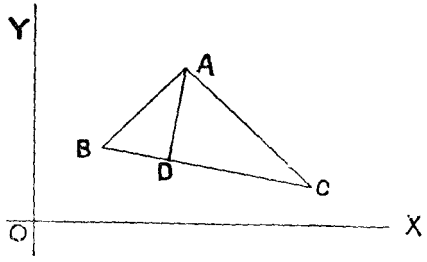
$$=\frac{(Ax'+By'+C)\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}, \tag{32}$$

а в случае прямоугольных координат

$$\delta=\mp\frac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{33}$$

60. Выражение площади треугольника по координатам его вершин. Пусть будут $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$

угольник ABC (черт. 45). Примем одну из сторон, напр. BC, за основание треугольника; тогда площадь треугольника выразится, как половина произведения основания BC на высоту AD:



Черт. 45.

$$\Delta = \frac{1}{2} BC . AD,$$

и, таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти выражение основания и высоты треугольника через координаты его вершин. Высота AD есть расстояние точки A от прямой BC; следовательно, мы вычислим высоту, если в уравнение прямой BC, приведенное к нормальному виду, подставим координаты точки A. Уравнение прямой BC, как проходящей через точки $B(x_2, y_2)$, $C(x_3 y_3)$, есть (§ 57)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или в раскрытой форме

$$(y_2 - y_3)\, x - (x_2 - x_3)\, y + (x_2\, y_3 - x_3\, y_2) = 0.$$

Приведем его к нормальному виду; для этого его нужно умножить на нормирующий множитель, который для данного случая имеет вид (§ 50)

$$\frac{\sin \omega}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + 2\,(x_2 - y_3)(y_2 - y_3)\cos \omega}}$$

Но знаменатель этого выражения представляет расстояние между точками B и C (§ 20); следовательно, нормирующий множитель есть $\frac{\sin \omega}{BC}$; таким образом, уравнение прямой BC, представленное в нормальном виде, будет

$$\frac{\sin \omega}{BC} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Искомая высота AD равна первой части этого уравнения с заменой в ней текущих координат координатами x_1, y_1 точки A, т.-е.

$$AD = \frac{\sin\omega}{BC}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Умножив обе части на $\frac{1}{2}BC$, получим выражение площади треугольника ABC:

$$\Delta = \frac{\sin\omega}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для прямоугольных координат $\sin\omega$ обращается в единицу и площадь треугольника выражается формулою

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Из этих выражений может быть получено, между прочим, условие (29), при котором три данные точки лежат на одной прямой. Действительно, если три точки лежат на одной прямой, то площадь треугольника, имеющего эти точки вершинами, должна быть равна нулю. Приравняв нулю выражение (34), мы получим условие (30).

Если мы будем брать вершины треугольника в ином порядке, например, если мы переменим места вершин A и B, то в детерминанте, входящем в выражение площади треугольника, первая строка станет на место второй, вторая на место первой, и знак у детерминанта, а следовательно и знак площади, переменятся. Отсюда возникает вопрос, когда площадь треугольника, вычисленная по формуле (34), будет положительною и когда отрицательною. Будем обходить по периметру треугольника, проходя его вершины в том порядке, который соответствует порядку строк детерминанта. Если в первом случае мы, обходя от A B и C, двигались в некотором направлении, то во втором

случае, обходя вершины в порядке B, A, C, мы будем двигаться в направлении обратном. Таким образом, знак площади треугольника, вычисленной по формуле (34), будет зависеть от того, по какому направлению мы будем обходить его периметр. Мы можем различить эти два направления следующим образом. Представим себе наблюдателя, обходящего треугольник по его периметру; тогда при одном направлении обхода он будет иметь треугольник влево от себя, а при противоположном—справа. Иначе это можно представить еще следующим образом. Возьмем внутри треугольника какую-нибудь точку P и соединим ее с одною из точек M периметра треугольника. Тогда, если точка M будет перемещаться по периметру треугольника, то луч PM будет вращаться или по направлению вращения часовой стрелки, или против этого направления, смотря по тому, в каком направлении мы обходим периметр треугольника. Чтобы узнать, какой из двух знаков соответствует каждому из двух направлений, заметим, что если мы будем непрерывно изменять форму и положение треугольника, так чтобы площадь треугольника при этом никогда не обращалась в нуль, то, с одной стороны, знак детерминанта, выражающего площадь, при этом будет оставаться без изменения, а с другой, во всех последовательных положениях нашего изменяющегося треугольника тот порядок, в котором мы будем обходить его вершины, также будет оставаться прежний. Поэтому для решения вопроса о зависимости знака площади от направления обхода его периметра нам достаточно взять один какой-нибудь треугольник, наиболее просто расположенный относительно осей координат; например, мы получим такой треугольник, если одну вершину поместим в начале координат, другую на оси X и третью на оси Y. Вершины эти имеют координаты $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$. В этом случае площадь треугольника выразится формулою

$$\Delta = \frac{\sin\omega}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} ab \sin\omega,$$

представляющею известное выражение площади треугольника по двум сторонам и углу между ними. Таким образом, обходя вершины в порядке O, A, B, мы обходили периметр треугольника против вращения часовой стрелки, и площадь оказалась положительною; следовательно, она всегда будет положительною, если периметр треугольника обходится в направлении обратном вра-

щению часовой стрелки. Если же периметр будет обходиться по часовой стрелке, то площадь, вычисленная по формуле (34), получится отрицательною.

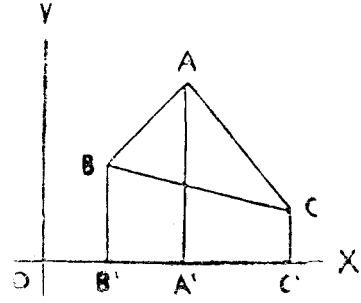
То же самое можно выразить иначе, говоря, что площадь треугольника будет положительною, если наблюдатель, обходящий по плоскости периметр треугольника в порядке его вершин будет иметь внутреннюю область треугольника от себя влево.

Легко видеть, что зависимость знака площади треугольника от направления его обхода была бы обратною, если бы мы переместили направления осей X и Y, или что то же, изменили бы положительное направление вращения в плоскости (§ 19). В самом деле, тогда в детерминанте (34) первый и второй столбец переменили бы места, и знак детерминанта заменился бы обратным.

Выражение площади треугольника можно вывести еще иначе, причем получается формула, более удобная в приложениях. Проведем ординаты вершин треугольника AA', BB', CC' (черт. 46). Очевидно, что площадь треугольника равна алгебраической сумме площадей трапеций:

$$ABC = ABB'A' + BCC'B' + CAA'C'$$

из которых вторая, по предыдущему, отрицательна. Основания и высоты наших трапеций соответственно равны: для первой y_1, y_2 и $(x_1 - x_2)$ для второй y_2, y_3 и $(x_3 - x_2)$ и для третьей y_3, y_1 и $(x_3 - x_1)$. Отсюда получаем выражение площади треугольника в виде



Черт. 46.

$$\Delta = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)] \quad (36)$$

Таким образом, в прямоугольных координатах площадь треугольника равна полусумме произведений разностей абсцисс вершин на суммы соответствующих ординат. В случае косоугольных осей полученное выражение нужно умножить на $\sin\omega$. Нетрудно убедиться, что выражение (36) тождественно с (35).

Последнее выражение можно представить в следующем виде, более удобном для вычисления:

$$\Delta = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (37)$$

Применяя тот же прием к любому многоугольнику, мы таким же образом найдем, что если координаты последовательных вершин многоугольника суть (x_1, y_1), $(x_2, y_2)\ldots(x_n, y_n)$, то его площадь равна

$$\frac{1}{2}[(x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + \ldots + x_n(y_1 - y_{n-1})].$$

Здесь координаты берутся в круговом порядке, т.-е. за x_n следует x_1, и притом так, чтобы периметр многоугольника был обходим в положительном направлении.

61. Точка пересечения двух прямых. Пусть будут

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

уравнения данных прямых. Найдем координаты их точки пересечения. Так как искомая точка лежит на обеих прямых, то ее координаты должны удовлетворять уравнениям той и другой прямой, и наша задача сводится к совместному решению этих двух уравнений. Решив их, найдем

$$x = \frac{\begin{matrix}-C, & B\\ -C', & B'\end{matrix}}{\begin{matrix}A, & B,\\ A', & B',\end{matrix}} = \frac{\begin{matrix}B, & C\\ B', & C'\end{matrix}}{\begin{matrix}A, & B\\ A', & B'\end{matrix}}, \quad y = \frac{\begin{matrix}A, & -C\\ A', & -C'\end{matrix}}{\begin{matrix}A, & B\\ A', & B'\end{matrix}} = \frac{\begin{matrix}C, & A\\ C', & A,\end{matrix}}{\begin{matrix}B, & A\\ A', & B'\end{matrix}}. \quad (38)$$

Исследуем полученное решение. Оно - единственное, что и понятно, так как две прямые линии имеют только одну общую точку. Если детерминант, стоящий в знаменателе, не равен нулю, то мы получим для x и y вполне определенные значения. Положим теперь, что знаменатель равен нулю. Тогда мы получим для x и y бесконечно-большие значения; это значит, что данные прямыя пересекаются в бесконечности, т.-е. что они параллельны. В этом легко убедиться непосредственно; в самом деле, представив детерминант, стоящий в знаменателе, в раскрытом виде, будем иметь:

$$AB' - BA' = 0,$$

откуда

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'},$$

т.-е. коэффициенты при координатах в уравнениях обеих прямых пропорциональны, что, как мы знаем (§ 54), показывает, что данные прямые параллельны.

Положим, что вместе с знаменателем обращается в нуль и один из числителей, например

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} = 0.$$

При этом, вообще говоря, обращается в нуль и второй числитель. В самом деле, из равенства нулю знаменателя и первого числителя следует

$$AB' - BA' = 0, \quad BC' - CB' = 0.$$

Умножив первое равенство на C, второе на A и сложив их, получим

$$B(CA' - AC') = 0,$$

отсюда, по сокращении на B, находим

$$CA' - AC' = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix} = 0,$$

т.-е. и второй числитель обращается в нуль. При этом выражения (3) дают

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

Таким образом, если знаменатель и один из числителей равны нулю, то координаты точки пересечения неопределенны. Геометрически это значит, что две данные прямые сливаются; в самом деле, в этом случае мы имеем

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

т.-е. все коэффициенты одного уравнения соответственно пропорциональны коэффициентам другого; а мы знаем (§ 45), что в таком случае обе прямые тождественны.

Мы видели, что если в выражениях (38) знаменатель и один из числителей обращаются в нуль, то и другой числитель, будет вообще, равен нулю. Есть, однако, особый случай, когда это общее свойство выражений (38) не имеет места; это тот случай, когда обращение в нуль знаменателя и одного из числителей обусловливается обращением в нуль элементов общих обоим детерминантам. Действительно, если например, $B=0$ и $B'=0$, то знаменатели обоих дробей и числитель первой дроби обращаются в нуль, как детерминанты, имеющие столбец, состоящий из нулей; но числитель 2-ой дроби

$$\begin{matrix} C & A \\ C' & A' \end{matrix}$$

не будет, вообще, нулем, так как A, A', C, C', остаются совершенно произвольными. К этому случаю предыдущие рассуждения непременимы потому, что при $B=0$, $B'=0$ из равенства

$$B(CA'-AC')=0$$

уже не следует

$$CA'-AC'=0.$$

В рассматриваемом случае координата x точки пересечения делается неопределенною, тогда как y получает бесконечно большое значение. Так как здесь коэффициенты B и B' равны нулю, то обе данные прямыя параллельны оси Y, и потому из двух координат их точки пересечения обращается в бесконечность только координата y, тогда как другая координата x остается неопределенною.

62. Условие, при котором три данные прямыя проходят через одну точку. Пусть нам даны прямыя

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0 \\ A_2x+B_2y+C_2&=0 \\ A_3x+B_3y+C_3&=0 \end{aligned} \qquad (39)$$

Если три данные прямыя пересекаются в одной точке, то координаты этой точки должны удовлетворять всем трем уравнениям, а трем неоднородным уравнениям с двумя неизвестными можно одновременно удовлетворить только в том случае, когда

етерминант системы равен нулю. Следовательно, условие пересечения трех прямых в одной точке будет

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{40}$$

Координаты точки пересечения найдутся, если мы решим два из данных уравнений.

То же условие можно представить в ином виде. Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения второй и третьей прямой. Уравнение такого пучка будет (§ 44)

$$(A_2x + B_2y + C_2) - k(A_3x + B_3y + C_3) = 0.$$

В самом деле, прямая, изображаемая этим уравнением при произвольном k, проходит через точку пересечения второй и третьей прямых, потому что координаты точки пересечения удовлетворяют второму и третьему уравнению системы (39), и, следовательно, обращают первую часть уравнения в нуль при всяком значении множителя k. Представим это уравнение в виде

$$(A_2 - kA_3)x + (B_2 - kB_3)y + (C_2 - kC_3) = 0.$$

Если первая прямая проходит через точку пересечения второй и третьей, то она должна принадлежать нашему пучку; следовательно, должно существовать такое значение k, при котором уравнение пучка обращается в уравнение первой прямой. Но мы знаем, что если два уравнения изображают одну и ту же линию, то соответственные коэффициенты пропорциональны; отсюда имеем:

$$\frac{A_1}{A_2 - kA_3} = \frac{B_1}{B_2 - kB_3} = \frac{C_1}{C_2 - kC_3} = -\frac{q}{p},$$

где через $-\frac{q}{p}$ мы обозначили общую величину трех отношений.

Из равенства

$$\frac{A_1}{A_2 - kA_3} = -\frac{q}{p}$$

получаем

$$pA_1 = -qA_2 + kqA_3, \text{ или } pA_1 + qA_2 - kqA_3 = 0,$$

или, обозначая $-kq$ через r,

$$pA_1 + qA_2 + rA_3 = 0.$$

Таким же образом найдем

$$pB_1 + qB_2 + rB_3 = 0,$$
$$pC_1 + qC_2 + rC_3 = 0.$$

Итак, если три данные прямые проходят через одну и ту же точку, то должны быть такие три числа p, q, r, при которых последние три равенства тождественно удовлетворяются. Этим равенствам можно дать следующее истолкование. Умножив первое из них на x, второе на y и сложив с третьим, получим

$$p(A_1x + B_1y + C_1) + q(A_2x + B_2y + C_2) + r(A_3x + B_3y + C_3) = 0. \quad (41)$$

Это тождество должно иметь место для всех значений переменных x и y. Таким образом, если три прямые проходят через одну точку, то можно найти три числа p, q, r, имеющие то свойство, что умножив на них первые части наших уравнений и сложив их, мы получим в сумме тождественно нуль. Обратно, если это условие удовлетворено, то три прямые, действительно, проходят через одну точку. В самом деле, пусть будут x, y координаты точки пересечения второй и третьей прямых; тогда мы имеем

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_2 = 0.$$

Вставив эти выражения в тождество (41), получим

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

т.-е. координаты той же точки удовлетворяют и первому уравнению; следовательно, эта точка лежит и на первой прямой.

Рассмотрим, например, прямые

$$x + y + 1 = 0$$
$$2x + 3y = 0$$
$$4x + 5y + 2 = 0.$$

Посмотрим, проходят ли эти прямые через одну точку. Поступая по первому способу, мы должны составить детерминант

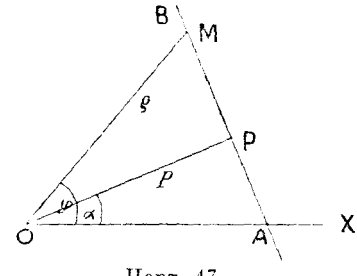
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{matrix}.$$

Вычислив его, мы найдем, что он равен нулю; следовательно, наши прямые проходят через одну точку. Решая ту же задачу вторым способом, найдем такие множители, умножив на которые левые части наших уравнений и сложив их, получим нуль. Такие множители существуют: это 2, 1 и —1, так мы имеем тождественно

$$2(x+y+1)+(2x+3y)-(4x+5y+2)=0.$$

Следовательно, прямые проходят через одну точку, именно через точку (—3, 2), как это найдем, решая, например, два первых уравнения.

63. Уравнение прямой в полярных координатах. Пусть мы имеем полюс O (черт. 47) и полярную ось OX. Положение прямой AB будет известно, если дано расстояние p прямой от начала и угол α, который образует перпендикуляр к прямой с полярною осью. Возьмем на нашей прямой какую-нибудь точку M и построим ее координаты, т.-е. проведем радиус-вектор и отметим угол φ, который этот радиус-вектор образует с осью OX. Из треугольника OPM имеем:



Черт. 47.

$$p=\varrho\cos(\varphi-\alpha). \qquad (42)$$

Это и будет уравнение прямой в полярных координатах; оно вообще трансцендентное, так как угол φ входит под знаком трансцендентной функции. Но есть прямые, уравнение которых в полярных координатах не трансцендентно. В самом деле, пусть $p=0$, т. е. прямая проходит через начало координат; тогда примет вид:

$$\varrho\cos(\varphi-\alpha)=0.$$

Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из них должен быть нулем. Но ϱ равно нулю только для начала координат; следовательно, уравнение прямой будет

$$\cos(\varphi - \alpha) = 0.$$

Его можно заменить уравнениями $\varphi - \alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi - \alpha = -\frac{\pi}{2}$ или

$$(\varphi - \alpha)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

Таким образом, для прямых, проходящих через полюс, вместо трансцендентного уравнения мы получили алгебраическое. Этот пример показывает еще раз (§ 40), почему было бы неправильно основывать классификацию линий на виде их уравнений в полярных координатах: уравнение линии в этих координатах может быть алгебраическим или трансцендентным в зависимости от ее положения относительно полюса.

64. Метод сокращенных обозначений. Если мы имеем уравнения нескольких прямых, то многие свойства, которыми эти прямые обладают одна относительно другой, выражаются тем, что левые части уравнений этих прямых удовлетворяют тождественно некоторым соотношениям. Так, мы видели (§ 62), что прямые (39) проходят через одну точку, если левые части их уравнений тождественно удовлетворяют условию (41). Так как левые части уравнений входят в подобные соотношения, как целое, то в этих случаях нет надобности выписывать уравнения прямых подробно, а достаточно обозначить левую часть уравнения каждой прямой одним знаком подобно тому, как мы сокращенно обозначили левую часть в уравнении какой-нибудь линии символом $F(x, y)$ (§ 34). Так, обозначая левые части уравнений (39) символами U, V, W, мы получим условие (41) в виде

$$pU + qV + rW = 0.$$

На этом замечании основан так называемый метод сокращенных обозначений в применении к уравнению прямой линии. Пусть нам дано уравнение прямой в нормальном виде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0.$$

Если мы обозначим правую часть этого уравнения через α, то оно примет вид

$$\alpha = 0,$$

где α обозначает уже не угол, как прежде, а весь многочлен

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p.$$

Пусть нам дано другое уравнение:

$$x\cos\alpha' + y\cos\beta' - p' = 0.$$

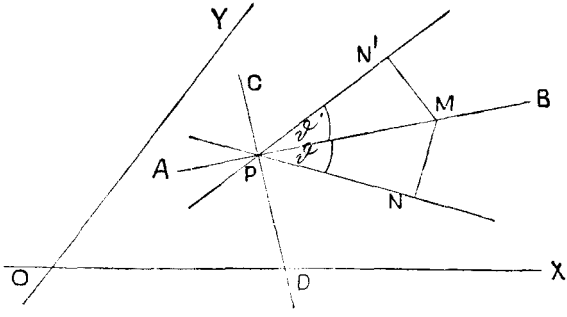
Сокращенно мы его обозначим так:

$$\alpha' = 0.$$

Тогда уравнение

$$\alpha - k\alpha' = 0, \qquad (43)$$

где k есть неопределенный параметр, будет изображать (§ 44) пучек прямых, проходящих через точку пересечения прямых $\alpha = 0$ и $\alpha' = 0$.



Черт. 48.

Параметр k имеет здесь весьма простое значение. Пусть уравнения $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$ представляют прямые PN, PN' (черт. 48). Точка P пересечения этих прямых будет центром пучка прямых (43). Возьмем одну из прямых этого пучка, например AB; пусть будет $\alpha - k\alpha' = 0$ уравнение этой прямой. Решая это уравнение относительно k, получим

$$k = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

Посмотрим, что обозначают в этом равенстве a и a'. Возьмем какую-нибудь точку M на прямой AB, изображаемой уравнением

$$a - ka' = 0.$$

Координаты ее должны удовлетворять уравнению прямой, и следовательно, если мы подставим в выражение $\frac{a}{a'}$ вместо x и y координаты точки M, то результат будет равен k. Но мы знаем, что если мы в нормальный многочлен a вставим координаты какой-нибудь точки M, то получим выражение расстояния точки M от прямой $a = 0$, т.-е. длину перпендикуляра MN; точно также многочлен a' даст при этом длину перпендикуляра MN'. Поэтому

$$k = \frac{a}{a'} = \frac{MN}{MN'}.$$

Следовательно, k есть отношение расстояний какой-нибудь точки M прямой AB от двух основных лучей пучка $a = 0$ и $a' = 0$. Этому истолкованию можно дать другой вид, независимый от того, где на прямой AB будет взята точка M. В самом деле, пусть углы между лучем AB и двумя основными лучами пучка будут ϑ и ϑ'; тогда

$$MN = PM \sin\vartheta \quad \text{и} \quad MN' = PM \sin\vartheta',$$

и следовательно

$$k = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}.$$

Таким образом, в уравнении пучка $a - ka' = 0$ параметр k есть отношение синусов углов, под которыми луч пучка, соответствующий данному значению параметра k, наклонен к основным лучам. Решим теперь вопрос о знаке k, так как параметр k может быть и положительным и отрицательным. Ясно, что так как k есть отношение расстояний точки, лежащей на данной прямой, от двух основных лучей $a = 0$ и $a' = 0$, то k будет положительно, когда оба эти расстояния имеют одинаковые знаки, и отрицательно, когда знаки этих расстояний противоположны. Но известно, что знак расстояния точки от прямой

зависит от того, лежит ли точка по ту же сторону прямой, как и начало координат, или по другую сторону; в первом случае расстояние отрицательно, во втором—положительно (§ 59). Следовательно, если прямая $a - ka' = 0$ расположена так, что ее точки или отделяются обоими основными лучами от начала, или лежат относительно обоих лучей по одну сторону с началом координат, как луч AB чертежа 48, то k положительно; если же луч расположен так, что точки его лежат относительно одной основной прямой по одну сторону с началом, а относительно другой—по разные стороны, как луч CD, то k отрицательно. Другими словами, если луч расположен в одном углу с началом или в углу вертикальном, то знак параметра k будет $+$, если же луч будет в смежном угле, то знак k будет $-$. Таким образом, вся совокупность лучей пучка при точке P делится двумя основными прямыми $a = 0$, $a' = 0$ на две области: для лучей одной области, заключающей начало координат, параметр k имеет положительное значение, тогда как для лучей другой области k отрицательно. Заметим, что мы имели аналогичное распределение точек в прямолинейном ряде при определении положения точки относительно двух данных точек. Когда точка лежала между двумя основными, то в выражении ее координаты (§ 7)

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

λ было положительно; когда же она лежала вне отрезка между основными точками, то λ было отрицательно (§ 8).

Рассмотрим два основных луча

$$a = 0, \quad a' = 0$$

и два луча, проходящие через точку пересечения первых двух,

$$a - ka' = 0, \quad a - la' = 0.$$

Отношение параметров $\frac{k}{l}$ называется сложным, или ангармоническим отношением четырех лучей пучка. Такое название принадлежит ему по следующей причине. Пусть углы наклонения луча пучка $a - ka' = 0$ к двум основным будут ϑ и ϑ', а углы наклонения луча $a - la' = 0$ к основным φ и φ'. Тогда

$$k = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}, \quad l = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'},$$

и мы будем иметь

$$\frac{k}{l} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} : \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}.$$

Мы получили выражение аналогичное тому, которое имели для сложного отношения четырех точек (§ 11); здесь отношение синусов углов, образуемых одним лучем, делится на отношение синусов углов, образуемых другим лучем с двумя основными, совершенно так же, как там отношение расстояний одной из точек от двух основных делится на отношение расстояний второй точки от двух основных.

Подобно тому, как четыре точки называются гармоническими, если их сложное отношение равно — 1, так и четыре луча называются гармоническими, если их сложное отношение равно — 1.

До сих пор мы предполагали, что уравнения двух основных лучей пучка $\alpha = 0$ и $\alpha' = 0$ даны в нормальном виде. Пусть теперь эти уравнения даны в общем виде:

$$U = 0, \quad U' = 0.$$

Положим, далее, что мы имеем еще два других луча пучка:

$$U - kU' = 0, \quad U - lU' = 0.$$

Докажем, что хотя основные уравнения и не приведены к нормальному виду, тем не менее сложное отношение этих четырех лучей равно, как и прежде, отношению $\frac{k}{l}$. Пусть нормирующие множители (§ 50) для U и U' будут соответственно M и M'. Представим уравнения

$$U - kU' = 0, \quad U - lU' = 0$$

в виде

$$\frac{MU}{M} - k\frac{M'U'}{M'} = 0, \qquad \frac{MU}{M} - l\frac{M'U'}{M'} = 0,$$

или

$$MU - k\frac{M}{M'} \cdot M'U' = 0, \qquad MU - l\frac{M}{M'} \cdot M'U' = 0.$$

Так как M и M' суть нормирующие множители, то MU и $M'U'$

суть многочлены, приведенные к нормальному виду. Поэтому сложное отношение четырех лучей

$$U = 0,\ U' = 0,\ U - kU' = 0,\ U - lU' = 0$$

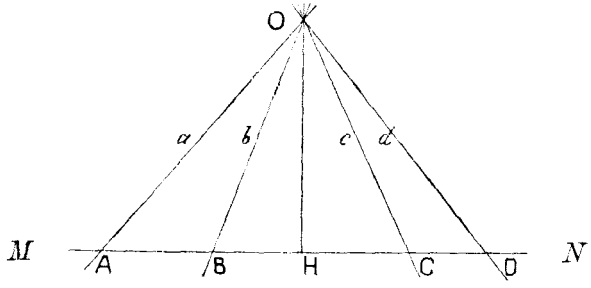
равно

$$k\frac{M}{M'} : l\frac{M}{M'},\ \text{или}\ k : l.$$

Итак, выражение сложного отношения через параметр лучей сохраняет свой вид и в том случае, когда лучи даны общими уравнениями, так что и здесь мы имеем

$$\frac{k}{l} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} : \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}$$

65. Пусть мы имеем прямолинейный ряд MN (черт. 49) и вне его точку O. Проводя через O прямые ко всем точкам



Черт. 49.

ряда, мы получим при O пучек лучей. Пучек O будет называться перспективным к ряду MN, если каждой точке ряда мы будем считать соответствующим тот луч пучка, который проходит через эту точку.

Докажем следующую основную теорему:

Сложное отношение четырех точек прямолинейного ряда равно сложному отношению четырех лучей пучка, перспективного к этому ряду.

Пусть будут A, B, C, D четыре точки ряда и a, b, c, d перспективные к ним лучи пучка. Обозначим сложное отношение

четырех точек ряда символом $(ABCD)$, а сложное отношение лучей символом $(abcd)$ и докажем, что

$$(ABCD) = (abcd),$$

или, если угол между лучами a и b назовем через (ab), между a и c через (ac) и т. д.:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Опустим из O на прямую AD перпендикуляр OH и составим выражения удвоенных площадей треугольников, которые имеют вершины при O и опираются на каждый из четырех отрезков, входящих в выражение сложного отношения:

$$2\,\Delta AOC = AC \,.\, OH = AO \,.\, CO \sin(ac),$$
$$2\,\Delta BOC = BC \,.\, OH = BO \,.\, CO \sin(bc).$$
$$2\,\Delta AOD = AD \,.\, OH = AO \,.\, DO \sin(ad),$$
$$2\,\Delta BOD = AD \,.\, OH = BO \,.\, DO \sin(bd).$$

Делим почленно первое равенство на второе и третье на четвертое:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AO}{BO} \cdot \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}, \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BO} \cdot \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

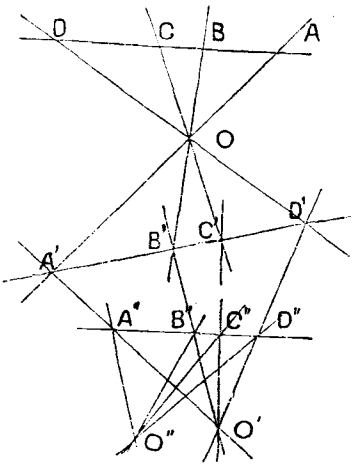
Деля почленно эти два равенства, имеем

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}, \tag{44}$$

что и требовалось доказать.

Мы доказали это предложение при одном определенном порядке точек A, B, C, D и лучей a, b, c, d. Нетрудно, однако, видеть, что оно верно всегда. Действительно, если бы какие-нибудь две точки, например A, B, переменились местами, то и соответствующие им лучи a, b также переменились бы местами. Таким образом, с переменою знака отрезка AB, переменился бы и знак угла (ab), и равенство (44) осталось бы верным.

Рассмотрим четыре точки A, B, C, D прямолинейного ряда; (черт. 50). Возьмем произвольную точку O на плоскости и проведем через нее четыре луча перспективных к точкам ряда тогда сложное отношение этого пучка лучей, по доказанному, равно сложному отношению четырех данных точек. Пересечем этот пучек новою прямою; тогда сложное отношение четырех полученных точек A', B', C', D' будет равно сложному отношению четырех лучей пучка, а, следовательно, будет равно и сложному отношению четырех данных точек. Если через новый ряд точек мы проведем из O' новый пучек лучей, перспективных к ним, то сложное отношение этого пучка будет тоже равно сложному отношению четырех данных точек и т. д., так что все члены этой цепи перспективных лучей и точек будут иметь одно и то же сложное отношение. Таким образом, если мы имеем систему рядов точек и пучков лучей, в которой каждые два последовательных члена перспективны между собою, то сложное отношение четырех элементов одного из рядов или пучков равно сложному отношению соответствующих элементов во всех остальных рядах и пучках этой системы. Такие ряды и пучки называются проективными.

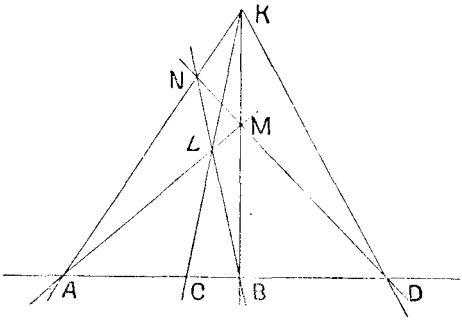


Черт. 50.

66. В § 13 было указано построение по трем данным точкам четвертой гармонической. Это построение требует отложения равных отрезков и проведения параллельных прямых и, следовательно, выполняется при помощи линейки и циркуля. Свойства проективных рядов и пучков, доказанные в предыдущем параграфе, позволяют решить ту же задачу посредством одной только линейки.

Возьмем прямую линию и на ней три точки A, B, C (черт. 51). Чтобы построить четвертую гармоническую к этим точкам, поступим следующим образом. Через точку A проведем две прямыя, через точку C третью прямую, которая пересечет две первые прямыя в точках K и L; эти точки соединим с B. Таким

образом, мы получим четыреугольник $KMLN$, две противоположные стороны которого пересекаются в A, две другие в B, и одна диагональ проходит через C. Другая диагональ четыреугольника своим пересечением с прямою AB определит точку D. Докажем, что точка D гармонически сопряжена с C относительно A и B, т.-е. если две пары противоположных сторон четыреугольника сходятся в двух точках A, B, то диагонали его пересекают прямую AB в двух других точках C, D, гармонических к двум первым.



Черт. 51.

Нам надо доказать, что точки A, B, C, D,—гармонические, т.-е., что сложное отношение их равно —1. Обозначим уравнение основной прямой AB сокращенно через $U = 0$, уравнение прямой AK—через $V = 0$ и уравнение прямой BK—через $W = 0$. Посмотрим, в каком виде представятся уравнения всех остальных линий нашего чертежа. Сторона AM проходит через точку A, а в этой точке сходятся прямые $U = 0$ и $V = 0$; следовательно, прямая AM принадлежит пучку, определяемому прямыми $U = 0$ и $V = 0$, и ее уравнение может быть представлено (§ 62) в виде

$$U - kV = 0.$$

Совершенно так же составится уравнение линии BN, как прямой, проходящей через точку пересечения прямых $U = 0$ $W = 0$:

$$U - lW = 0.$$

Таким образом, мы получили уравнения двух остальных сторон четыреугольника. Теперь нам нужно получить из тех же соображений уравнения диагоналей. Каждая диагональ проходит через две вершины четыреугольника и, следовательно, принадлежит одновременно двум пучкам. Диагональ CK проходит через точку K, а в этой точке сходятся прямые $V = 0$ и $W = 0$; та же

диагональ проходит через точку L, в которой сходятся прямые $U - kW = 0$ и $U - lW = 0$; если она должна принадлежат второму пучку, то уравнение ее должно иметь вид:

$$(U - lW) - m(U - kV) = 0;$$

если она принадлежит первому пучку, то ее уравнение будет вида

$$V - nW = 0.$$

Таким образом, одна и та же прямая изображается двумя различными уравнениями; поэтому уравнения эти должны быть тождественны, и m и n надо выбрать так, чтобы уравнение диагонали могло быть представлено в том и другом виде. Во втором уравнении нет U; следовательно, m нужно выбрать так, чтобы U исчезло и в первом уравнении; очевидно, для этого нужно положить $m = 1$. Таким образом, уравнение диагонали CK будет

$$kV - lW = 0.$$

Составим, далее, уравчение диагонали DN. Эта диагональ проходит через точку N; следовательно, она должна принадлежать пучку, определяемому прямыми $V = 0$ и $U - lW = 0$. С другой стороны, диагональ DN проходит через точку M; следовательно, она должна принадлежать пучку, определяемому прямыми W и $U - kV = 0$. Принадлежа к первому пучку, она выразится уравнением вида

$$(U - lW) - pV = 0;$$

вместе с тем она принадлежит и второму пучку, почему уравнение ее должно иметь вид

$$(U - Vk) - qW = 0.$$

Последние два уравнения должны быть тождественны; отсюда $p = k$, $q = l$, и уравнение диагонали DN будет

$$U - kV - lW = 0.$$

Мы хотим доказать, что точки A, B, C, D—гармонические Мы видели, что вместо этого можно доказать, что четыре луча, проходящие через эти точки, суть гармонические. Примем за

центр пучка лучей точку K; у нас уже есть уравнения трех лучей KA, KB, KC; составим уравнение луча KD. В точке K, через которую проходит этот луч, пересекаются прямые $V = 0$ и $W = 0$ и определяют пучек

$$V - rW = 0.$$

Тот же луч проходит через точку D, в которой сходятся прямые $U = 0$ и $U - kV - lW = 0$, определяющие пучек

$$U - s(U - kV - lW) = 0.$$

Прямая KD принадлежит как первому, так и второму пучку; поэтому оба уравнения должны быть тождественны. Но первое уравнение не содержит U, — его не должно быть и во втором; а для этого должно быть $s = 1$. Таким образом, уравнение луча KD будет

$$kU + lW = 0.$$

Выпишем уравнения всех четырех лучей:

$$AK: \quad V = 0,$$

$$BK: \quad W = 0,$$

$$CK: \quad U - \frac{l}{k} W = 0,$$

$$DK: \quad V + \frac{l}{k} W = 0.$$

Чтобы найти сложное отношение этих лучей, нужно взять частное тех двух параметров, которые определяют два луча CK, DK по отношению к двум основным AK, BK. Это частное есть

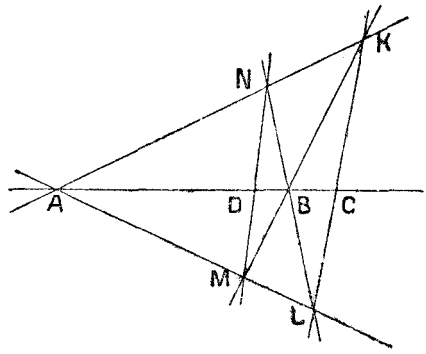
$$-\frac{l}{k} : \frac{l}{k} = -1.$$

Следовательно, наши четыре луча суть гармонические, а потому и ряд точек A, B, C, D, в которых эти лучи встречают прямую, есть ряд гармонический, что и требовалось доказать.

Отсюда получается следующее построение четвертой гармонической к точке C относительно точек A и B. Проводим через

C произвольную прямую CK, через A две произвольные прямые AK и AM; соединяем точку B с точками K и L, в которых эти две прямые пересекаются с CK, и находим вторые точки пересечения M и N прямых BK и BL с AK и AM; тогда MN пересечет AB в точке D, четвертой гармонической к C.

Заметим, что при этом построении нет необходимости, чтобы фигура $KLMN$ была четыреугольником в том смысле, как это понимается в элементарной геометрии, то есть, чтобы она ограничивала собою часть плоскости; достаточно, чтобы из четырех течек K, M, L, N никакие три не лежали на одной прямой. Черт. 52 соответствует тому случаю, когда фигура $KMLN$ не заключает внутри себя части плоскости.



Черт. 52.

Из указанного здесь построения четвертой гармонической видно, что если нам дан отрезок, разделенный пополам, то мы можем построить прямую, параллельную этому отрезку, при помощи одной только линейки, не употребляя циркуля, и обратно, имея две параллельных прямых, мы можем разделить пополам посредством только линейки любой отрезок, взятый на одной из этих прямых. В самом деле, так как четвертая гармоническая к средине отрезка есть бесконечно-удаленная точка прямой, то решение каждой из этих двух задач есть частный случай построения к трем данным точкам четвертой гармонической.

67. Начало двойственности. Рассматривая относительное положение точки и прямой, мы видим, что это положение может быть двоякое: точка или лежит на прямой, или не лежит на ней. Если точка лежит на прямой, то такое положение их мы будем называть перспективным, или инцидентным, а точку и прямую—перспективными между собою Так например, все точки прямолинейного ряда перспективны к прямой служащей основанием ряда; точно также все лучи пучка прямых перспективны к центру пучка, который точно также может быть назван его основанием.

Когда даны две точки, то есть единственная прямая, которая проходит через эти две точки, или перспективна к ним. Это свойство прямой мы можем выразить так: прямая вполне определяется двумя точками, к ней перспективными. Точно также и точка вполне определяется двумя прямыми, к ней перспективными, как точка их пересечения. Отсюда естественно ожидать, что в каждом предложении, касающемся относительного положения точек и прямых на плоскости, точка и прямая могут быть взаимно перемещены: если мы в данном предложении заменим прямыя точками и точки прямыми, то получим новое предложение, которое будет справедливо одновременно с первоначальным. В этом состоит начало взаимности точки и прямой на плоскости, или начало двойственности; его доказательство будет дано ниже (стр. 110).

Начало двойственности было почти одновременно установлено с несколько различных точек зрения Понсле (Poncelet, 1822) и Жергонном (Gergonne, 1826).

Посмотрим, как выразится начало двойственности в аналитической геометрии. До сих пор мы определяли точку двумя координатами, а прямую — уравнением между координатами; чтобы поступать согласно с законом двойственности, мы теперь должны дать способ определять прямую двумя координатами, а точку—уравнением между ними. Это можно сделать следующим образом. Уравнение прямой заключает в себе два независимых параметра; имея числовые значения этих параметров, мы будем знать уравнение прямой, а следовательно и самую прямую. Поэтому мы можем смотреть на параметры в уравнении прямой, как на два числа, определяющих эту прямую, и, следовательно, можем принять эти два параметра за две координаты прямой. Рассмотрим, какое геометрическое значение имеет уравнение между координатами прямой. Если x, y суть координаты точки, то одно уравнение между ними представляет бесконечное множество точек, непрерывно расположенных на некоторой линии (§ 34), т.-е. это уравнение представляет линию, как геометрическое место точек, на ней лежащих. Если мы теперь предположим, что x, y представляют координаты не точки, а прямой линии, то уравнение между ними будет представлять непрерывную последовательность прямых (черт. 53). Все эти прямыя в общем случае касаются некоторой кривой, или, как говорят в геометрии, огибаются этою кривою. Таким образом, одно

уравнение между двумя координатами прямой представляет линию, как огибающую бесконечного множества касательных прямых, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Поэтому координаты прямой называются также тангенциальными координатами. В частных случаях все прямыя, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, могут проходить через одну и ту же точку; тогда уравнение представляет эту точку, как огибающую всех прямых, проходящих через нее.

Черт. 53.

За координаты прямой могут быть приняты любые два независимых параметра в уравнении прямой. Выберем эти координаты таким образом, чтобы координаты точки и прямой входили в условие перспективного положения точки и прямой одинаковым образом. Этого можно достигнуть следующим выбором координат прямой. Будем определять положение точки декартовыми координатами x, y. Возьмем уравнение прямой относительно отрезков

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

за координаты прямой величины

$$u=-\frac{1}{a}, \quad v=-\frac{1}{b}$$

Тогда уравнение прямой получит вид

$$ux+vy+1=0 \tag{45}$$

Предположим, что в уравнении (45) даны как координаты точки x, y, так и координаты прямой u, v; тогда это уравнение выражает условие того, что точка (x, y) лежит на прямой (u, v), т.-е. что точка и прямая перспективны. Это условие симметрично относительно пар координат x, y и u, v, т.-е. вид его не изменится, если мы поставим одну пару координат на место другой. Отсюда видно, что координаты u, v удовлетворяют поставленному выше требованию.

Указанное выше начало двойственности вытекает из полной

симметрии условия (45) относительно координат точки и прямой. Действительно, всякое предложение, касающееся относительного положения точек и прямых, сводится к тому, что некоторые точки лежат на определенных прямых и некоторые прямые проходят через определенные точки, и это обстоятельство выражается в аналитической геометрии соотношениями вида (45); а так как эти соотношения не изменяются от взаимного обмена координат точки с координатами прямой, то из всякого предложения, касающегося относительного положения точек и прямых, после такого обмена получается новое, в котором точки заменены прямыми и прямые точками.

Если в уравнении (45) даны координаты u, v прямой, то оно представляет все точки (x, y), лежащие на прямой (u, v): оно есть уравнение прямой (u, v) в текущих координатах точки (x, y). Напротив, если в (45) даны координаты x, y точки, то оно представляет все прямые (u, v), проходящие через точку (x, y), так как ему удовлетворяют координаты u, v только тех прямых, на которых лежит эта точка; следовательно, теперь (45) есть уравнение точки (x, y) в текущих координатах прямой (u, v).

Подобно тому, как степень уравнения кривой $F(x, y) = 0$ в декартовых координатах называется порядком кривой (§ 42), точно также степень уравнения кривой $F(u, v) = 0$ в тангенциальных координатах называется ее к л а с с о м. Решая уравнение $F(x, y) = 0$ совместно с уравнением прямой, мы нашли (§ 51), что порядок кривой равен числу точек пересечения кривой с произвольною данною прямою. Точно также, решая уравнение кривой $F(u, v) = 0$ в тангенциальных координатах совместно с уравнением точки, мы найдем, что класс кривой равен числу касательных прямых, которые могут быть проведены к этой кривой из произвольно заданной точки.

В виде примера выведем уравнение окружности в тангенциальных координатах. Для этого мы должны выразить уравнением то свойство каждой касательной к окружности, что ее расстояние от центра равно радиусу. Обозначим радиус окружности через r и отнесем окружность к прямоугольным осям координат, начало которых поместим в центре кривой. Касательная к окружности, как прямая линия, имеет уравнение вида

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Чтобы найти ее расстояние от центра, приведем это уравнение к нормальному виду, умножая обе части на нормирующий множитель (§ 50). После приведения к нормальному виду уравнение касательной будет

$$-\frac{ux+vy+1}{\sqrt{u^2+v^2}}=0.$$

Подставив в левую часть координаты центра (0, 0), мы получим расстояние прямой от центра. Так как расстояние касательной к окружности от центра равно радиусу r круга, то координаты u, v прямой, касательной к окружности

$$x^2+y^2=r^2,$$

должны удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}=r,$$

или

$$u^2+v^2=\frac{1}{r^2}$$

Таково уравнение той же окружности в тангенциальных координатах. Ему должны удовлетворять координаты u, v всех прямых, огибаемых этою окружностью, т.-е. касательных к ней.

Координаты прямой были введены в 1830 г. Плюккером (Plücker).

68. Однородные координаты. Мы знаем, что каждая из двух координат x, y, определяющих положение точки на плоскости, есть отвлеченное число, представляющее собой отношение той или другой координатной линии к произвольно выбранной единице. В связи с этим часто бывает выгодно представлять и самые координаты x, y, как некоторые отношения. Введем три новых числа x', y', t' под тем условием, чтобы отношения двух первых к последнему были равны декартовым координатам точки, т.-е. положим

$$x=\frac{x'}{t'},\quad y=\frac{y'}{t'}$$

Такие три числа мы будем называть **однородными координатами** точки. Эти координаты называются однородными потому, что в этих координатах уравнения линий представляются в однородной форме.

Так как три однородные координаты точки связаны только тем условием, что их отношения должны давать две декартовы координаты этой точки, то ясно, что одной из трех однородных координат мы можем давать совершенно произвольное значение. Так, например, для точки $x=7$, $y=3$ мы можем взять или $x'=14$, $y'=6$, $t'=2$ или $x'=-21$, $y'=-9$, $t'=-3$ или $x'=7$, $y'=3$, $t'=1$ и т. д., так как во всех этих случаях имеем:

$$\frac{x'}{t'}=7,\ \frac{y'}{t'}=3.$$

Если положим $t'=1$, то будем иметь $x'=x$ и $y'=y$, т.-е. при $t'=1$ две остальные однородные координаты обращаются в декартовы. В последующем мы будем обозначать однородные координаты так же, как и декартовы, т.-е. будем писать x, y, t вместо x', y', t'; при этом нельзя опасаться смешения декартовых координат с однородными, так как те и другие вместе встречаться не могут. Если мы имеем уравнение, выраженное в декартовых координатах, то для перехода к однородным нужно заменить x и y отношениями $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$. Наоборот, чтобы перейти от однородных координат к декартовым, нужно везде вместо t поставить единицу. Поэтому в последующем мы иногда будем переходить от декартовых координат к однородным, просто заменяя декартовы координаты x, y через $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, где x, y имеют прежние значения, а t равно единице.

Посмотрим, какое геометрическое значение имеют уравнения, которые получаются, если мы приравняем нулю отдельно каждую из трех однородных координат. Легко видеть, что уравнение $x=0$ будет, по прежнему, изображать ось Y, а уравнение $y=0$ —ось X. Далее, символ t при переходе к декартовым координатам должен быть заменен через 1; следовательно, уравнение $t=0$ обращается в декартовых координатах в $1=0$; следовательно, это уравнение представляет бесконечно-удаленную прямую (§ 53). То же можно доказать, заметив, что если мы в выраже-

ниях $\frac{x}{t}$ и $\frac{y}{t}$ будем неограниченно приближать t к нулю, то в пределе получим для абсциссы и ординаты бесконечно-большие значения.

Условимся называть осью координат такую прямую, уравнение которой получим, приравнивая нулю одну из координат; тогда для однородных координат мы будем иметь осями координат две прежних оси — X и Y и третью — бесконечно-удаленную прямую. Поэтому однородная система координат называется также трилинейною.

Вводя три координаты вместо двух, мы, повидимому, усложняем задачу; но мы увидим, что однородные уравнения обладают свойствами, упрощающими исследование линий, и потому введение однородных координат оказывается во многих случаях полезным. Понятно, что однородные координаты особенно удобны в тех случаях, когда мы исследуем отношение данного геометрического образа к бесконечно-удаленной прямой.

69. Составим уравнение прямой в однородных координатах. Перейдем от декартовых координат к однородным, заменяя в уравнении

$$Ax + By + C = 0$$

x и y через $\frac{x}{t}$ и $\frac{y}{t}$. Эту замену можно изобразить так:

$$\begin{array}{c|c} x & \frac{x}{t} \\ y & \frac{y}{t} \end{array}$$

Выполнив подстановку, получим:

$$A\frac{x}{t} + B\frac{y}{t} + C = 0,$$

или

$$Ax + By + Ct = 0.$$

Таково уравнение прямой в однородных координатах. Это уравнение однородное, так как каждый член левой части первого измерения относительно x, y, t. Мы видим, что уравнение

прямой в однородных координатах получается из ее уравнения в декартовых координатах через введение в свободный член уравнения множителя t.

Посмотрим, какой вид принимает уравнение кривой n-го порядка, если мы заменим в нем декартовы координаты x, y, однородными x, y, t. Подставив в общее уравнение кривой n-го порядка (7) § 45, вместо x, y отношения $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, мы получим по умножении на t^n

$$\begin{aligned} &At^n + \\ &+ Bxt^{n-1} + Cyt^{n-1} \\ &+ Dx^2t^{n-2} + Exyt^{n-2} + Fy^2t^{n-2} + \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &+ Kx^n + Lx^{n-1}y + \ldots + My^n = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Левая часть этого уравнения представляет однородный многочлен n-ой степени относительно x, y, t. Таким образом, степень уравнения кривой в однородных координатах равна порядку кривой.

Очевидно, что если мы имеем уравнение алгебраической кривой в декартовых координатах x, y, то мы получим уравнение той же кривой в однородных координатах x, y, t, если умножим каждый член уравнения на такую степень t, чтобы сумма показателей при x, y, t была в каждом члене равна n — степени уравнения кривой.

70*. Коллинеарное соответствие между плоскостями. Рассмотрим две плоскости π, π', различные или совпадающие между собою. Отнесем точки первой плоскости к системе декартовых координат x, y, а точки второй — к системе декартовых координат x', y'. Положим, что между координатами x, y и x', y' существует зависимость, выраженная формулами

$$x = F(x', y'), \quad y = G(x', \tag{47}$$

где F, G — определенные функции от x, y'. На основании этих соотношений каждой паре значений x', y' будет соответствовать определенная пара значений x, y, и таким образом каждой точке $M'(x', y')$ второй плоскости будет соответствовать определенная точка $M(x, y)$ первой плоскости. Отсюда видно, что формулы (47) устанавливают между точками обоих плоскостей

определенное соответствие. Рассматривая переход от точки M, к точке M, как преобразование одной точки в другую, мы можем сказать, что формулы (47) определяют некоторое преобразование точек плоскости π' в точки плоскости π, или, короче, как некоторое преобразование *плоскости* π' *в плоскость* π.

Рассмотрим тот наиболее простой случай преобразования плоскостей, когда формулы преобразования имеют вид

$$x = \frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{a_3x' + b_3y' + c_3}, \quad y = \frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{a_3x' + b_3y' + c_3}, \tag{48}$$

причем правые части представляют дробные линейные выражения относительно x', y' с общим знаменателем. Соответствие, или преобразование, определяемое формулами (48), называется **коллинеарным**, или **гомографическим**.

Заменяя в формулах (48) декартовы координаты однородными, получим

$$\frac{x}{t} = \frac{a_1x' + b_1y' + c_1t'}{a_3x' + b_3y' + c_3t'}, \qquad \frac{y}{t} = \frac{a_2x' + b_2y' + c_2t'}{a_3x' + b_3y' + c_3t'}. \tag{49}$$

Эти два соотношения могут быть заменены тремя следующими:

$$\begin{aligned} \sigma x &= a_1x' + b_1y' + c_1t', \\ \sigma y &= a_2x' + b_2y' + c_2t', \\ \sigma t &= a_3x' + b_3y' + c_3t', \end{aligned} \tag{50}$$

где σ — множитель пропорциональности, не имеющий существенного значения, но не равный нулю.

Посмотрим, при каких условиях преобразование (50) будет взаимно-однозначным, т.-е. не только каждой точке второй плоскости будет соответствовать определенная точка первой, но и каждой точке первой плоскости — определенная точка второй. Для этого нужно, чтобы уравнения (48) были разрешимы относительно x', y', или, что то же, чтобы уравнения (50) были разрешимы относительно x', y', t'. Из теории детерминантов известно, что система уравнений (50) дает для x', y', t' конечные и определенные решения, если детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

называемый **детерминантом преобразования**, не равен нулю.

Предположим, что это условие выполнено и обозначим через $A_1, \dots C_3$ миноры детерминанта Δ, соответствующие элементам $a_1, \dots c_3$. Определяя из (50) x', y', t', найдем на осн известных формул теории детерминантов,

$$x' = \sigma \frac{A_1 x + A_2 y + A_3 t}{\Delta}$$

и аналогичные выражения для y' и t'. Обозначая $\frac{\Delta}{\sigma}$ через σ', будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma' x' &= A_1 x + A_2 y + A_3 t, \\ \sigma' y' &= B_1 x + B_2 y + B_3 t, \\ \sigma' t' &= C_1 x + C_2 y + C_3 t. \end{aligned} \qquad (51)$$

Множитель пропорциональности σ' связан с σ соотношением $\sigma\sigma' = \Delta$. Из (51), переходя к декартовым координатам, находим

$$x' = \frac{A_1 x + A_2 y + A_3}{C_1 x + C_2 y + C_3}, \quad y' = \frac{B_1 x + B_2 y + B_3}{C_1 x + C_2 y + C_3}$$

Отсюда видно, что преобразование, обратное коллинеарному,— также коллинеарное; его детерминант равен Δ^2.

71*. Пусть мы имеем на первой плоскости прямую, изображаемую в однородных координатах уравнением

$$ux + vy + wt = 0$$

Посмотрим, какая линия будет соответствовать этой прямой на второй плоскости. Заменяя по умножении на σ в уравнении прямой x, y, t их выражениями (50), получим

$$(a_1 u + a_2 v + a_3 w)x' + (b_1 u + b_2 v + b_3 w)y' + (c_1 u + c_2 v + c_3 w)t' = 0.$$

Это уравнение — первой степени относительно x', y', t' и, следовательно, представляет прямую. Таким образом, **при коллинеарном преобразовании каждая прямая преобразуется в прямую**. В частности, бесконечно-удаленной прямой первой плоскости соответствует на второй плоскости

прямая $a_3x' + b_3y' + c_3 = 0$, а бесконечно-удаленной прямой второй плоскости — прямая $C_1x + C_2y + C_3 = 0$ первой.

Легко видеть, что коллинеарное преобразование не изменяет порядка алгебраической кривой. Пусть мы имеем в первой плоскости кривую n-го порядка, изображаемую в однородных координатах уравнением (46) § 69. Так как в коллинеарном преобразовании x, y, t выражаются через x', y', t' линейными формулами, то умножив уравнение кривой на σ^n и заменив σx, σy, σt их выражениями (50), мы получим уравнение преобразованной кривой в координатах x', y', t', степень которого будет также равна n.

Так например, коллинеарное преобразование

$$x = \frac{y' + 1}{x' + y'}, \quad y = \frac{x' + 1}{x' + y'}$$

превращает кривую третьего порядка

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2 + 4xy - 3y^2 + x - 1 = 0$$

в кривую

$$y'^2 = x'^3.$$

Коллинеарное преобразование имеет в геометрии обширное применение; оно особенно полезно при изучении свойств кривой в ее отношении к прямым. В этом случае мы можем преобразовать данную кривую в другую с более простым уравнением, как это видно на предыдущем примере; а так как при коллинеарном преобразовании прямыя остаются прямыми, то после преобразования исследование упрощается. Так например, можно показать, что коллинеарным преобразованием каждая кривая 2-го порядка может быть преобразована в окружность; отсюда все свойства кривых 2-го порядка по отношению к прямым могут быть выведены из соответствующих свойств окружности.

Формулы преобразования декартовых координат (21) § 31 также могут быть понимаемы, как определяющие некоторое коллинеарное преобразование; для этого нужно только рассматривать в этих формулах x, y и x', y' не как координаты одной и той же точки, выраженные в двух разных системах координат, а как координаты двух соответственных точек в двух

плоскостях, различных или совпадающих. Так как формулы преобразования координат отличаются от общих формул коллинеарного преобразования тем, что они не дробные, а целые, то в этом случае бесконечно-удаленной прямой на одной плоскости соответствует и на другой плоскости бесконечно-удаленная прямая. Коллинеарное соответствие этого частного вида называется с р о д с т в е н н ы м или а ф ф и н н ы м.

Осуществить коллинеарное преобразование геометрически можно весьма просто следующим образом. Возьмем две плоскости π и π' и вне их точку S. Будем проектировать из точки S одну плоскость на другую, т.-е. будем считать соответственными те точки, M, M' обеих плоскостей, которые лежат на одной прямой с S; тогда каждой прямой p на плоскости π будет, очевидно, соответствовать и на плоскости π' также некоторая прямая p', именно та, по которой плоскость π' пересекается с плоскостью, проходящею через прямую p и точку S.

72*. Трилинейные координаты. В связи с коллинеарным преобразованием плоскостей стоит весьма общая система координат, особенно удобная при исследовании проективных свойств плоскости. Положим, что между плоскостями π' и π установлено коллинеарное соответствие посредством формул:

$$\begin{aligned} \sigma x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 t, \\ \sigma y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 t, \\ \sigma t' &= a_3 x + b_3 y + c_3 t, \end{aligned} \tag{53}$$

причем детерминант преобразования

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{54}$$

не равен нулю, Согласно § 70, мы будем иметь отсюда

$$\begin{aligned} \sigma' x &= A_1 x' + A_2 y' + A_3 t' \\ \sigma' y &= B_1 x' + B_2 y' + B_3 t' \\ \sigma' t &= C_1 x' + C_2 y' + C_3 t'. \end{aligned} \tag{55}$$

Если нам даны отношения $x : y : t$, то мы отсюда получим $x' : y' : t'$, и обратно, зная $x' : y' : t'$, мы найдем $x : y : t$. Отсюда следует, что мы можем рассматривать x', y', t' не только как координаты на плоскости π', но и как координаты на плоскости π,

так как их отношения определяют и отношения координат x, y, z, а следовательно и положение точки не только в плоскости π', но и в плоскости π. Рассматривая координаты x', y', t', не как координаты на плоскости π', а как новый род координат на плоскости π, мы будем обозначать их через x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 t, \\ \sigma x_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 t, \\ \sigma x_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 t, \end{aligned} \tag{56}$$

Посмотрим, каково геометрическое значение этих новых координат. Приравнивая нулю каждое из трех выражений (56), мы получим уравнения трех прямых

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 t &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 t &= 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 t &= 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Так как детерминант (54) не равен нулю, то эти прямые не пересекаются в одной точке (§ 62), а образуют треугольник. В новых координатах уравнения этих прямых будут $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Поэтому прямые (57) называются координатными осями новой системы координат (ср. § 68), а образуемый ими треугольник — координатным треугольником.

Положим в предыдущих формулах $t = 1$ и обозначим через $\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$, $\frac{1}{\mu_3}$ нормирующие множители прямых (57). Тогда, обозначая через d_1, d_2, d_3 расстояние точки (x_1, x_2, x_3), или (x, y, t), от трех сторон координатного треугольника и имея в виду, что левая часть нормального уравнения прямой представляет расстояние от точки (x, y) до этой прямой (§ 59), будем иметь

$$\sigma x_1 = \mu_1 d_1, \quad \sigma x_2 = \mu_2 d_2, \quad \sigma x_3 = \mu_3 d_3. \tag{58}$$

Отсюда видно, что новые координаты x_1, x_2, x_3 пропорциональны расстояниям точки (x_1, x_2, x_3), от сторон координатного треугольника, умноженным на некоторые множители μ_1, μ_2, μ_3. При этом нужно иметь в виду, что расстояния d_1, d_2, d_3 могут быть как положительными, так и отрицательными, в зависимости от того, по какую сторону от каждой из трех сторон координатного треугольника расположена точка (x_1, x_2, x_3) (§ 59)

ГЛАВА VI.

Общие свойства кривых 2 го порядка.

73. Число условий, определяющих кривую 2-го порядка. Кривыми второго порядка называются те линии, которые в декартовых координатах изображаются уравнением второй степени (§ 42). Составим общее уравнение кривой второго порядка. Число членов этого уравнения на основании общей формулы (§ 45) равно:

$$\frac{(2+1)(3+1)}{2} = 6.$$

Так как здесь коэффициентов довольно много, то обозначать каждый коэффициент особою буквою было бы неудобно. Поэтому для коэффициентов уравнения кривой 2-го порядка мы будем пользоваться следующим обозначением. Будем обозначать каждый коэффициент одною и тою же буквою a, но с двумя указателями, зависящими от того, какие из текущих координат x и y входят множителями в рассматриваемый член уравнения; множителю x будет соответствовать указатель 1, множителю y — указатель 2; если же данный член ниже второй степени, то на место недостающих указателей будем ставить указатель 3. Кроме того, для упрощения последующих вычислений мы введем множитель 2 при всех коэффициентах с неодинаковыми указателями, так что a_{12}, a_{13}, a_{23} будут равны половинам коэффициентов при xy, при x и при y. Порядок указателей не имеет здесь значения, так что, напр. коэффициент при xy мы будем обозначать как через $2a_{12}$, так и через $2a_{21}$. Таким образом, общее уравнение кривой 2-го порядка будет иметь следующий вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение содержит три высших, или старших члена второй степени, два члена первой степени и один низший, или младший член нулевой степени — свободный член уравнения. Так как общее уравнение кривой второго порядка содержит шесть членов, то число независимых параметров в этом уравнении равно пяти (§ 45), и, следовательно, кривая второго порядка определяется пятью условиями, например, требованием, чтобы кривая проходила через пять данных точек.

Составим уравнение кривой 2-го порядка, проходящей через 5 данных точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5). Пусть точка (x, y) есть какая-нибудь шестая точка кривой; координаты всех этих шести точек должны удовлетворять

$$\begin{aligned}
&a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,\\
&a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{11}x_2^5 + 2a_{12}x_5y_5 + a_{22}y_5^2 + 2a_{13}x_5 + 2a_{23}y_5 + a_{33} = 0.
\end{aligned}$$

Так как мы ищем уравнение кривой 2-го порядка, проходящей через данные точки, то неизвестными у нас будут коэффициенты этого уравнения. Последние соотношения представляют относительно этих коэффициентов систему шести однородных уравнений первой степени с шестью неизвестными. Так как все шесть коэффициентов в уравнении кривой не могут быть одновременно равны нулю — в противном случае уравнение обратилось бы в тождество, — то детерминант этой системы уравнений равен нулю (ср. § 57),

$$\begin{vmatrix}
x^2 & xy & y^2 & x & y & 1\\
x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\
x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\
x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\\
x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1\\
x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1
\end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Здесь x, y суть координаты любой точки искомой кривой. Поэтому уравнение (2) есть равнение этой кривой в текущих координатах x, y. Так как в олученном уравнении текущие координаты x, y входят только в первую строку, а в каждый

член детерминанта входит только по одному элементу из каждой строки, то это уравнение второй степени, и, следовательно, изображает кривую 2-го порядка. Эта кривая проходит через 5 заданных точек, так как если в детерминанте, стоящем в левой части уравнения (2), мы подставим вместо текущих координат координаты какой-нибудь из этих пяти точек, то детерминант, имея две равных строки, обратится тождественно в нуль, и уравнение (2) тождественно удовлетворится.

Коэффициентами в уравнении (2) будут миноры, соответствующие различным элементам первой строки детерминанта, стоящего в левой части уравнения, так как эти миноры будут множителями при x^2, xy, . . . если мы разложим детерминант по элементам первой строки. Отсюда следует, что если пять точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . будут даны так, что все эти миноры обратятся в нули, то мы получим не уравнение кривой, а тождество, и, следовательно, такие пять точек не определяют кривой второго порядка. Легко видеть, как должны быть расположены пять точек, чтобы такое исключительное обстоятельство имело место: для этого четыре из них должны лежать на одной прямой линии. В самом деле, пусть будет $U=0$ уравнение той прямой, на которой лежат четыре из данных пяти точек, а $V=0$ уравнение какой-либо прямой, проходящей через пятую точку. Уравнение $UV=0$ будет, очевидно, представлять линию второго порядка, так как UV, как произведение двух линейных множителей, есть выражение второй степени, и потому, хотя линия $UV=0$ и распадается на пару прямых, но это, тем не менее, линия второго порядка. Эта линия второго порядка, действительно, проходит через все пять данных точек, потому что одна из составляющих ее прямых проходит через четыре данные точки, а другая—через пятую. Очевидно, однако, что через пятую точку можно провести бесчисленное множество прямых $V=0$, целый пучек их, и присоединяя каждую из них к прямой $V=0$, мы каждый раз будем получать другую линию второго порядка, так как ее вторая составная часть $V=0$ будет каждый раз иная. Таким образом, через взятые нами пять точек проходит не одна, а бесконечное множество линий 2-го порядка, и потому эти пять точек не определяют линии 2-го порядка.

Так как кривыя второго порядка изображаются в аналитической геометрии уравнением второй степени между

декартовыми координатами точек кривой, то все свойства этих кривых могут быть получены из рассмотрения уравнения второй степени с двумя неизвестными. Решая уравнение кривой 2-го порядка совместно с уравнением прямой, мы получим координаты точек пересечения кривой с различными прямыми, и, исследуя получаемые решения, можем вывести отсюда все свойства кривых 2-го порядка. Такой метод изучения кривых наиболее естественный. Но рассматривая кривую, как геометрическое место точек, мы глубже проникнем в свойства кривой, изучая ее отношение не к различным прямым, а к различным точным ее плоскости. Поэтому в аналитической геометрии существует другой метод изучения кривых, на первый взгляд несколько более сложный, но основанный на рассмотрении отношения кривой к различным точкам плоскости. Этот метод был дан Иоахимсталем (Joachimsthal, 1846). В дальнейшем изложении мы будем пользоваться им видоизменением этого метода.

74. Перенесение начала координат. Исследуем, как изменится уравнения кривой второго порядка, если мы перенесем координат в точку (x', y'). Обозначим первую часть кривой второго порядка через $2E$, так что

$$2F = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}.$$

Пусть начало координат перенесено из точки O в точку O' (x', y'), но направление осей осталось прежнее. Если мы обозначим новые координаты через X, Y, то формулы преобразования будут (§ 29)

$$x = X + x',$$
$$y = Y + y'$$

Вставив эти значения x и y в уравнение кривой, получим

$$a_{11}(X+x')^2 + 2a_{12}(X+x')(Y+y') + a_{22}(Y+y')^2 + \\ + 2a_{13}(X+x') + 2a_{23}(Y+y') + a_{33} = 0.$$

Раскрыв скобки и расположив члены по степеням X и Y, получим:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + \\ + 2(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})X + 2(a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23})Y + \\ + (a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33}) = 0$$

Отсюда видно, что свободный член преобразованного уравнения есть первая часть первоначального уравнения с заменою в ней текущих координат x, y координатами нового начала x', y'; результат такой подстановки мы будем обозначать через $2F'$. Далее, коэффициенты при X и Y суть первые производныя по x и y от многочлена $2F$ с заменою x и y через x' и y'. Будем обозначать через $2F_x$ и $2F_y$ производныя многочлена $2F$ по x и y, так что F_x и F_y будут половины этих производных. Если мы, кроме того, условимся обозначать, как и выше, знаком $'$ замену x, y через x', y', то коэффициенты при X, Y в преобразованном уравнении примут вид $2F'_{x'}$, $2F'_{y'}$. Наконец, коэффициенты при старших членах не меняются от перемены начала координат. Таким образом, уравнение кривой 2-го порядка после преобразования начала переходит в следующее:

$$a_{11} X^2 + 2a_{12} XY + a_{22} Y^2 + 2F'_{x'} X + 2F'_{y'} Y + 2F' = 0. \quad (3)$$

75. Уравнение в однородных координатах. Посмотрим, какой вид примет уравнение кривой 2-го порядка, если мы заменим в нем декартовы координаты

x, y через $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ и умножив на t^2,

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} xt + 2a_{23} yt + a_{33} t^2 = 0. \quad (4)$$

Как мы видим, уравнение кривой приняло в новых координатах однородный вид, так как все его члены второго измерения относительно координат x, y, t. Чтобы от уравнения кривой в однородных координатах возвратиться к ее уравнению в декартовых координатах, достаточно, как мы знаем, положить в однородном уравнении $t = 1$.

Легко видеть, что в однородном уравнении кривой 2-го порядка указатели 1 и 2 при коэффициентах соответствуют, по прежнему, множителям x и y, тогда как указатель 3 соответствует теперь множителю t.

76. Теорема Эйлера Мы докажем здесь одно важное свойство однородных выражений 2 ой степени. Пусть мы имеем однородный многочлен 2-ой степени.

$$2F = a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y + 2a_{13} xt + 2a_{13} yt + a_{33} t^2.$$

представляющий первую часть уравнения кривой второго порядка. Составим половины частных производных многочлена $2F$ по переменным x, y, t:

$$F_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t,$$
$$F_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t,$$
$$F_t = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t.$$

Помножив эти производные соответственно на x, y, t и сложив, получим

$$xF_x + yF_y + tF_t = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{13}yt + a_{33}t^2,$$

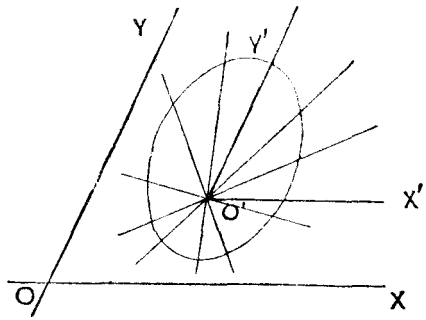
или

$$xF_x + yF_y + tF_t = 2F, \qquad (5)$$

т. е. сумма половин частных производных однородной функции второй степени, умноженных на соответствующие переменные, равна начальной функции.

Это свойство однородного многочлена второй степени представляет частный случай общего свойства однородных функций известного под названием теоремы Эйлера (Euler, 1775 г.).

77. Изыскание точек пересечения кривой 2-го порядка с лучами пучка прямых. Исследуем пересечение кривой с лучами пучка,



Черт. 54.

центр которого лежит в точке $O'(x', y')$. Перенесем начало координат в центр пучка (черт. 54). При этом уравнение кривой примет вид (§ 73):

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2F'_{x'}X + 2F'_{y'}Y + 2F' = 0. \qquad (3)$$

Нам нужно искать точки пересечения кривой с лучами, выходящими из нового начала координат O'. Для этого всего удобнее воспользоваться полярными координатами с полюсом в O', так как в этой системе координат лучи пучка будут вместе с тем и радиусами-векторами. Формулы преобразования декартовых координат в полярные имеют вид (§ 33)

$$X = m\varrho, \quad Y = n\varrho,$$

где

$$m = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}, \quad n = \frac{\sin\varphi}{\sin\omega}$$

При этом, как известно (§ 51), отношение $\frac{n}{m}$ равно k—угловому коэффициенту радиуса вектора, соответствующего амплитуде φ. Заменив в уравнении (3) X и Y соответственно через $m\varrho$ и $n\varrho$, получим

$$(a_{11}m^2 + 2a_{12}\,mn + a_{22}n^2)\varrho^2 + 2(mF'_{x_1} + nF'_{y_1})\varrho + 2F' = 0. \quad (6)$$

Такой вид имеет уравнение кривой второго порядка в полярных координатах ϱ и φ, если полюс помещен в точке $O'(x', y')$ Радиус-вектор ϱ входит здесь явно, а амплитуда φ заключен в m и n. Введем

$$\begin{gathered} a_{11}m^2 + 2a_{12}\,mn + a_{22}n^2 = M, \\ mF'_{x_1} + nF'_{y_1} = N \\ 2F' = P \end{gathered} \quad (7)$$

Тогда уравнение кривой представится в виде:

$$M\varrho^2 + 2N\varrho + P = 0 \quad (8)$$

На исследовании этого уравнения может быть основана вся теория кривых второго порядка.

Уравнение (8)—второй степени относительно ϱ; следовательно, при данных m и n, т.-е. при данном угле φ, оно дает для ϱ два значения. Это показывает, что каждый радиусо вектор встречает кривую в двух точках, что служит новым подтверждением того, что каждая прямая встречает кривую второго порядка в двух точках, действительных,мнимых или сливающихся (§ 49).

Заметим связь между первоначальными декартовыми координатами x и y и полярными ϱ и φ. Из формул

$$x = X + x', \quad y = Y + y',$$
$$X = m\varrho, \quad Y = n\varrho$$

находим

$$x = x' + m\varrho,$$
$$y = y' + n\varrho,$$

или

$$m\varrho = x - x', \quad n\varrho = y - y' \tag{9}$$

78. Бесконечно удаленные точки кривой 2-го порядка. Три вида кривых 2 го порядка. Посмотрим, сколько бесконечно-удаленных точек может иметь кривая 2-го порядка. Этот вопрос имеет важное значение, так как очевидно, что форма кривой существенно зависит от того, есть ли у кривой бесконечно-удаленные точки: если кривая имеет бесконечно-удаленные точки, то она имеет ветви, простирающиеся в бесконечность; если же таких точек нет, то кривая замкнута и вся лежит в конечной части плоскости.

Если кривая имеет бесконечно-удаленные точки, то расстояние каждой из этих точек от точки O' бесконечно велико. Это расстояние есть радиус-вектор ϱ; поэтому, если кривая имеет бесконечно-удаленные точки, то уравнение (8) имеет бесконечно-большие решения. Посмотрим, при каких условиях квадратное уравнение имеет бесконечно-большие решения. Возьмем квадратное уравнение с одним неизвестным в общем виде:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Введем вместо x новое неизвестное y, положив $x = \frac{1}{y}$, откуда $y = \frac{1}{x}$. Если x стремится к бесконечности, то y стремится к нулю, и вместо того, чтобы искать условия, при которых данное уравнение имеет бесконечно-большие решения, мы можем искать условия, при которых уравнение

$$a\frac{1}{y^2} + b\frac{1}{y} + c = 0,$$

или

$$cy^2 + by + a = 0$$

имеет нулевые решения. Последнее уравнение имеет один корень, равный нулю, если $a = 0$; второй корень равен нулю, если при этом и $b = 0$. Возвращаясь к первоначальному уравнению, мы отсюда заключаем, что если коэффициент при старшем члене квадратного уравнения равен нулю, то один из корней этого уравнения бесконечно велик; если же коэффициенты при двух старших членах равны нулю, то оба корня бесконечно велики.

Собственно, если в квадратном уравнении коэффициент при x^2 равен нулю, то это уравнение уже перестает быть квадратным, а обращается в уравнение первой степени и имеет единственный корень $-\frac{c}{b}$; когда мы говорим, что при $a = 0$ один из корней квадратного уравнения равен бесконечности, то это значит, что если коэффициент a неограниченно приближается к нулю, то один из корней уравнения неограниченно возрастает по абсолютной величине и в пределе обращается в безконечность. (Ср. § 53).

Обращаясь к уравнению (8), мы находим, что оно будет иметь один бесконечно большой корень при условии $M = 0$, или

$$a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0. \qquad (10)$$

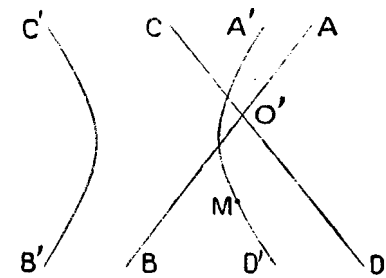
Это условие связывает количества m и n и, следовательно, дает то направление, которое должно иметь радиус-вектор, чтобы встретить кривую в бесконечно-удаленной точке. Разделив все уравнение (10) на m^2 и заметив, что отношение $\frac{n}{m}$ равно k, угловому коэффициенту радиуса-вектора (§ 51), получим:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0. \qquad (11)$$

Отсюда определяется угловой коэффициент радиуса вектора, встречающего кривую в бесконечно-удаленной точке. Уравнение (11) — квадратное, и, следовательно, радиус-вектор, встречающий кривую в бесконечности, имеет одно из двух направлений, действительных, совпадающих или мнимых, соответствующих двум корням этого уравнения. Это значит, что каждая кривая 2-го порядка имеет две бесконечно-удаленных точки, которые могут быть действительными, сливающимися или мнимыми. Так и должно быть, так как бесконечно-удаленная прямая, подобно всем другим прямым, встречает кривую 2-го порядка в двух точках.

Если уравнение (11) имеет два действительных, корня, то су-

ществуют два действительных направления для радиуса-вектора, встречающего кривую в бесконечности, и, следовательно, кривая имеет две бесконечно-удаленных точки. Такая кривая называется гиперболой. Как видно из черт. 35, гипербола состоит из двух ветвей, удаляющихся в бесконечность по двум различным направлениям. Причина того, что совокупность обеих ветвей рассматривается здесь, как одна кривая второго порядка, заключается, с точки зрения аналитической геометрии, в том, что в декартовых координатах обе ветви изображаются одним и тем же уравнением 2-ой степени; если уравнению удовлетворяют координаты точек одной ветви, то тому же уравнению будут удовлетворять и координаты точек другой ветви (ср. § 41).



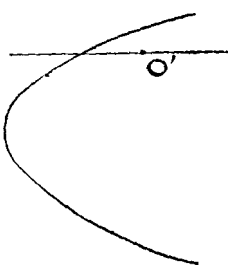
Черт. 55.

Мы нашли, что гипербола имеет две бесконечно-удаленных точки, а между тем, повидимому (черт. 54), она имеет их не две, а четыре,—по две на каждой ветви. Это противоречие устраняется здесь так же, как и в случае прямой линии (§ 9). Решая уравнение (11), мы найдем два значения углового коэффициента k, соответствующие тем двум радиусам-векторам, которые встречают кривую в бесконечности. Пусть эти радиусы-векторы лежат на прямых AB и CD. Так как мы принимаем (§ 9), что каждая прямая имеет не две, а только одну бесконечно-удаленную точку, то будем ли мы удаляться по гиперболе в бесконечность в направлении A' или в направлении B', мы в обеих случаях придем в одну и ту же бесконечно-удаленную точку прямой AB. Точно также, будем ли мы удаляться по гиперболе в направлении C' или D', мы придем в одну и ту же бесконечно-удаленную точку прямой CD. Отсюда видно, что принимая у каждой прямой одну бесконечно-удаленную точку, мы тем самым должны принимать у гиперболы, не четыре, а только две бесконечно-удаленных точки. В обеих этих точках две ветви гиперболы связаны между собою, так что бесконечно-удаленные точки гиперболы служат точками перехода одной ветви в другую.

Представим себе, что точка M перемещается по гиперболе в направлении, указанном стрелками. Тогда она, удалившись в

бесконечность по правой ветви в направлении A', пройдет через одну бесконечно-удаленную точку гиперболы, появится затем вновь на другой ветви со стороны B', опишет левую ветвь в направлении стрелки, удалится в бесконечность по направлению C', пройдет через другую бесконечно-удаленную точку гиперболы, вновь появится на первой ветви со стороны D', и, описав всю кривую, возвратится в свое первоначальное положение.

Если уравнение (11) имеет два равных корня, то существует только одно направление, по которому радиус-вектор встречает кривую в бесконечности; следовательно, в этом случае кривая имеет одну бесконечно-удаленную точку; такая кривая называется п а р а б о л о й (черт. 56). Как видно из чертежа, парабола простирается в бесконечность с двух сторон; тем не менее она имеет только одну бесконечно-удаленную точку, так как, удаляясь в бесконечность, обе ветви ее—верхняя и нижняя, стремятся сделаться параллельными, и, следовательно, обе направляются в одну и ту же бесконечно-удаленную точку, т.-е. смыкаются в бесконечности.



Черт. 56.

Наконец, если оба корня уравнения (11) мнимые, то кривая не имеет бесконечно-удаленных точек,—она замкнута; эта кривая есть э л л и п с (черт. 57).

Черт. 57.

Таким образом, форма кривой зависит от характера корней уравнения (11). Решая это уравнение, находим:

$$k = \frac{-a \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}.$$

и кривая второго порядка будет гиперболой, параболой или эллипсом, смотря по тому, будет ли числовое значение выражения

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

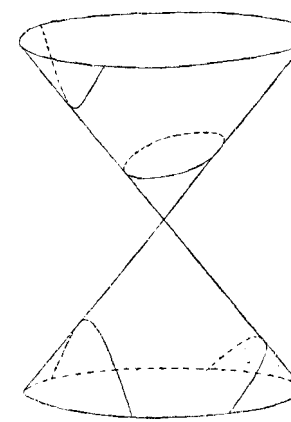
положительным, нулевым или отрицательным. Обыкновенно рассматривают не это выражение, а противоположное ему по знаку

$$a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}, \qquad (12)$$

которое называется дискриминантом старших членов уравнения кривой 2-го порядка. Таким образом, если дискриминант старших членов положителен, кривая есть эллипс, если он равен нулю, то кривая—парабола, если дискриминант отрицателен, то кривая—гипербола.

Уравнение (11) не содержит координат x', y' той точки O, из которой мы проводили пучек секущих. Поэтому, из какой бы точки мы ни проводили прямых параллельно направлению, определяемому одним из корней уравнения (11), эти прямые встретят кривую в бесконечности. Это и понятно, так как если какая-нибудь прямая встречает кривую в бесконечно-удаленной точке, то и все прямые параллельные первой встретят кривую *в той же* бесконечно-удаленной точке, так как параллельные прямые имеют общую бесконечно-удаленную точку (§ 10). С другой стороны, уравнение (11) показывает, что если в уравнениях двух кривых 2-го порядка старшие члены одинаковы, то эти кривые имеют общие бесконечно-удаленные точки.

Впоследствии мы докажем (гл. VIII), что все три вида кривых 2-го порядка—эллипс, парабола и гипербола—могут быть получены от пересечения прямого круглого конуса плоскостью. Пересекая конус (черт. 58) так, чтобы секущая плоскость пересекала все образующия, мы получим в сечении эллипс; пересекая конус плоскостью параллельною одной из образующих, получим параболу; пересекая конус плоскостью параллельною двум его образующим, будем иметь гиперболу. Так как кривыя второго порядка могут быть получены, как плоские сечения круглого конуса, то они называются также коническими сечениями.



Черт. 58.

Конические сечения были известны уже греческим геометрам. Из них наиболее обширный трактат об этих кривых дал Аполлоний (вторая половина III в. до Р. Х.).

79. Уравнение параболы. Весьма важная особенность уравнения параболы состоит в том, что в уравнении параболы, в отличие от уравнений других кривых 2-го порядка, старшие члены представляют полный квадрат. Чтобы это обнаружить, остановимся на соотношении

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \tag{13}$$

которое, как мы видели, характеризует параболу. Очевидно, что оба коэффициента a_{11} и a_{22} не могут здесь быть одновременно равны нулю, так как тогда и a_{12} было бы нулем, и уравнение (1) представляло бы не кривую 2-го порядка, а прямую. Предположим, что коэффициент a_{11} не равен нулю. Мы всегда можем сделать это предположение, так как, если бы a_{11} было нулем, то, по предыдущему, a_{22} было бы отлично от нуля; тогда, переменив роли осей X и Y, мы обратили бы x^2 в y^2, и коэффициент a_{22} занял бы место коэффициента a_{11}. Далее, мы можем предположить, что a_{11} есть число положительное, так как, если бы он был отрицательным, то, умножив уравнение (1) на -1, мы сделали бы его положительным. Поэтому мы можем положить

$$a_{11} = \alpha^2, = a_{12}\ \alpha\beta,$$

где α, β—действительные числа, из которых β может быть нулем. Внося эти значения в (13), мы получим из него $a_{22} = \beta^2$. Таким образом, в случае параболы мы имеем

$$a_{11} = \alpha^2,\ a_{12} = \alpha\beta, = a_{22}\ \beta^2, \tag{14}$$

и уравнение параболы может быть представлено в виде

$$(\alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

или

$$\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}\,x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{15}$$

наше предложение доказано.

Подставляя в уравнение (1) вместо коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} их значения (14), находим

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta k + \beta^2 k^2 = 0,$$

или

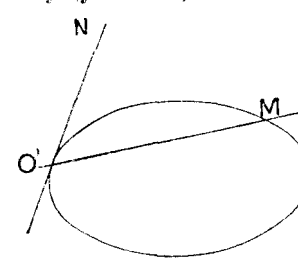
$$(\alpha + \beta k)^2 = 0,$$

откуда

$$k = -\frac{\alpha}{\beta}. \qquad (16)$$

Это выражение дает угловой коэффициент того направления, по которому расположена единственная бесконечно-удаленная точка параболы.

80. Касательныя к кривой 2-го порядка. Возьмем на кривой второго порядка точку O' (черт. 59). Соединив O' с какою-нибудь другою точкою M кривой, мы получим секущую $O'M$; таким образом, каждой точке M кривой будет соответствовать в пучке O' определенная секущая $O'M$, проходящая через эту точку. Исключение будет только в том случае, когда точка M совпадает с O'; здесь мы не будем иметь определенной секущей, так как нам будет известна только одна точка секущей, а не две, как во всех остальных случаях. Чтобы найти, какую секущую следует считать соответствующею точке M в том случае, когда эта точка совпадает с O', будем рассматривать этот случай, как предельный. Предположим, что точка M, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к O', и посмотрим, к какому положению стремится при этом секущая $O'M$. При движении точки M по кривой секущая $O'M$ будет вращаться около O', и по мере того, как M будет приближаться к O', секущая будет неограниченно приближаться к некоторому предельному положению $O'N$. Это положение будет предельным, потому что как бы близка ни была точка M к O', секущая $O'M$ не будет, совпадать с $O'N$. Это предельное положение секущей называется касательною к кривой в точке O'. Таким образом, касательная к кривой есть предел секущей, две точки пересечения которой с кривой беспредельно сближаются ме-



Черт. 59.

ду собою. Короче это выражают, говоря, что касательная есть прямая, встречающая кривую в двух сливающихся точках, или двух бесконечно-близких точках. Та точка, в которой сливаются две точки пересечения касательной с кривою, называется точкою прикосновения касательной.

Выведем уравнение касательной к кривой 2-го порядка в данной ее точке $O'(x', y')$. Отнесем кривую, как это мы делали в § 76, к системе полярных координат с полюсом O'. В нашем случае точка O' лежит на самой кривой; поэтому каждая прямая, выходящая из O', будет встречать кривую в этой точке. Следовательно, один из корней уравнения (8)

$$M\varrho^2 + 2N\varrho + P = 0$$

будет здесь равен нулю, каков бы ни был угловой коэффициент секущей прямой. Полагая в (8) $\varrho = 0$, находим $P = 0$, или, заменяя P его значением (7),

$$2F' = 0$$

Легко видеть, что это равенство, действительно, выражает, что точка O' лежит на данной кривой; в самом деле так как $2F'$ есть то, во что обращается многочлен $2F$ после замены x, y соответственно через x', y' (§ 73), то равенство $2F' = 0$ показывает, что координаты точки O' удовлетворяют уравнению $2F = 0$.

Чтобы получить касательную в точке O', мы должны найти такую прямую, обе точки пересечения которой с кривою совпадают с O'. Для этой прямой должны быть равны нулю оба корня уравнения (8); а для этого должно быть

$$P = 0, \quad N = 0.$$

Первое из этих условий, как мы уже видели, выражает, что точка прикосновения O' лежит на кривой. Заменяя во втором N его выражением (7), имеем

$$m F'_{x'} + n F'_{y'} = 0$$

Это условие содержит в коэффициентах m и n угол φ, определяющий направление искомой касательной (§ 33) и следовательно, определяет направление касательной. Деля все урав

нение на m и заменяя, согласно формуле (14) § 51, отношение $\frac{n}{m}$ через k, угловой коэффициент искомой прямой, мы найдем, что угловой коэффициент касательной определяется из уравнения первой степени

$$F'_{x'} + k F'_{y'} = 0 \tag{17}$$

Координаты x', y', входящие в это уравнение, суть координаты данной точки прикосновения O'. Так как уравнение (17) первой степени относительно k, то отсюда следует, что в каждой точке кривая 2-го порядка имеет, вообще, одну касательную прямую.

Составим уравнение касательной. Мы знаем (§ 56), что уравнение пучка прямых, проходящих через точку (x', y'), имеет вид

$$y - y' = k(x - x')$$

Подставляя сюда вместо k его значение из (17),

$$-y' = -\frac{F'x'}{F'_{y'}}(x - x'),$$

или

$$(x - x') F'_{x'} + (y - y') F'_{y'} = 0 \tag{18}$$

Таково уравнение касательной в декартовых координатах Раскрыв в уравнении (18) скобки и введя вместо декартовых координат x, y и x', y' однородные x, y, t и x', y', t', получаем

$$(xF'_{x'} + y F'_{y'})\, t' - (x' F'_{x'} + y' F'_{y'})_t = 0 \tag{19}$$

Воспользуемся тождеством Эйлера (§ 75)

$$2F = x F_x + y F_y + t F_t.$$

Подставив в это тождество x', y', t' вместо x, y, t, получим

$$2F' = x' F'_{x'} + y' F'_{y'} + t' F'_{t'}.$$

Но $2F' = 0$, так как точка (x', y', t') лежит на кривой, следовательно

$$x' F'_x + y' F'_y + t' F'_t = 0$$

Умножив это равенство на t и складывая его с уравнением (19), получим по сокращении на t' уравнение в однородных координатах для касательной к кривой 2-го порядка $2F = 0$:

$$xF'_{x'} + yF'_{y'} + tF'_{t'} = 0 \qquad (20)$$

Найдем, например, касательную к кривой

$$x^2 - 6xy + 3y^2 + 4x + 2y - 9 = 0$$

в точке (1, 2). Подстановка показывает, что координаты 1, 2 удовлетворяют данному уравнению; следовательно, данная точка лежит на кривой. Приводя уравнение к однородным координатам, имеем

$$2F = x^2 - 6xy + 3y^2 + 4xt + 2yt - 9t^2,$$

$$F_x = x - 3y + 2t,$$

$$F_y = -3x + 3y + t,$$

$$F_t = 2x + y - 9t$$

Подставляя сюда вместо x, y, t координаты точки прикосновения $x' = 1$, $y' = 2$, $t' = 1$, находим

$$F'_{x'} = -3, \quad F'_{y'} = 4, \quad F'_{t'} = -5$$

Внося эти значения в (20), получим уравнение искомой касательной в однородных координатах

$$-3x + 4y - 5t = 0$$

или в декартовых координатах

$$-3x + 4y - 5 = 0.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением данной кривой, можно убедиться, что, действительно, обе точки пересечения найденной прямой с кривою сливаются в одной точке (1, 2).

Так как обыкновенно ищут уравнение касательной в декартовых координатах, а не в однородных, то при вычислениях не писать координат t и t', а прямо заменять их

81. Условие прикосновения прямой к кривой 2-го порядка. Найдем условие, при котором прямая

$$Ax + By + C = 0$$

касается данной кривой 2-го порядка $2F = 0$. Если прямая касается кривой в точке (x', y'), то ее уравнение должно быть тождественно с уравнением (20) касательной к кривой в этой точке. Поэтому коэффициенты в уравнении данной прямой должны быть пропорциональны коэффициентам в уравнении касательной. Отсюда имеем условия

$$F'_{x'} = \lambda A, \quad F'_{y'} = \lambda B, \quad F'_{t'} = \lambda C,$$

где λ—коэффициент пропорциональности. Кроме того, точка (x', y') должна лежать на данной прямой, так как она есть точка прикосновения; отсюда получаем четвертое условие

$$Ax' + By' + Ct' = 0.$$

Напишем все четыре условия в раскрытом виде

$$\begin{aligned} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}t' - \lambda A &= 0, \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}t' - \lambda B &= 0, \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}t' - \lambda C &= 0, \\ Ax' + By' + Ct' &= 0. \end{aligned}$$

В этих уравнениях все коэффициенты известны, так как кривая 2-го порядка и прямая даны; неизвестными здесь являются координаты точки прикосновения и множитель λ. Для четырех неизвестных x', y', t' и $-\lambda$ мы имеем четыре однородных уравнения, и эти уравнения будут совместимы, если будет выполнено условие:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Такая зависимость должна существовать между коэффициентами уравнений кривой и прямой, если прямая касается кривой

уравнение прямой дано в виде

$$ux + vy + 1 = 0,$$

то u и v будут ее тангенциальными координатами (§ 67). уравнение (21) примет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ u & v & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (22)$$

Так как этому уравнению удовлетворяют тангенциальные координаты u, v всех прямых, касающихся кривой $2F = 0$, то оно не что иное, как уравнение этой кривой в тангенциальных координатах (§ 67). Разлагая детерминант, стоящий в левой части уравнения, по элементам последнего столбца и последней строки, мы видим, что полученное уравнение—второй степени относительно координат u, v, откуда следует, что кривыя 2-го порядка суть вместе с тем и кривыя 2-го класса. Обозначая через A_{ik} минор детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

соответствующий элементу a_{ik}, мы найдем, что уравнение кривой $2F = 0$ в тангенциальных координатах есть

$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0. \qquad (23)$$

82. Условие распадения кривой 2-го порядка на две прямых. Посмотрим, при каких условиях уравнение 2-ой степени изображает линию 2-го порядка, распадающуюся на две прямых. Пусть дано уравнение кривой $2F = 0$. Предположим сначала, что эта кривая распадается на две пересекающихся прямых; случай распадения кривой 2-го порядка на две параллельных прямых мы рассмотрим ниже (§ 83). Перенесем начало координат в точку O' пересечения прямых и преобразуем декартовы координаты в полярные. Тогда уравнение кривой 2-го порядка примет вид (§ 77)

$$M\varrho^2 + 2N\varrho + P = 0.$$

Легко видет, что по какому бы направлению мы ни провели радиус-вектор через O', он всегда встретит в O' обе пря-

мыя; следовательно, в случае распадения мы имеем при всяком направлении радиуса-вектора

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 0.$$

Когда прямая касалась кривой, мы также имели $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$; но случай распадения существенно разнится от случая касания. В самом деле, в первом случае центр пучка O' лежал на кривой (черт. 59, стр. 141), и один радиус-вектор был равен нулю при всяком положении секущей, тогда как второй радиус-вектор был равен нулю только в том случае, когда секущая обращалась в касательную; здесь же каждый радиус-вектор, выходящий из O', встречает распадающуюся кривую 2-го порядка в двух сливающихся точках и потому здесь оба радиуса-вектора равны нулю при всяком направлении секущей прямой.

Мы знаем (§ 80), что оба корня уравнения (8) обращаются в нуль, если одновременно

$$2F' = 0,\ mF'_{x'} + nF'_{y'} = 0$$

В случае касания второе условие давало угловой коэффициент k, т.-е. направление, которое должен иметь луч пучка при O', чтобы встретить кривую в двух сливающихся точках; напротив, в случае распадения кривой на две прямых, радиус-вектор должен равняться нулю при всяких значениях m и n, так как всякая прямая, выходящая из O', встречает кривую оба раза в O'; поэтому здесь второе условие должно удовлетворяться тождественно. Полагая в соотношении

$$mF'_{x'} + nF'_{y'} = 0,$$

$n = 0$, получим

$$F'_{x'} = 0,$$

а полагая $m = 0$ получим

$$F'_{y'} = 0.$$

Таким образом второе условие распадается здесь на два отдельных условия. Третье условие, как было сказано выше, есть

$$2F' = 0.$$

Таким образом если кривая $2F = 0$ распадается на две прямых, то координаты x', y' точки пересечения

этих прямых должны удовлетворять системе трех уравнений из которых два первой степени, а третье второй степени. Впрочем, это последнее уравнение может быть также заменено уравнением первой степени. Действительно, на основании теоремы Эйлера, его можно представить в виде

$$x'F'_{x'} + y'F'_{y'} + t'F'_{t'} = 0$$

а так как, с другой стороны, мы имеем

$$F'_{x'} = 0,\ F'_{y'} = 0,$$

то оно приводится к

$$t'F'_{t'} = 0$$

По предположению, точка O' не лежит в бесконечности; поэтому t' не равно нулю, и уравнение $2F = 0$ можно заменить следующим:

$$F'_{t'} = 0$$

Таким образом,

$$F'_{x'} = 0,\ F'_{y'} = 0,\ F'_{t'} = 0 \tag{24}$$

Этим условиям нужно удовлетворить, чтобы кривая $2F = 0$ распадалась на две прямых. Представим их в раскрытой форме:

$$\begin{aligned} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}t' &= 0, \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}t' &= 0, \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}t' &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь x', y'—координаты точки пересечения тех двух прямых, на которые распадается наша кривая второго порядка Мы имеем три однородных уравнения с тремя неизвестными; чтобы они были совместимы, необходимо, чтобы детерминант системы был равен нулю. Поэтому условие распадения кривой второго порядка на две прямых есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Это условие необходимо для распадения кривой; но оно и достаточно. В самом деле, если удовлетворено условие (25), то уравнения (24) совместимы и можно найти такую точку, ординаты которой x', y', t' удовлетворяют этим уравнениям. Если же удовлетворяются уравнения (24), то мы имеем $P=0$, $N=0$ и, следовательно, оба корня уравнения (8) равны нулю при всяких значениях m и n, т.-е. кривая, действительно, распадается на две прямых.

Детерминант, стоящий в левой части равенства (25), имеет большое значение в теории кривых 2-го порядка; он называется дискриминантом кривой 2-го порядка (см. § 81). Мы будем обозначать его символом Δ. Минор дискриминанта Δ, соответствующий элементу a_{ik}, мы будем обозначать через A_{ik}. Легко видеть, что дискриминант старших членов (§ 78) есть не что иное, как минор дискриминанта Δ, соответствующий a_{33}, т.-е. минор A_{33}

Если условие (25) удовлетворено и кривая второго порядка распадается на пару прямых, то точка пересечения этих прямых найдется из решения уравнений (24) Что касается направлений тих прямых, то они найдутся из уравнения (11) § 78,

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

которым определялись направления бесконечно-удаленных точек кривой второго порядка. В самом деле, если кривая второго порядка распадается на пару прямых, то бесконечно-удаленные точки кривой обращаются в бесконечно-удаленные точки прямых, и таким образом уравнение, определявшее раньше направления бесконечно-удаленных точек кривой, даст теперь направления тех двух прямых, на которые распадается кривая второго порядка.

Рассмотрим, например, кривую

$$2x^2 + xy - 3y^2 - 3x - 7y - 2 = 0$$

Здесь

$$a_{12} = \frac{1}{2}\ a_{22} = -\ 3,$$

Составляя условие (25), находим тождественно

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \end{matrix} = 0,$$

т.-е. условие (25) удовлетворено; следовательно, кривая распадается на пару прямых, и для определения той точки (x', y'), в которой эти прямые пересекаются, остается решить совместно два из уравнений (24). Взяв два первых уравнения и положив в них $t' = 1$, найдем

$$2x' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2} = 0,$$

$$\frac{1}{2}x' - 3y' - \frac{7}{2} = 0,$$

откуда получим $x' = 1$, $y' = -1$. Таким образом, прямые пересекаются в точке $(1, -1)$.

Чтобы найти уравнения этих прямых, составляем уравнение (11); в нашем случае оно будет

$$2 + k - 3k^2 = 0,$$

откуда $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{2}{3}$. Таким образом, угловой коэффициент одной прямой есть 1, а другой $-\frac{2}{3}$. Так как обе прямые проходят через точку $(1, -1)$, то их уравнения будут

$$y + 1 = x - 1, \quad y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 1),$$

или

$$x - y - 2 = 0, \quad 2x + 3y + 1 = 0.$$

Перемножив левые части этих уравнений, мы, действительно, получим левую часть уравнения данной кривой 2-го порядка; отсюда мы убеждаемся, что эта кривая распадается на пару прямых, уравнения которых мы нашли.

83. До сих пор мы предполагали, что кривая 2-го порядка распадается на две пересекающихся прямых. Рассмотрим теперь тот случай, когда эти прямые параллельны. Предположим, что условие (25) выполнено. Тогда уравнения (24) совместны, и если, решая их, мы получим для t' значение нуль, то это будет значить, что те две прямые, на которые распадается данная кривая, имеют точку пересечения в бесконечности, т.-е. что они параллельны между собою. Таким образом, если дискриминант кривой 2-го порядка обращается в нуль, то кривая может распадаться как на две пересекающиеся прямые, так и на две параллельные.

Докажем теперь, обратно, что если кривая распадается на пару параллельных прямых, то дискриминант ее уравнения равен нулю. Так как обе прямые параллельны, то в их уравнениях коэффициенты при текущих координатах могут быть взяты соответственно равными между собою, так что эти уравнения могут быть представлены в виде

$$Ax + By + (C + C') = 0,$$
$$Ax + By + (C - C') = 0$$

Уравнение кривой, распадающейся на эти прямые, будет иметь вид

$$(Ax + By + C)^2 - C'^2 = 0,$$

или

$$A^2x^2 + 2ABxy + B^2y^2 + 2ACx + 2BCy + C^2 - C'^2 = 0$$

Дискриминант этого уравнения есть

$$\begin{matrix} A^2 & AB & AC \\ AB & B^2 & BC \\ AC & BC & C^2 - C'^2 \end{matrix}$$

Он равен нулю, так как в нем элементы двух первых рядов пропорциональны.

Так как здесь дискриминант старших членов в уравнении кривой также равен нулю, то пару параллельных прямых можно рассматривать, как предельный вид параболы (§ 78).

84. Если равен нулю не только дискриминант кривой, но и все его миноры, то кривая 2-го порядка обращается в две сли-

вающиеся прямыя. В самом деле, легко убедиться, что при этом соответствующие коэффициенты в уравнениях (24) пропорциональны и потому все эти три уравнения тождественны между собою. Так как эти уравнения определяют точку O' пересечения тех двух прямых, на которые распадается кривая 2-го порядка, то в этом случае эта точка становится неопределенною, а это значит, что обе прямыя сливаются между собою.

В этом можно убедиться и непосредственно, повторяя рассуждения § 79. Если мы положим

$$a_{11} = \alpha\ ,\ a_{12} = \alpha\beta,\ a_{13} = \alpha\gamma,$$

то из равенства нулю миноров A_{22}, A_{33}, A_{23} найдем

$$a_{22} = \beta\ ,\ a_{33} = \gamma\ ,\ a_{23} = \beta\gamma$$

и отсюда

$$2F = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$$

Так как дискриминант имеет всего девять миноров, из которых шесть попарно равны, то, повидимому, требование, чтобы кривая 2-го порядка распадалась на две сливающиеся прямыя, равносильно 9 — 3, т.-е. шести условиям. Однако, на самом деле число условий меньше, так как все миноры не независимы между собой и обращение в нуль трех из миноров ведет за собою обращение в нуль всех остальных, как это, например, видно из последнего вывода. Чтобы узнать, скольким условия равносильно распадение кривой 2-го порядка на две сливающихся прямых, заметим, что кривая 2-го порядка определяется пятью условиями, а прямая линия —двумя; отсюда видно, что требование, чтобы кривая 2-го порядка обращалась в две сливающихся прямых равносильно трем недостающим условиям

85. Мнимые прямыя. Если кривая второго порядка распадается на пару прямых, то левая часть уравнения кривой разлагается на два множителя первой степени. Это разложение зависит, как мы видели, от решения квадратного уравнения (11) § 78-го

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

и если корни этого уравнения мнимые, то и коэффициенты тех двух линейных множителей, на которые разлагается левая часть уравнения кривой, будут также мнимыми. Приравнивая нулю

каждый из этих множителей, мы получим два уравнения первой степени с мнимыми коэффициентами. Очевидно, что такое уравнение не может изображать прямой линии, так как ему можно удовлетворить не более чем одною парою действительных значений x и y. В самом деле, пусть мы имеем уравнение

$$(A + iA')x + (B + iB')y + (C + iC') = 0,$$

где, как и везде в дальнейшем,

$$i = \sqrt{-1}$$

Предположим, что координаты x и y имеют здесь действительные значения. Известно, что если число, состоящее из действительной и мнимой части, равно нулю, то каждая часть его равна нулю. Отсюда

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

из которых и найдем единственную пару действительных решений для x и y, удовлетворяющую данному уравнению с мнимыми коэффициентами. Хотя таким образом уравнение первой степени с мнимыми коэффициентами и не изображает прямой линии, но в целях обобщения мы будем говорить, что оно также изображает прямую, но прямую м н и м у ю. Разумеется, это выражение не имеет геометрического содержания; его значение чисто формальное. Такое же распадение на два множителя первой степени с мнимыми коэффициентами может произойти в случае, когда уравнение $a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$ имеет равные корни. Пользуясь понятием о мнимой прямой мы можем сказать, что при обращении в нуль дискриминанта уравнения кривой 2-го порядка кривая распадается на пару прямых пересекающихся действительных, пересекающихся мнимых или прямых параллельных (действительных, мнимых или сливающих в зависимости от того, будет ли дискриминант старших членов иметь положительное, отрицательное или нулевое значение. Сопоставляя это заключение с выводами § 78, мы видим, что пара пересекающихся действительных прямых есть предельный вид гипер-

болы, пара мнимых — эллипса и пара параллельных или сливающихся — параболы.

Следует заметить, что будут ли коэффициенты в уравнении прямой

$$Ax + By + C = 0$$

действительными или мнимыми, этому уравнению всегда удовлетворяет бесчисленное множество пар мнимых координат x, y. Действительно, мы всегда можем придать одной из двух координат произвольное мнимое значение, и затем определить другую координату из уравнения данной прямой. Таким образом, каждая прямая, действительная или мнимая, содержит бесчисленное множество мнимых точек (§ 37). Различие между теми и другими прямыми состоит в том, что действительная прямая содержит, кроме того, бесчисленное множество действительных точек, тогда как мнимая прямая содержит только одну действительную точку.

86. Уравнение однородное относительно декартовых координат. Остановимся на том случае, когда уравнение кривой 2-го порядка однородно относительно координат x, y, т. е. когда оно содержит только члены второй степени. В этом случае уравнение имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

Составляя его дискриминант, находим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда видно, что однородное уравнение второй степени представляет пару прямых.

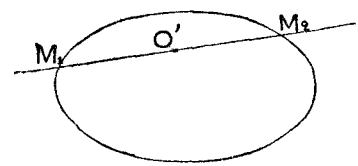
Для определения точки пересечения прямых воспользуемся двумя первыми уравнениями (24), которые в данном случае принимают вид

$$a_{11}x' + a_{12}y' = 0, \quad a_{21}x' + a_{22}y' = 0$$

Отсюда находим $x' = 0$, $y' = 0$. Таким образом, однородное уравнение 2-й степени в декартовых координатах представляет

пару прямых, пересекающихся в начале координат. Эти прямые будут действительными, мнимыми или сливающимися, смотря по тому, будет ли дискриминант старших членов (§ 78) $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ отрицательным, положительным или нулем.

87. Центр кривой 2-го порядка. Рассмотрим кривую 2-го порядка и точку O' в ее плоскости (черт. 60). Найдем уравнение хорды, делящейся в точке O' пополам. Поместим в O, начало полярных координат (§ 77); тогда уравнение кривой будет



Черт. 60.

$$M\rho^2 + 2N\rho + P = 0$$

Так как радиусы-векторы ρ_1, ρ_2 точек M_1, M_2 должны быть по условию равны и противоположны, то мы должны положить $\rho_2 = -\rho_1$. Заметим, что если бы мы положили $\rho_2 = \rho_1$, то это соответствовало бы не хорде, делящейся в точке O' пополам, а касательной к кривой в этой точке, так как только для касательной обе точки пересечения с кривою сливаются и радиусы-векторы их делаются равными не только по величине, но и по знаку

Из условия $\rho_2 = -\rho_1$ имеем $\rho_1 + \rho_2 = 0$, или $-\frac{2N}{M} = 0$.

Отсюда находим $N = 0$,

$$mF'_{x'} + nF'_{y'} = 0 \qquad (26)$$

Заменяя здесь $\frac{n}{m}$ через k (§ 48), получим

$$F'_{x'} + kF'_{y'} = 0 \qquad (27)$$

Такому условию должен удовлетворять угловой коэффициент k хорды, делящейся в точке O' пополам. Так как уравнение (27)—первой степени относительно k, то оно дает для k одно решение. Это показывает, что через каждую точку плоскости проходит одна хорда, делящаяся в ней пополам.

Здесь может возникнуть следующее сомнение. При некоторых положениях точки O', напр. когда O' лежит вне эллипса, через нее, очевидно, нельзя провести хорды, которая делилась

бы в ней пополам, а между тем уравнение (27) дает для k решение во всяком случае. Для разъяснения этого сомнения заметим, что прямая с угловым коэффициентом, определяемым уравнением (27), может и не встретить кривой. Тогда координаты точек пересечения будут мнимыми, но среднее ариометическое из них будет, тем не менее, действительным числом. Таким образом, хотя в пересечении кривой второго порядка с внешнею прямою и получается хорда с мнимыми концами, но средина этой хорды всегда действительна, если только уравнение прямой имеет действительные коэффициенты. Поэтому если в плоскости кривой 2-го порядка дана какая-нибудь точка, то мы всегда можем выбрать секущую прямую так, чтобы средина лежащей на ней хорды помещалась в той точке

Заметим, что если бы точка O' была дана на самой кривой, то предыдущая формула совпала бы с формулою (17) § 80, которая определяла направление касательной в этой точке; действительно, так как касательная в точке O' встречает кривую в двух точках, сливающихся с O', то ясно, что и средина получающейся при этом бесконечно малой хорды также лежит в точке O'.

Будем теперь искать такую точку, в которой хорда всякого направления делится пополам. Если O' будет такою точкою, то уравнение (26), определяющее направление хорды, делящейся в O' пополам, должно удовлетворяться при всяком значении отношения $\frac{n}{m}$, т.-е. должно обращаться в тождество; а для этого коэффициенты при m и n должны отдельно обратиться в нуль (ср. § 82):

$$F'_{x'} = 0, \; F'_{y'} = 0 \tag{28}$$

Эти уравнения представляют те условия, которым должны удовлетворять координаты x', y' для того, чтобы всякая хорда, проходящая через точку (x', y'), делилась в ней пополам. Точка эта называется **центром** кривой 2-го порядка.

Чтобы найти координаты центра, решим уравнения

$$F_x = 0, \text{ и } F_y = 0,$$

где x, y обозначают координаты центра. Представив эти уравнения в раскрытой форме

$$a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23} = 0,$$

и решив их, мы получим для координат центра следующие выражения:

$$\bar{x} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \quad \bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{33} & a_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{A_{32}}{A_{33}} \tag{29}$$

Знаменатель обоих выражений есть дискриминант старших членов уравнения кривой. Из этого следует, что координаты центра суть конечные величины для эллипса и гиперболы и бесконечно большие для параболы. Таким образом, центр эллипса и центр гиперболы лежат в конечной части плоскости, а центр параболы — в бесконечности. Поэтому эллипс и гипербола называются также центральными кривыми 2-го порядка.

Так как координаты центра определяются из системы двух уравнений первой степени, то каждая кривая 2-го порядка имеет, вообще, один центр. Центр будет неопределенным, если оба уравнения (28), определяющие координаты центра, равносильны, т.-е. если их коэффициенты пропорциональны:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

В этом случае каждая точка прямой, изображаемой уравнениями (28), есть центр кривой.

Посмотрим, когда это будет. Из написанных условий видно, что элементы двух первых строк дискриминанта

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

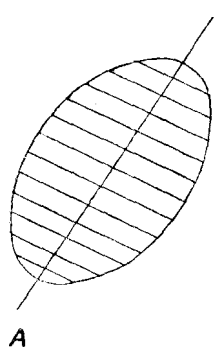
пропорциональны между собой, и, следовательно, дискриминант равен нулю; поэтому кривая распадается на пару прямых (§ 82). Так как, кроме того, в нашем случае имеем

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

то прямыя, на которые распадается кривая, параллельны между собою. Таким образом, центр кривой 2-го порядка делается неопределенным, если кривая обращается в пару параллельных или сливающихся прямых. В самом деле, если мы имеем пару параллельных прямых, то всякая точка, лежащая на прямой, проходящей на равном расстоянии между ними, делит пополам хорды любого направления, и следовательно является центром линии 2-го порядка, состоящей из этой пары параллельных прямых.

88. Диаметры кривой 2-го порядка. Рассмотрим в кривой 2-го порядка систему параллельных хорд (черт. 61). Найдем геометрическое место средин этих хорд; это геометрическое место называется диаметром кривой 2-го порядка, сопряженным хордам данного направления.

Составим уравнение диаметра, т.-е. найдем, где лежат точки, в которых хорды с данным угловым коэффициентом k делятся пополам. В § 87 мы вывели зависимость между координатами x', y' точки и угловым коэффициентом хорды, делящейся в этой точке пополам; но тогда как там была дана точка (x', y') и требовалось найти угловой коэффициент k хорды, делящейся в этой точке пополам, — теперь, наоборот, k дано, а x' и y' неизвестны. Отсюда следует, что решение нашей задачи приводится к тому же уравнению (27), которое мы имели ранее, с тою разницею, что теперь k здесь является данным, а x', y' — неизвестными. Заменив в (27) x', y' обычным обозначением текущих координат x, y, мы получим уравнение диаметра AB, делящего пополам хорды с коэффициентом k, в виде



Черт. 61.

$$F_x + kF_y = 0, \qquad (30)$$

в раскрытой форме

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0 \qquad (30)$$

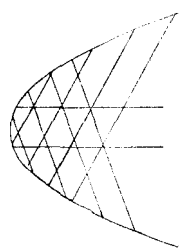
Собирая вместе подобные члены, мы можем представить это уравнение в виде

$$(a_{11} + ka_{12})x + (a_{21} + ka_{22})y + (a_{31} + ka_{32}) = 0 \qquad (31)$$

Это уравнение первой степени относительно текущих координат x, y; следовательно, диаметр кривой есть прямая линия. Давая k разные значения, мы будем получать разные прямые; таким образом, каждому значению углового коэффициента k хорд соответствует свой диаметр, сопряженный этим хордам. Мы знаем (§ 44), что уравнение вида $F - kG = 0$, где F и G многочлены первой степени относительно x и y, представляет пучок прямых, проходящих через точку пересечения основных прямых $F = 0$ и $G = 0$. Уравнение (30) имеет именно такой вид; отсюда следует, что диаметры образуют пучок лучей, проходящих через точку пересечения прямых

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0. \end{aligned} \qquad (32)$$

Но это те же уравнения (28), которым удовлетворяют координаты центра кривой 2-го порядка. Следовательно, точка пересечения диаметров есть центр кривой, и все диаметры кривой 2-го порядка проходят через ее центр. Это можно обнаружить и геометрически. В самом деле, в центре делятся пополам хорды всякого направления; следовательно, хорда данного направления k ходящая через центр, делится в нем пополам; а так как диаметр, сопряженный хордам данного направления k, проходит через середины всех тих хорд, то он пройдет и через центр кривой.



Черт. 62.

Так как центр параболы находится в бесконечности, то следует, что все диаметры параболы параллельны между собою (черт. 62).

Посмотрим, какой смысл имеют два уравнения (32), определяющие координаты центра. Первое из них получится, если положим в уравнении (30) $k = 0$. Поэтому уравнение

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

представляет диаметр, сопряженный тем хордам, угловой коэффициент которых равен нулю; но хорды с угловым коэффициентом $k = 0$ параллельны оси X (§ 52); следовательно, предыдущее уравнение представляет диаметр, сопряженный хордам, параллельным оси X. Таким же образом убеждаемся, что уравнение

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

представляет диаметр, сопряженный хордам с коэффициентом $k = \infty$, т.-е. параллельным оси Y. Отсюда следует, что определяя центр из уравнений (28) или (32), мы определяем его, как точку пересечения диаметров, сопряженных осям координат.

89. Сопряженные направления. Найдем зависимость между направлением хорд и направлением сопряженного им диаметра. Представив уравнение диаметра, сопряженного хордам с коэффициентом k, в виде (31) и решив его относительно y, мы получим следующее выражение для углового коэффициента k' этого диаметра:

$$k' = -\frac{a_{11} + ka_{12}}{a_{21} + ka_{22}} \tag{33}$$

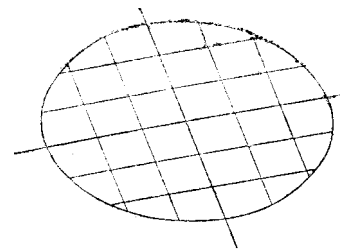
Освободив это уравнение от знаменателя и перенеся все члены в первую часть, находим

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0 \tag{34}$$

Это уравнение устанавливает зависимость между угловым коэффициентом хорд и коэффициентом сопряженного им диаметра. Оно позволяет, зная один из этих коэффициентов, вычислить другой.

Уравнение (34) обладает весьма важным свойством: оно не меняет своего вида, если мы везде поставим k на место k' и k' на место k; иначе говоря, это уравнение - симметричное относительно k и k'. Отсюда следует, что если угловой коэффициент

хорд есть k и угловой коэффициент диаметра есть k', то, обратно, при угловом коэффициенте хорд, равном k', угловой коэффициент диаметра будет k; другими словами, если диаметр, параллельный хордам направления k, делит пополам хорды направления k', то, обратно, диаметр, параллельный хордам направления k', делит пополам хорды направления k (черт. 63). Направление хорд и направление сопряженного им диаметра называются направлениями сопряженными относительно данной кривой 2-го порядка. Из предыдущего следует, что сопряженность двух направлений есть свойство взаимное.



Черт. 63.

Два диаметра, из которых каждый делит пополам хорды параллельные другому, называются сопряженными диаметрами. Очевидно, что сопряженность двух диаметров есть свойство взаимное, т.-е. если первый диаметр сопряжен второму, то и второй сопряжен первому. Сопряженные диаметры существуют только у центральных кривых—эллипса и гиперболы; парабола не имеет сопряженных диаметров, так как все ее диаметры параллельны между собою.

Легко найти то направление, которое имеют все диаметры параболы. В случае параболы мы имеем (§ 79)

$$a_{11} = \alpha^2,\ a_{12} = \alpha\beta,\ a_{22} = \beta^2$$

Внося эти выражения в равенство (33), находим

$$k' = -\frac{\alpha^2 + k\alpha\beta}{\alpha\beta + k\beta^2} = -\frac{\alpha(\alpha + k\beta)}{\beta(\alpha + k\beta)},$$

или, по сокращении на $\alpha + k\beta$,

$$k' = -\frac{\alpha}{\beta} \qquad (35)$$

Отсюда видно, что у параболы угловой коэффициент диаметра k' не зависит от коэффициента k сопряженных ему хорд. Это доказывает еще раз (§ 88), что все диаметры параболы параллельны между собою.

Исключение представляет только тот случай, когда $\alpha+k\beta=0$, или $k=-\frac{\alpha}{\beta}$. В этом случае нельзя сократить выражение для k' на $\alpha+k\beta$, и мы имеем

$$k'=\frac{0}{0},$$

т.-е. диаметр, сопряженный хордам направления $k=-\frac{\alpha}{\beta}$, имеет неопределенное направление.

Легко показать, что в этом случае диаметр обращается в бесконечно-удаленную прямую, почему он и имеет неопределенное направление (§ 53). Полагая в уравнении диаметра (31)

$$a_{11}=\alpha^2,\ a_{12}=\alpha\beta,\ a_{22}=\beta^2,$$

мы найдем, что при $k=-\frac{\alpha}{\beta}$ оно обращается в $a_{31}+\frac{\alpha}{\beta}a_{32}=0$ или в $1=0$, т.-е. представляет бесконечно-удаленную прямую.

Таким образом в параболе произвольному направлению хорд соответствует одно и то же направление сопряженного диаметра; но хордам этого последнего направления соответствует произвольное направление сопряженного диаметра. Отсюда видно, что, в известном смысле, и парабола, подобно эллипсу и гиперболе, имеет сопряженные диаметры; но тогда как в эллипсе и в гиперболе у каждого диаметра есть свой особый сопряженный диаметр, в параболе все диаметры сопряжены одному и тому же диаметру—бесконечно-удаленной прямой.

Так как выражение (35) для углового коэффициента диаметров параболы тождественно с выражением (16) § 79 для углового коэффициента бесконечно-удаленной точки параболы, то это показывает, что все диаметры параболы проходят через ее бесконечно-удаленную точку. Таким образом бесконечно-удаленная точка параболы есть вместе с тем и ее центр.

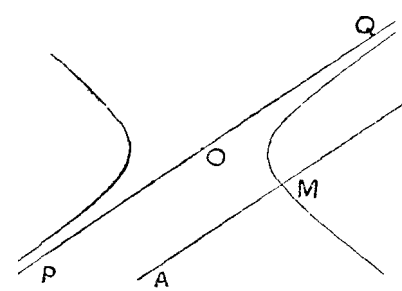
90. Асимптоты. Посмотрим, не существует ли таких хорд, которые были бы параллельны сопряженному им диаметру, иначе, не существует ли диаметра, совпадающего с диаметром, ему сопряженным. Для решения этой задачи обратимся к уравнению (34), связывающему угловые коэффициенты двух сопряженных диаметров. Так как в нашем случае k и k' должны быть равны между собою, то уравнение (34) дает

$$a_{11}+2a_{12}k+a_{22}k^2=0 \qquad (36)$$

Из этого уравнения определяется угловой коэффициент диаметра, сопряженного с самим собою. Диаметр кривой 2-го порядка, сопряженный с самим собою, называется **асимптотою** кривой.

Уравнение (36), определяющее направление асимптот, тождественно с уравнением (11) § 78, определяющим направление бесконечно-удаленных точек кривой 2-го порядка. Поэтому для центральных кривых,—эллипса и гиперболы,—асимптота может быть так же определена, как диаметр, направленный в бесконечно-удаленную точку кривой 2-го порядка. Для параболы это последнее определение неприменимо, так как все диаметры параболы встречают ее в бесконечно-удаленной точке.

Как видно из предыдущего, направление бесконечно-удаленной точки центральной кривой 2-го порядка есть направление само себе сопряженное, т.-е. диаметр, параллельный этому направлению, делит пополам хорды, параллельные ему самому. Чтобы объяснить это парадоксальное свойство асимптот, проведем в гиперболе (черт. 64) хорду AB так, чтобы она встретила кривую в одной из ее бесконечно-удаленных точек, т.-е. проведем ее по одному из двух направлений, определяемых из уравнения (36). Диаметр, сопряженный этому направлению, разделит нашу хорду пополам; но так как один из концов этой хорды M лежит на конечном расстоянии, а другой бесконечно-удален, то эта хорда имеет бесконечно-большую длину; поэтому половина ее также имеет бесконечно-большую длину, и средина хорды лежит также в бесконечности; следовательно, диаметр PQ, сопряженный этой хорде, должен встретить ее в бесконечности, т.-е. быть ей параллельным.



Черт. 64.

Так как кривая 2-го порядка имеет две бесконечно-удаленных точки, то она имеет и две асимптоты. Однако, действительные асимптоты имеет только гипербола; у эллипса асимптоты мнимы, а у параболы обе асимптоты обращаются в бесконечно-удаленную прямую, так как эта прямая есть единственный параболы, сопряженный всем остальным (§ 89).

91. Главные оси кривой 2-го порядка. Угол между диаметром кривой 2-го порядка и сопряженными ему хордами, вообще, изменяется с изменением направления диаметра; так, например мы видели, что для асимптоты он равен нулю. Найдем те диаметры кривой 2-го порядка, которые перпендикулярны к сопряженным им хордам. Такой диаметр называется главною осью, или просто осью кривой, — так что ось кривой 2-го порядка есть диаметр, перпендикулярный к сопряженным ему хордам. Направление оси кривой называется главным направлением относительно этой кривой. Так как для центральных кривых диаметр, перпендикулярный к сопряженным ему хордам, перпендикулярен также и к сопряженному с ним диаметру, то мы можем сказать, что оси центральной кривой 2-го порядка суть ее взаимно перпендикулярные сопряженные диаметры.

Предположим, что кривая 2-го порядка отнесена к прямоугольным осям координат и найдем при этом предположении угловые коэффициенты ее осей. Мы знаем (§ 89), что угловые коэффициенты хорд и сопряженного им диаметра связаны соотношением:

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0. \tag{34}$$

Условие перпендикулярности диаметра к хордам, в случае прямоугольных координат, есть (§ 54)

$$1 + kk' = 0. \tag{37}$$

Решив эти два уравнения, мы найдем угловые коэффициенты k, k' главных осей.

Подставив значение kk' из второго уравнения в первое, получим

$$a_{11} + a_{12}(k + k') - a_{22} = 0,$$

откуда

$$k + k' = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}}$$

Таким образом, мы знаем сумму $k + k'$ и произведение kk' угловых коэффициентов главной оси и сопряженных ей хорд

и можем составить квадратное уравнение, корнями которого служат эти угловые коэффициенты. Уравнение это есть

$$k^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} k - 1 = 0,$$

или

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0. \qquad (38)$$

Это уравнение определяет угловой коэффициент главного направления. Оно второй степени и, следовательно, имеет два решения; поэтому у всякой кривой 2-го порядка есть два главных направления. Эти направления всегда действительны и различны, так как, решая уравнение (38), мы получим

$$k = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}}}{2a_{12}}$$

где подкоренное выражение, как сумма квадратов, существенно положительно. Так как произведение корней уравнения (38) равно — 1, то для всякой кривой 2-го порядка оба главных направления взаимно перпендикулярны.

Так как диаметры центральной кривой могут иметь всевозможные направления, то из предыдущего следует, что каждая центральная кривая имеет две главных оси, перпендикулярных между собою. У параболы все диаметры, кроме бесконечно-удаленной прямой, параллельны между собою (§ 88); а так как главные оси должны быть между собою перпендикулярны, то одною из осей может быть только бесконечно-удаленная прямая. Таким образом, парабола имеет, собственно, только одну ось, которая и называется главною осью параболы; другая ось параболы есть бесконечно-удаленная прямая. Тем не менее, парабола, так же, как эллипс и гипербола, имеет два главных направления, определяемых из уравнения (38); одно из них есть направление оси параболы, а другое—направление хорд, перпендикулярных к оси.

Из уравнения (38) имеем

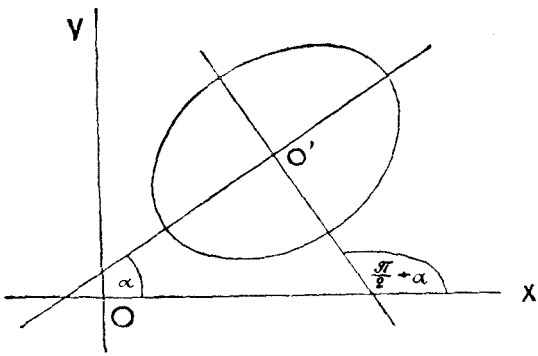
$$\frac{2k}{1 - k^2} = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

как кривая отнесена к прямоугольным координатам,

то, обозначая через φ угол между одним из двух главных направлений кривой и осью X, будем иметь $k = \operatorname{tg}\varphi$, и потому предыдущее равенство примет вид

$$\operatorname{tg} 2\varphi + \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

Нетрудно видеть, что эта формула дает оба главные направления. Действительно, каждому значению $\operatorname{tg} 2\varphi$ соответствуют в первой окружности два значения угла 2φ, отличающихся между собою на π. Поэтому, если мы обозначим через 2α одно из двух значений угла 2φ, получающихся из последнего уравнения, то другое значение этого угла будет $2\alpha + \pi$, и, следовательно, угол φ будет равен или α, или $\alpha + \frac{\pi}{2}$ (черт. 65).



Черт. 65.

Предыдущие рассуждения теряют силу, если мы имеем

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0. \tag{40}$$

В этом случае уравнение (38) обращается в тождество, и угловой коэффициент главной оси становится неопределенным, т.-е. всякий диаметр будет здесь осью кривой. Неопределенное решение получается в этом случае потому, что уравнения (34) и (37), определяющие угловые коэффициенты главных осей, становятся здесь тождественными между собою; ниже (§ 103) мы увидим, что при условиях (40) уравнение второй степени представляет окружность. В самом деле, очевидно, что в окружности каждый диаметр есть ось кривой, так как каждый диаметр окружности перпендикуляреп к тем хордам, которые он делит пополам.

В случае косоугольных осей координат, задача об изыскании главных осей кривой 2-го порядка решается так же, как

для прямоугольных осей. Все различие состоит в том, что (37), выражающее, что главное направление перпендикулярно к своему сопряженному, заменяется здесь следующим (§ 55)

$$1 + (k + k')\cos\omega + kk' = 0.$$

Вследствие этого уравнение (38) переходит в уравнение

$$(a_{12} - a_{22}\cos\omega)\,k^2 + (a_{11} - a_{22})\,k - (a_{12} - a_{11}\cos\omega) = 0, \quad (41)$$

из которого и определяются угловые коэффициенты главных осей.

В виде примера, найдем главные оси кривой

$$6xy + 8y^2 - 6x - 10y - 9 = 0,$$

отнесенной к прямоугольным осям координат.

Уравнение пучка диаметров этой кривой есть (§ 88)

$$(3y - 3) + k\,(3x + 8y - 5) = 0. \quad (30)$$

Угловые коэффициенты главных осей определяются из уравнения (38)

$$3k^2 - 8k - 3 = 0,$$

откуда

$$k_1 = 3, \quad k_2 = -\frac{1}{3}$$

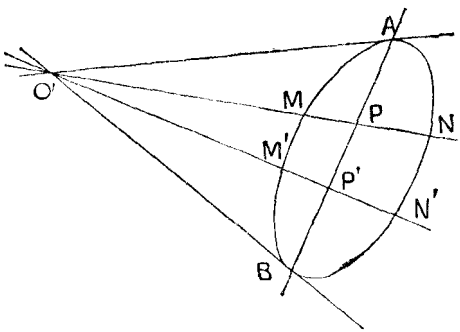
Давая в уравнении (30′) параметру k найденные значения мы получим уравнения главных осей

$$x + 3y - 2 = 0, \quad 3x - y + 4 = 0.$$

Заметим, что угловой коэффициент первой оси, соответствующей $k = 3$, равен $-\frac{1}{3}$, а коэффициент второй оси, соответствующей $k = -\frac{1}{3}$, равен 3. Это происходит оттого, что в уравнении (30′) k есть угловой коэффициент не диаметра, а сопряженных ему хорд. Вследствие этого хордам с коэфф 3 сопряжен перпендикулярный им диаметр с коэффи-

циентом $-\frac{1}{3}$, и обратно, хордам с коэффициентом $-\frac{1}{3}$ сопряжен диаметр с коэффициентом 3.

92. Полюсы и поляры. Восьмем в плоскости кривой 2-го порядка точку $O'(x', y')$ (черт. 66). Будем проводить из O' к кривой всевозможные секущие; каждая из них встретит кривую в двух точках. Определим на каждой секущей точку P, четвертую гармоническую к O' относительно точек M, N пересечения секущей с кривою. Геометрическое место таких четвертых гармонических точек P, построенных на всех секущих, выходящих из O', называется полярою точки O'. По отношению к своей поляре точка O' называется полюсом.



Черт. 66.

Таким образом, поляра точки относительно данной кривой 2-го порядка есть геометрическое место четвертых гармонических к полюсу относительно точек этой кривой.

Выведем уравнение поляры. Примем точку O' за начало полярных координат; тогда уравнение кривой примет вид (§ 77)

$$M\varrho^2 + 2N\varrho + P = 0, \qquad (8)$$

причем корни этого уравнения ϱ_1 и ϱ_2 суть расстояния точки O' от точек M, N кривой. Известно (§ 12), что четыре точки называются гармоническими, если одна из них, лежащая внутри отрезка между третьею и четвертою точками, делит этот отрезок в таком же отношении, в каком и другая, лежащая вне его. Если мы будем рассматривать ряд точек, лежащих на прямой $O'N$, то отрезок $O'M$ будет представлять радиус-вектор точки M, а отрезок $O'N$—радиус-вектор точки N; мы можем положить

$$O'M = \varrho_1, \quad O'N = \varrho_2$$

Обозначим радиус-вектор $O'P$ точки P через ρ; тогда

$$MP = O'P - O'M = \rho - \rho_1$$
$$PN = O'N - O'P = \rho_2 - \rho.$$

Так как точки P, O' делят отрезок MN гармонически, то

$$\frac{O'M}{O'N} = -\frac{PM}{PN} = \frac{MP}{PN}.$$

Вставив в эту пропорцию вместо MP, PN, $O'M$, $O'N$ их выражения, получим

$$\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

и отсюда

$$\rho = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

Но ρ_1 и ρ_2 суть корни уравнения (8); поэтому

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{2N}{M}, \quad \rho_1\rho_2 = \frac{P}{M}$$

Следовательно,

$$\rho = -\frac{P}{M}$$

Заменяя P и N их выражениями (7) из § 77, имеем

$$\rho = -\frac{2F'}{mF'_x + F'_y}$$

Это — уравнение геометрического места точки P в полярных координатах, так как ρ есть радиус-вектор точки P, а в m и n входит угол φ этого радиуса-вектора с полярною осью. Найдем равнение этого геометрического места в декартовых

Освободив предыдущее уравнение от знаменателя

$$m\rho F'_x + n\rho F'_y + 2F' = 0$$

Формулы (9) § 77 дают

$$m\varrho = x - x', \; n\varrho = y - y'.$$

Внесем эти выражения в последнее уравнение и подставим вместо декартовых координат полюса x', y' их выражения $\frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}$ через однородные координаты. При этом $2F'$, как выражение второй степени, получит делителя t'^2, а $F'_{x'}$ и $F'_{y'}$ — делителя t'. Поэтому уравнение поляры примет по умножении на t'^2 вид

$$(xF_{x'} + yF'_{y'})\,t' - x'F'_{x'} - y'F'_{y'} + 2F' = 0.$$

Но по теореме Эйлера имеем (§ 76)

$$2F' = x'\,F'_{x'} + y'F'_{y'} + t'\,F'$$

Поэтому предыдущее уравнение принимает по сокращении на t' вид

$$xF'_{x'} + y\,F'_{y'} + F'_{t'} = 0.$$

или, после замены текущих декартовых координат x, y однородными x, y, t (ср. § 69)

$$xF'_{x'} + yF'_{y'} + tF'_{t'} = 0$$

Таково уравнение поляры точки (x', y') в однородных координатах. Положив в нем $t = t' = 1$, мы получим уравнение поляры в декартовых координатах. Так как уравнение поляры есть уравнение первой степени относительно текущих координат x, y, t, то поляра точки относительно кривой 2-го порядка есть прямая линия.

Уравнение (42) поляры имеет тот же вид, как и уравнение касательной (20) § 80. Отсюда видно, что поляра точки, лежащей на самой кривой, есть касательная к кривой в этой точке.

Докажем, обратно, что поляра проходит через свой полюс только в том случае, когда этот полюс лежит на кривой. Пусть точка (x', y', t') лежит на своей поляре; тогда координаты x', y', t' должны удовлетворять уравнению поляры, и мы имеем тождественно

$$x'\,F_{x'} + y'F'_{y'} + t'\,F'_{t'} = 0$$

Но по теореме Эйлера,

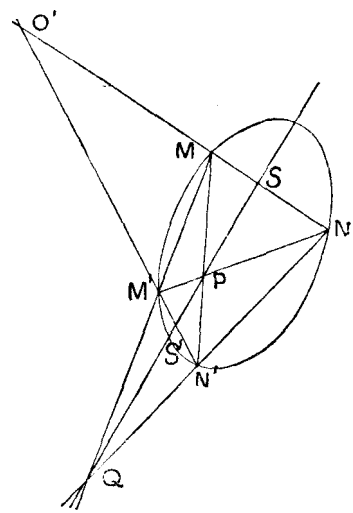
$$x'F'_{x'} + y'F'_{y'} + t'F'_{t'} = 2F';$$

следовательно, предыдущее соотношение дает

$$2F' = 0,$$

т.-е точка (x', y', t') лежит на кривой.

93. Построение поляры. Если нам дана кривая 2 го порядка, то мы можем построить при помощи только одной линейки поляру каждой точки относительно этой кривой. Пусть мы имеем кривую второго порядка и точку O' (черт. 67). Проведем из O' две произвольных секущих; обозначим через M, N, M', N' точки пересечения секущих с кривою. Если P и Q суть точки пересечения пар прямых MN', NM' и MM', NN', то прямая PQ будет полярою точки O'. В самом деле, рассмотрим четыреугольник $PM'QN'$; две его противоположных стороны сходятся в M, две другие в N, и одна диагональ $M'N'$ проходит через O'; следовательно, точка S, в которой другая диагональ PQ встречает прямую MN, есть четвертая гармоническая к O относительно M и N (§ 66). Таким же образом, рассматривая четыреугольник $PMQN$, можно видеть, что точка S' пересечения прямых PQ и $M'N'$ есть четвертая гармоническая к O' относительно M' и N'. Отсюда следует, что прямая SS' или PQ есть поляра точки O'.



Черт. 67.

94. Полярная сопряженность точек и прямых относительно кривой 2-го порядка. Собирая в уравнении (42) члены с одинаковыми коэффициентами, получим

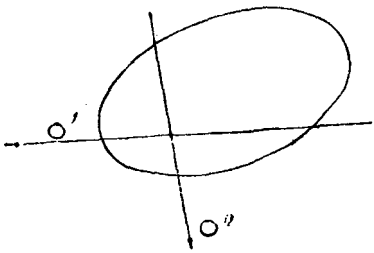
$$a_{11}xx' + a_{12}(xy' + yx') + a_{22}yy' +$$
$$+ a_{13}(xt' + tx') + a_{23}(yt' + ty') + a_{33}tt' = 0.$$

Легко видеть, что это уравнение симметрично относительно текущих координат x, y, t с одной стороны и координат полюса x', y', t' с другой, т.-е. вид этого уравнения не изменится, если x, y, t обменяются местами с x', y', t'. Поэтому уравнение поляры (42) может быть представлено также в виде

$$x'F_x + y'F_y + t'F_t = 0. \qquad (42')$$

Пусть мы имеем две точки O' (x', y', t') и O'' (x'', y'', t'') (черт. 68). Положим, что точка O'' лежит на поляре точки O'. Тогда координаты x'', y'', t'' должны удовлетворять уравнению (42), и мы будем иметь

$$x''F_{x'} + y''F'_{y'} + t''F'_{t'} = 0.$$



Черт. 68.

С другой стороны, составим уравнение поляры точки (x'', y'', t''), представив его в виде (42'):

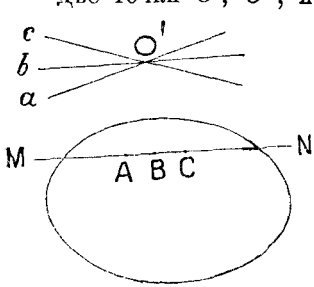
$$x''F_x + y''F_y + t''F_t = 0.$$

Если мы подставим сюда вместо текущих координат x, y, t координаты x', y', t', то получим то самое соотношение, которое выражало, что точка (x'', y'', t'') лежит на поляре точки $(x' y', t')$. Таким образом мы получаем следующее предложение:

Если из двух точек одна лежит на поляре другой, то и другая лежит на поляре первой, или, что то же:

Если из двух прямых одна проходит через полюс другой, то и другая проходит через полюс первой.

Две точки O', O'', имеющие то свойство, что поляра каждой из них относительно данной кривой 2-го порядка проходит через другую точку (черт. 68) называются точками сопряженными относительно этой кривой. Точно также две прямые, из которых каждая проходит через полюс другой относительно кривой 2-го порядка, называются прямыми сопряженными относительно этой кривой. Очевидно, что всякая точка плоскости сопряжена



Черт. 69.

своей поляры, а всякая прямая– всем прямым, проходящим ее полюс.

Рассмотрим кривую 2-го порядка и пучек лучей при точке O' (черт. 69). Так как все лучи пучка проходят через точку O' то, по предыдущему, их полюсы должны лежать на поляре MN этой точки. Отсюда видно, что если прямыя образуют пучек, то их полюсы образуют прямолинейный ряд, расположенный на поляре центра пучка.

Из свойств сопряженных точек и прямых можно вывести начало двойственности (§ 67). Положим, что мы имеем в плоскости кривой 2-го порядка систему точек и прямых. Построим для каждой точки ее поляру и для каждой прямой ее полюс. Мы получим таким образом новую систему точек и прямых, причем каждой точке одной системы будет соответствовать прямая другой системы; кроме того, если в одной системе мы имеем прямую с лежащею на ней точкою, то, по свойству полярной сопряженности, ей будет соответствовать в другой системе точка с проходящею через нее прямою. Отсюда следует, что каждому предложению, касающемуся относительного положения точек и прямых первой системы, будет соответствовать определенное взаимное предложение для второй системы; это предложение получится из первоначального, если мы заменим в нем точки прямыми и прямыя точками.

Метод получения при помощи свойств полюсов и поляр из данного предложения другого, ему взаимного, называется методом взаимных поляр.

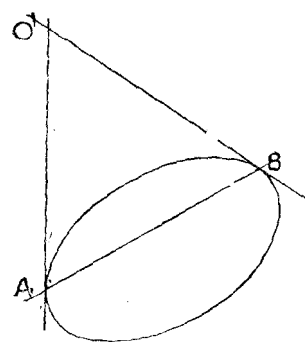
95*. Поляры относительно распадающейся кривой 2-го порядка. Если кривая 2-го порядка распадается на пару прямых, то поляры точек относительно такой кривой обладают особыми свойствами. Обозначим однородные координаты полюса через x', y', t', а координаты точки пересечения тех двух прямых, на которые кривая распадается, через x'', y'', t''. Так как на основании уравнений (24) § 82 мы имеем

$$F''_{x''} = 0, \quad F''_{y''} = 0, \quad F''_{t''} = 0,$$

то из уравнения поляры (42′) следует, что точка (x'', y'', t'') лежит на поляре, каковы бы ни были координаты полюса. Таким образом, если кривая 2-го порядка распадается на пару прямых, то поляры всех точек проходят через точку пересечения этих прямых.

Примем за полюс самую точку пересечения прямых (x'', y'', t'') Тогда в уравнении поляры (42) коэффициенты при текущих координатах x, y, t обратятся в нули, и вместо уравнения мы будем иметь тождество. Это показывает, что поляра самой точки пересечения прямых неопределенна.

96. Хорда прикосновения. Рассмотрим кривую 2-го порядка (черт. 70) и точку $O'(x', y')$ вне ее. Пусть будет $O'A$ касательная из O' к кривой и A ее точка прикосновения. Так как точка A лежит на кривой, то ее полярою будет касательная $O'A$. Отсюда, пользуясь свойствами сопряженных точек, заключаем, что так как точка O' лежит на поляре точки A, то и точка A лежит на поляре точки O'. Таким образом, точка прикосновения каждой из касательных, проведенных из какой-либо точки к кривой 2-го порядка, есть одна из точек пересечения кривой с полярою этой точки. Нетрудно видеть, что это свойство принадлежит каждой точке пересечения поляры с кривою, так что, обратно, касательная, проведенная через любую из точек пересечения прямой с кривой 2-го порядка, проходит через полюс этой прямой.



Черт. 70.

Отсюда легко определить, сколько касательных можно провести к кривой 2-го порядка из данной точки. Этих касательных будет столько, в скольких точках поляра этой точки встречает данную кривую. Так как всякая прямая встречает кривую 2-го порядка в двух точках, то отсюда следует, что из каждой точки плоскости можно провести к кривой 2-го порядка две касательных. Эти касательныя будут действительными, мнимыми или сливающимися, смотря по тому, будет ли поляра той точки, через которую мы проводим касательныя, встречать кривую в двух действительных, в двух мнимых или в двух сливающихся точках.

Из предыдущего видно, что кривыя 2-го порядка суть вместе с тем и кривыя 2-го класса (§ 67). Следует заметить, что равенство порядка и класса не составляет общего свойства всех кривых. Это свойство принадлежит, кроме кривых 2-го порядка, только некоторым частным видам

Те точки плоскости, из которых можно провести к кривой 2-го порядка две действительных касательных, называются точками внешними относительно этой кривой, а те, из которых действительные касательныя невозможны — внутренними. Очевидно, что две сливающихся касательных, или, что то же, одну касательную, можно провести только из точки, взятой на самой кривой, так как только поляры точек кривой суть касательныя к кривой, то-есть, встречают ее в двух сливающихся точках (§ 92). Так как поляра соединяет точки прикосновения касательных, выходящих из полюса, то она называется также хордою прикосновения этих касательных.

97. Полюс прямой. Если мы имеем кривую 2-го порядка, то каждая прямая имеет относительно этой кривой свой полюс, т.-е. всегда есть такая точка, для которой данная прямая служит полярою. Действительно, пусть будут

$$2F = 0, \quad Ax + By + Ct = 0,$$

однородные уравнения кривой 2-го порядка и данной прямой. Если точка O' есть полюс данной прямой, то уравнение поляры

$$xF'_{x'} + yF'_{y'} + tF'_{t'} = 0,$$

тождественно с уравнением данной прямой.

$$\frac{F'_{x'}}{A} = \frac{F'_{y'}}{B} = \frac{F'_{t'}}{C}$$

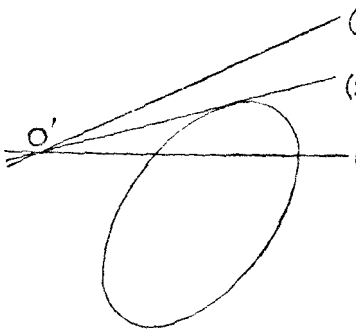
Обозначая общую величину этих отношений через λ и заменяя $F'_{x'}$, $F'_{y'}$, $F'_{t'}$ их выражениями, находим:

$$\begin{aligned} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}t' &= A\lambda, \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}t' &= B\lambda, \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}t' &= C\lambda. \end{aligned} \tag{43}$$

Из этих трех однородных уравнений с четырьмя неизвестными мы найдем отношения как λ, так и однородных координат x', y', t' искомого полюса. Чтобы получить декартовы координаты полюса, достаточно положить в (43) $t' = 1$.

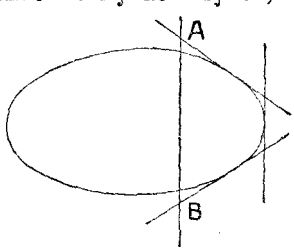
Из свойств сопряженных точек и прямых следует, что для нахождения полюса данной прямой надо найти поляры двух каких-нибудь точек этой прямой; точка пересечения этих поляр будет полюсом данной прямой.

98*. Точки внутренние и точки внешние. Мы знаем, что каждая прямая встречает кривую 2-го порядка в двух точках, действительных, мнимых или сливающихся. Нетрудно видеть, что через каждую точку плоскости проходит бесконечное множество прямых, встречающих данную кривую в двух действительных точках; мы получим все эти прямыя, соединяя данную точку со всеми точками нашей кривой. Если, теперь, взятая нами точка такова, что каждая прямая, проходящая через нее, встречает кривую в двух действительных точках, то говорят, что эта точка лежит внутри кривой. Если же через точку можно провести прямую, не встречающую кривой, или что то же, встречающую ее в двух мнимых точках, то такая точка называется лежащею вне кривой.



Черт. 71.

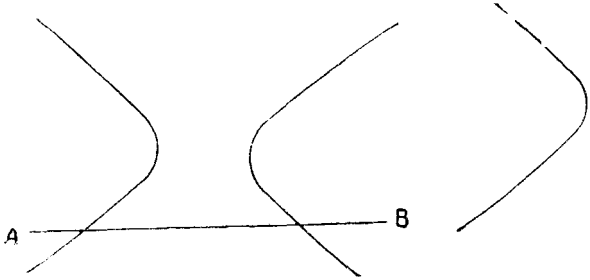
Внешние точки отличаются от внутренних еще тем, что через внешнюю точку можно провести к кривой действительные касательныя, а через внутреннюю — нет (§ 96). В самом деле, пусть будет O' (черт. 71) внешняя точка. Точки пересечения кривой с пучком лучей, выходящих из O', определятся при помощи уравнения (8) § 77. Так как точка O' — внешняя, то при одних значениях угловых коэффициентов m, n секущей прямой мы будем иметь для ϱ в этом уравнении действительные решения, а при других — мнимые. В первом случае дискриминант $MP - N^2$ уравнения (8) будет отрицательным, а во втором положительным. При непрерывном переходе коэффициентов m, n от первой системы значений ко второй дискриминант $MP - N^2$ также будет изменяться непрерывно; а так как он меняет при этом знак, то он должен перейти через нулевое значение; при этом оба корня уравнения (8) делаются равными, и мы получаем касательную к кривой из точки O'



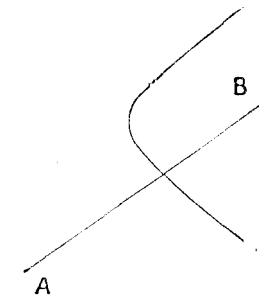
Черт. 72.

Возьмем в плоскости кривой 2-го порядка произвольную прямую AB (черт. 72). Нетрудно видеть, что на этой прямой

лежит бесконечное множество внешних точек и что эти точки образуют непрерывную последовательность. В самом деле, каждая касательная к кривой встречает данную прямую AB в одной точке; а так как касательные к кривой следуют одна за другой непрерывно, то и точки их пересечения с данною прямою образуют непрерывную последовательность. При этом могут быть



Черт. 73.



Черт. 74.

следующие случаи: 1) на данной прямой может вовсе не быть внутренних точек; 2) внутренние точки занимают один отрезок конечной длины, а внешние—два безконечно больших отрезка (черт. 72); 3) внешние точки занимают один конечный отрезок а внутренние—два безконечно больших (черт. 73); 4) точки того и другого рода занимают по одному бесконечно большему отрезку (черт. 74).

Так как внутренние и внешние точки расположены на каждой прямой непрерывно, то они расположены непрерывно и на всей плоскости, которая таким образом делится кривою на две области—внутреннюю и внешнюю. Так как касательные лежат относительно кривой в сторону ее выпуклости, то внешнею областью по отношению к данной кривой 2-го порядка служит часть плоскости, примыкающая к кривой со стороны ее выпуклости, а внутреннею — со стороны вогнутости. Для гиперболы внешняя область есть часть плоскости, заключенная между обеими ветвями кривой, а внутренняя состоит из двух частей, ограниченных этими ветвями.

Выведем признак, по которому можно, имея уравнение кривой 2-го порядка, узнать, лежит ли данная точка внутри или вне кривой. Пусть будет $2F = 0$ уравнение кривой. Подставив в левую часть уравнения координаты данной точки мы получим некоторое число, положительное или отрицательное; переход от

чисел одного знака к числам другого знака возможен только через нуль, т.-е. только при переходе точки через кривую с одной ее стороны на другую. Это показывает, что для точек одной из тех двух областей, на которые плоскость делится данною кривою, левая часть уравнения получает положительные значения, а для точек другой—отрицательные. Чтобы узнать, какой из двух знаков соответствует внутренним точкам кривой и какой внешним, поступим следующим образом. Найдем точки пересечения данной кривой с осью Y. Полагая в уравнении кривой $x = 0$, получим

$$a_{22} y^2 + 2 a_{23} y + a_{33} = 0.$$

Точки пересечения кривой с осью Y будут действительными или мнимыми, смотря по тому, будет ли дискриминант $a_{22} a_{33} - a^2_{23} = A_{11}$ этого уравнения отрицательным или положительным. В первом случае полюс оси Y будет лежать вне кривой, а во втором—внутри ее (§ 96). Координаты этого полюса определяются из уравнений (43) § 97, которые в настоящем случае получают вид

$$F'_{x'} = \lambda, \quad F'_{y'} = 0, \quad F'_{t'} = 0, \tag{44}$$

откуда находим

$$x' : y' : t' : \lambda = A_{11} : A_{12} : A_{13} : \Delta$$

или

$$x' = \mu A_{11}, \quad y' = \mu A_{12}, \quad z' = \mu A_{13}, \quad \lambda = \mu \Delta,$$

где μ — множитель пропорциональности, а Δ дискриминант уравнения $2F = 0$ (§ 81).

Подставим эти значения в левую часть уравнения $2F = 0$, выраженного в однородных координатах. По теореме Эйлера (§ 76), результат подстановки может быть представлен в виде

$$2F' = x' F'_{x'} + y' F'_{y'} + t' F'_{t'}$$

или на основании уравнений (44),

$$2F' = x' \lambda = \mu^2 A_{11} \Delta$$

Отсюда видно, что произведение $2F'\Delta$, равное $\mu^2 A_{11} \Delta^2$, будет иметь знак дискриминанта $A_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23}^2$, т.-е. будет отрицательным для внешних точек

Таким образом, возвращаясь к декартовым координатам, мы приходим к следующему выводу:

Точка (x', y') лежит внутри кривой 2-го порядка, если результат одстановки координат (x', y') в левую часть уравнения кривой имеет знак одинаковый с знаком дискриминанта этого уравнения; точка лежит вне кривой, если результат подстановки имеет знак противоположный знаку дискриминанта.

Так, например, для кривой

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

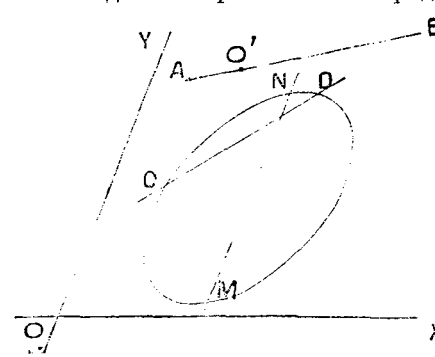
дискриминант равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Так как координаты точки $(0, 0)$ делают левую часть уравнения кривой отрицательною, то эта точка лежит вне кривой Напротив, точка $(2, 1)$ лежит внутри кривой.

99. Диаметры, как поляры. Каждому диаметру, как и всякой прямой, соответствует относительно данной кривой 2-го порядка определерный полюс. Докажем, что полюсы диаметров суть бесконечно-удаленные точки. Возьмем уравнение поляры точки (x', y') в виде (44′) § 92:

$$x' F_x + y' F_y + t' F_t = 0.$$



Черт. 75.

Возьмем в плоскости кривой 2-го порядка точку A (a, b) (черт. 75) и проведем через нее прямую AB, направление которой определяется коэффициентами m, n (§ 51). Возьмем на этой прямой точку O' (x', y') и докажем, что с удалением точки O' по прямой AB в бесконечность, ее поляра CD обратится в диаметр MN, сопряженный направлению прямой AB.

Так как точка O' лежит на прямой, выходящей из A по

направлению, соответствующему угловому коэффициенту $k=\frac{n}{m}$, то, обозначая расстояние AO' через ρ, имеем (§ 77)

$$x'=a+m\rho,\quad y'=b+n\rho.$$

Подставляя эти выражения в уравнение поляры (42′), и заменив t' через единицу, так как x', y' суть декартовы координаты точки O', находим

$$(a+m\rho)\,F_x+(b+n\rho)\,F_y+F_t=0.$$

Если точка O' будет неограниченно удаляться по прямой AB, то в пределе ρ будет равно бесконечности. Разделив последнее уравнение на ρ, будем иметь

$$\left(\frac{a}{\rho}+m\right)F_x+\left(\frac{b}{\rho}+n\right)F_y+\frac{1}{\rho}F_t=0,$$

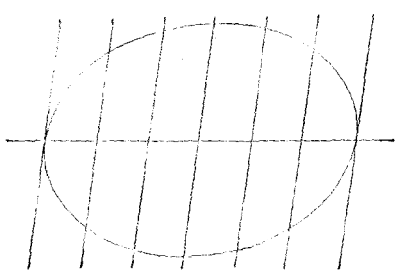
и положив $\rho=\infty$.

$$m\,F_x+n\,F_y=0,$$

или

$$F_x+k\,F_y=0;$$

а это—уравнение диаметра MN сопряженного направлению хорд с угловым коэффициентом k (§ 88), т.-е. направлению той прямой AB, по которой точка O' удалилась в бесконечность. Таким образом поляра бесконечно удаленной точки есть диаметр, сопряженный тому направлению, в котором лежит эта точка.



Черт. 76.

То же можно обнаружить и геометрически. Мы знаем, что поляра есть геометрическое место четвертых гармонических к полюсу по отношению к точкам кривой. Найдем поляру одной из бесконечно-удаленных точек плоскости относительно данной кривой 2-го порядка (черт. 76). Так как мы взяли полюс в бесконечности, то секущия, выходящие из него,

между собою; далее, мы знаем, что если точка бесконечно удалена, то четвертая гармоническая к ней находится в средине отрезка между двумя остальными точками; следовательно, геометрическое место этой четвертой гармонической есть прямая, соединяющая средины наших параллельных хорд, т.-е. диаметр, сопряженный хордам того направления, по которому точка удалялась в бесконечность.

100. Известно (§ 96), что касательныя, выходящие из полюса, имеют точками прикосновения точки пересечения поляры с кривою; поэтому, если полюс находится в бесконечности, то касательныя, проведенные из него, будут иметь точками прикосновения концы диаметра, сопряженного с тем направлением, в котором лежит бесконечно-удаленный полюс. Отсюда следует, что касательныя в концах диаметра параллельны сопряженным ему хордам. То же можно видеть и непосредственно из уравнения кривой. Пусть будет (x', y') точка кривой 2-го порядка $2F = 0$. Угловой коэффициент касательной к кривой в этой точке определяется из уравнения (17) § 80

$$F'_{x'} + k F'_{y'} = 0.$$

Уравнение диаметра, сопряженного хордам направления k есть $F_x + k F_y = 0$. Чтобы этот диаметр проходил через точку (x', y') нужно, чтобы удовлетворялось то же условие

$$F'_{x'} + k F'_{y'} = 0.$$

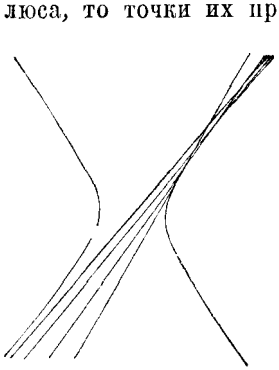
Отсюда видно, что касательная в конце диаметра параллельна хордам, сопряженным этому диаметру.

101. Убедившись в том, что каждый диаметр есть поляра некоторой бесконечно-удаленной точки, мы легко найдем поляру центра кривой. Мы знаем (§ 94), что если поляра одной точки проходит через другую точку, то и поляра второй точки проходит через первую. Так как все диаметры проходят через центр, то поляра центра должна проходить через полюсы всех диаметров; но полюсы всех диаметров лежат на бесконечно-удаленной прямой; следовательно, поляра центра есть бесконечно-удаленная прямая. Таким образом, центр кривой 2-го порядка есть полюс бесконечно-удаленной прямой относитель-

по этой кривой. Отсюда понятно, почему эллипс и гипербола имеют центр на конечном расстоянии, а парабола—в бесконечности. Парабола встречает бесконечно-удаленную прямую в двух сливающихся точках, т.-е. касается бесконечно-удаленной прямой; но полюс касательной есть точка ее прикосновения; поэтому полюс бесконечно-удаленной прямой относительно параболы должен лежать на ней самой, а так как этот полюс вместе с тем служит и центром кривой, то отсюда следует, что центр параболы лежит в бесконечности и при том на самой кривой. Эллипс и гипербола не касаются бесконечно-удаленной прямой, и поэтому центр этих кривых находится на конечном расстоянии.

Отсюда, далее, понятно, почему в центре кривой делятся пополам хорды всякого направления. Так как поляра центра есть безконечно-удаленная прямая, то какую бы хорду мы ни провели через центр, она должна делиться гармонически центром и безконечно-удаленною точкою, и так как одна из этих двух точек находится в безконечности, то точка ей сопряженная, т.-е. центр, должен лежать в средине хорды.

102. Мы знаем, что если мы проведем касательные из полюса, то точки их прикосновения будут лежать на поляре. Так как поляра центра есть бесконечно-удаленная прямая, то касательные из центра кривой должны касаться кривой в бесконечности; но прямые, проходящие через центр, суть диаметры; следовательно, эти касательные суть диаметры, встречающие кривую в бесконечности, т.-е. асимптоты. Поэтому, *асимптоту можно рассматривать, как касательную к кривой в одной из ее бесконечно-удаленных точек*. Действительно, если точка гиперболы будет удаляться в бесконечность, то касательная в этой точке будет неограниченно приближаться к асимптоте (черт. 77).



Черт. 77.

103. Окружность. Остановимся на более подробном рассмотрении особенно замечательной кривой 2-го порядка — окружности. Обозначая через (a, b) координаты центра и через r радиус, мы получим уравнение окружности в виде (ср. § 38)

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\omega = r^2.$$

Представив его в раскрытом виде, будем иметь

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2(a' + b\cos\omega)x - 2(b + a\cos\omega)y + \\ + (a^2 + 2ab\cos\omega + b^2 - r^2) = 0. \qquad (45)$$

Если оси координат—прямоугольные, то $\cos\omega = 0$, и уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r) = 0. \qquad (46)$$

Дискриминант старших членов для уравнения окружности равен

$$1 \cdot 1 - \cos^2\omega = \sin^2\omega.$$

Так как это величина существенно положительная, то окружность принадлежит к эллипсам.

Найдем, при каких условиях уравнение кривой 2-го порядка представляет окружность. Так как для этого коэффициенты в уравнении кривой должны быть пропорциональны коэффициентам в уравнении окружности. то мы имеем

$$\frac{a_{11}}{1} = \frac{a_{12}}{\cos\omega} = \frac{a_{22}}{1} = \frac{-a_{13}}{a + b\cos\omega} = \frac{-a_{23}}{b + a\cos\omega} = \\ = \frac{a_{33}}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega - r^2}.$$

Сравнивая три первых отношения, имеем

$$a_{11} = a_{22},\ a_{12} = a_{11}\cos\omega. \qquad (47)$$

Отсюда видно, что уравнение 2-й степени представляет окружность, если коэффициенты при квадратах координат равны между собою, а половина коэффициента при произведении координат равна коэффициенту при квадрате одной из координат, умноженному на косинус координатного угла

Остальные отношения дают

$$a + b\cos\omega = -\frac{a_{13}}{a_{11}},$$

$$b + a\cos\omega = -\frac{a_{23}}{a_{11}}, \qquad (48$$

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega - r^2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}.$$

Эти равенства служат для определения координат центра a, b и радиуса r.

Для прямоугольных координат условия (47) принимают вид

$$a_{11} = a_{22},\ a_{12} = 0 \tag{49}$$

Таким образом, в случае прямоугольных координат уравнение 2-й степени представляет окружность, если оно не содержит члена с произведением координат, а коэффициенты при квадратах координат равны между собою.

Уравнения (48) принимают в этом случае вид

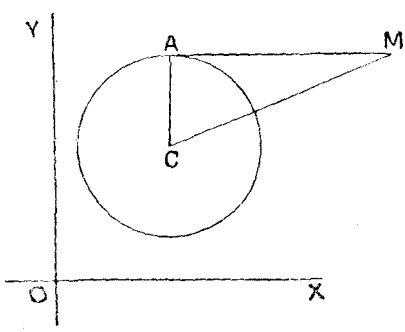
$$a = -\frac{a_{13}}{a_{11}},\ b = -\frac{a_{23}}{a_{11}},\ a^2 + b^2 - r^2 = \frac{a_{33}}{a_{11}} \tag{50}$$

Сравнивая условия (49) с уравнениями (40) § 91, мы видим, что главные оси окружности имеют неопределенное направление, т.-е, что каждый диаметр окружности есть ее ось. Самое изыскание главных осей кривой 2-го порядка равносильно изысканию двух направлений, одиовременно сопряженных относительно данной кривой и относительно окружности, так как сравнивая условие (37) § 91, выражающее взаимную перпендикулярность искомых направлений, с предшествующим соотношением (34), мы видим, что условие (37) выражает вместе с тем и сопряженность искомых направлений относительно окружности.

104. Левые части уравнений (45) и (46) имеют простое геометрическое значение. Если мы подставим в левую часть уравнения (45) координаты x, y какой-нибудь точки M (черт. 78), то выражение

$$(x-a)^2 + (y-b) + \\ + 2(x-a)(y-b)\cos\omega$$

представит квадрат расстояния точки M от точки C (a, b) — центра окружности.



Черт. 78.

$CM^2 - CA = MA^2$

коэффициенты при квадратах координат равны

то левая часть уравнения представляет квадрат длины касательной, проведенной из точки (x, y) к окружности, изображаемой этим уравнением.

105. Заметим, что уравнения (48) и (50) определяют не r, а r^2. Если для r^2 получится отрицательное значение, то r будет мнимым, и уравнения (45), (46) не будут, собственно, представлять окружности. Точно также, если r окажется равным нулю, то окружность обратится в одну точку—центр окружности. Тем не менее, мы условимся говорить, что если условия (48) или (50) удовлетворены, то уравнение 2-й степени всегда представляет окружность, радиус которой может быть действительным, мнимым или равным нулю. В двух последних случаях наше утверждение имеет, разумеется, не геометрический, а только аналитический смысл. Такое условие имеет известное значение потому, что при r равным нулю или отрицательном уравнениям (45), (46) все же можно удовлетворить если не действительными, то мнимыми значениями координат x, y; таким образом и в этих случаях уравнения окружности представляют геометрические места точек, но точек исключительно мнимых (ср. § 37).

Остановимся на том случае, когда радиус окружности равен нулю. В прямоугольных координатах уравнение такой окружности будет

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0.$$

Левая часть этого уравнения представляет сумму двух квадратов; очевидно, что при действительных значениях x и y эта сумма может быть равна нулю только в том случае, когда обращается в нуль каждое слагаемое отдельно.

$$x=a,\ y=b$$

и, следовательно определяет не линию, а точку (a, b). Этот результат противоречит выводам § 34, согласно которым одно равнение между координатами точки

но и с мнимыми координатами (§ 37). В самом деле, представив уравнение нашей окружности в виде

$$[(x-a)+i(y-b)]\cdot[(x-a)-i(y-b)]=0,$$

где $i=\sqrt{-1}$, мы найдем, что оно может быть разложено на два следующих

$$(x-a)+i(y-b)=0,$$
$$(x-a)-i(y-b)=0.$$

Это показывает, что при $r=0$ окружность распадается на две мнимых прямых (§ 85), пересекающихся в точке (a, b); все остальные точки этих прямых мнимые. Таким образом, пользуясь понятием о мнимых точках и прямых, мы можем сказать, что окружность радиуса, равного нулю, есть не точка, а пара мнимых прямых, пересекающихся в центре этой окружности.

106. Круговые точки. Найдем те направления, по которым лежат бесконечно-удаленные точки окружности. Точки эти, конечно, мнимые, так как окружность всеми своими точками лежит в конечной части плоскости. Отнесем окружность к прямоугольным осям координат. Тогда мы будем иметь

$$a_{11}=a_{22},\ a_{23}=0,$$

и уравнение (11) § 78, определяющее угловые коэффициенты прямых, направленных в бесконечно-удаленные точки кривой, примет вид

$$1+k^2=0. \qquad (51)$$

Так как это уравнение одинаково для всех окружностей, то все окружности пересекаются с бесконечно-удаленною прямою в одних и тех же точках. Эти две мнимые безконечно-удаленные точки, общие всем окружностям, лежащим в одной плоскости, обладают многими замечательными свойствами и называются круговыми точками этой плоскости.

Так как две кривых 2-го порядка встречаются в четырех точках (§ 51), а все окружности уже имеют две общих круговых точки в бесконечности, то две окружности могут иметь, кроме того, еще только две общих точки.

Обратим внимание на прямые, направленные в круговые точки. Из уравнения (51) видно, что их угловые коэффициенты

равны $\pm i$. Эти прямые обладают тем любопытным свойством что они наклонены одинаково ко всем прямым на плоскости. В самом деле, если мы имеем прямую с угловым коэффициентом k, то тангенс угла φ между этою прямою и прямою с коэффициентом $\pm i$ определится по формуле (15) § 54, которая здесь принимает вид

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pm i - k}{1 \pm ik} = \frac{\pm i(1 \pm ik)}{1 \pm ik} = \pm i.$$

Так как здесь $\operatorname{tg}\varphi$ не зависит от k, то это показывает, что прямые, направленные в одну из круговых точек, образуют со всеми прямыми на плоскости равные углы.

Так как при движении плоскости по себе самой ее окружности остаются окружностями, то из предыдущего следует, что при движении плоскости по себе самой не только бесконечно-удаленная прямая остается бесконечно-удаленною, т.-е. перемещается по себе самой, но две точки ее, именно, две круговые точки, также остаются неподвижными.

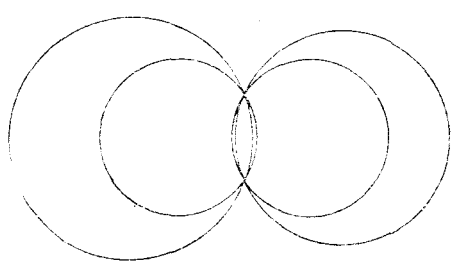
107. Пучек окружностей. Пусть мы имеем уравнения двух окружностей в прямоугольных координатах

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0, \quad (x-a')^2 + (y-b')^2 - r'^2 = 0.$$

Обозначим левые части этих уравнений через U, U' и рассмотрим уравнение пучка кривых (§ 44)

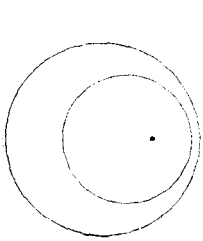
$$U - kU' = 0, \tag{51}$$

где k—параметр пучка. Легко видеть, что все кривые этого пучка суть окружности, так как при всяком значении параметра k многочлен $U - kU'$ имеет равные коэффициенты при x^2 и y^2 и не содержит члена с xy. Если две точки пересечения основных окружностей $U=0$ и $U'=0$ действительны, то по свойству пучка, все окружности пучка пройдут через эти точки (черт. 79):

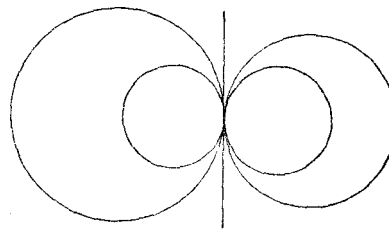


Черт. 79.

если эти точки мнимы, то все окружности пучка будут иметь мнимые точки пересечения (черт. 80); если эти точки сливаются



Черт. 80.



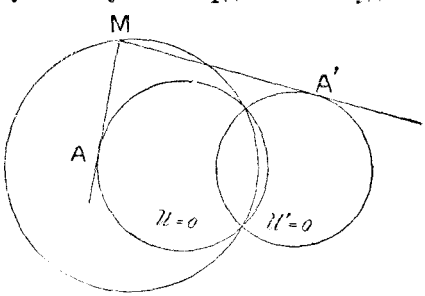
Черт. 81.

между собою, то все окружности пучка будут иметь *общую* касательную (черт. 81).

Параметр k в уравнении $U - kU' = 0$ имеет простое геометрическое значение. Решая это уравнение относительно k, находим

$$k = \frac{U}{U'}.$$

При данном k уравнение $U - kU' = 0$ представляет одну из окружностей проходящих через точки пересечения окружностей $U=0$ и $U'=0$ (черт. 82). Возьмем на этой окружности какую-нибудь точку M. Координаты ее удовлетворяют уравнению $U - kU' = 0$ и следовательно, если мы вставим эти координаты в выражение $\frac{U}{U'}$, то получим число k. Но мы видели (§ 104), что многочлен U представляет квадрат длины касательной, проведенной из точки M к первой основной окружности, а многочлен U' — квадрат длины касательной, проведенной из той же точки ко второй основной окружности. Следовательно, равенство $k = \frac{U}{U'}$ выражает, что *отношение* между квадратом длины касательной MA, проведенной из любой точки M окружности $U - kU' = 0$ к одной из основных окружностей, и квадратом длины касательной MA', проведенной из той же точки к другой основной



Черт. 82.

есть величина постоянная. Это ведет к следующему свойству кругов:

Геометрическое место точек, для которых отношение длин касательных к двум данным окружностям есть величина постоянная, есть окружность, проходящая через точки пересечения двух данных окружностей.

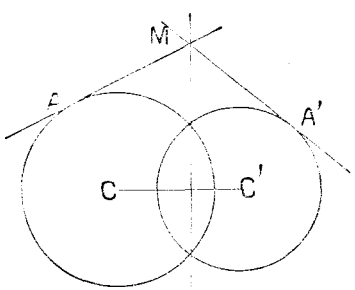
108. Радикальная ось. Особенно замечателен тот случай, когда $k=1$, т.-е. когда точки линии $U-kU'=0$ таковы, что длины касательных, проведенных из этих точек к двум данным окружностям, равны между собою. При $k=1$, уравнение (51) обращается в

$$U-U'=0,$$

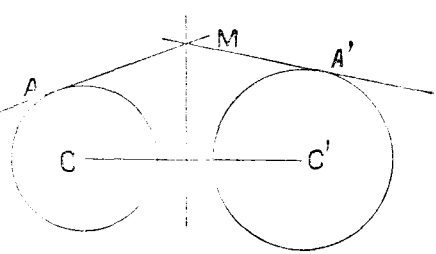
или

$$2(a'-a)x+2(b'-b)y-(a^2+b^2-a'^2-b'^2+r'^2)=0.$$

Здесь все члены 2-го измерения исчезли, и вместо уравнения окружности мы имеем уравнение прямой линии. Эта прямая обладает тем свойством, что длины касательных, проведен-



Черт. 83.



Черт. 84.

ных из какой-нибудь ее точки к двум данным окружностям, равны между собою. Такая прямая называется радикальною осью окружностей $U=0$ и $U'=0$ и, по сказанному, проходит через точки пересечения обеих окружностей (черт. 83). Если даже точки пересечения окружностей мнимы, радикальная ось все таки существует, потому что уравнение $U-U'=0$ имеет и в этом случае действительные коэффициенты (черт. 84).

Легко видеть, что радикальная ось перпендикулярна к линии центров обоих окружностей. В самом деле, уравнение прямой, соединяющей центры (a, b) и (a', b') этих окружностей, есть

$$(b - b')x - (a - a')y + (ab' - ba') = 0,$$

и ее угловой коэффициент равен $\frac{b - b'}{a - a'}$, тогда как из уравнения радикальной оси видно, что ее угловой коэффициент есть $-\frac{a - a'}{b - b'}$; отсюда прямо следует перпендикулярность обоих прямых.

Здесь может возникнуть вопрос, каким образом в уравнении $U - kU' = 0$, т.-е. в уравнении пучка кривых 2-го порядка может содержаться уравнение прямой линии—радикальной оси. С геометрической точки зрения это ясно, так как на прямую линию можно смотреть, как на окружность бесконечно большого радиуса. Посмотрим же, каким образом уравнение 2-ой степени обращается в уравнение 1-ой степени. Представив уравнения $U = 0$, $U' = 0$ в однородных координатах, будем иметь;

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 - r^2t^2 = 0,$$
$$(x - a't)^2 + (y - b't)^2 - r'^2t^2 = 0.$$

Тогда уравнение радикальной оси $U - U' = 0$ примет вид

$$2(a' - a)xt + 2(b' - b)yt + (a^2 + b^2 - r^2 - a'^2 - b'^2 + r'^2)t^2 = 0,$$

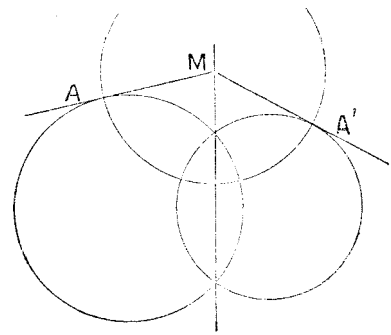
или

$$t[(a' - a)x + 2(b' - b)y + (a^2 + b^2 - r^2 - a'^2 - b'^2 + r'^2)t] = 0.$$

Таким образом, первая часть нашего уравнения второй степени распадается на два множителя первой степени, и, следовательно, уравнение $U - U' = 0$ представляет, собственно, не одну, а две прямых—радикальную ось и бесконечно-удаленную прямую $t = 0$. Таким образом, когда окружность при неограниченном возрастании ее радиуса обращается в пределе в прямую, то мы можем рассматривать этот переход, как распадение окружности на пару прямых, из которых одна—бесконечно-удаленная.

Мы видели выше, что касательныя, проведенные из любой точки радикальной оси к двум данным кругам, равны между

собою. Следовательно, если из какой-нибудь точки M радикальной оси (черт. 85) мы опишем окружность радиусом, равным касательной из этой точки к одному из данных кругов, то эта окружность пересечет обе данные окружности под прямым углом. Линии, пересекающиеся под прямым углом, называются линиями ортогональными. Таким образом геометрическое место центров окружностей ортогональных к двум данным есть радикальная ось этих последних.



Черт. 85.

Положим, что мы имеем три окружности

$$U=0,\ U'=0,\ U''=0.$$

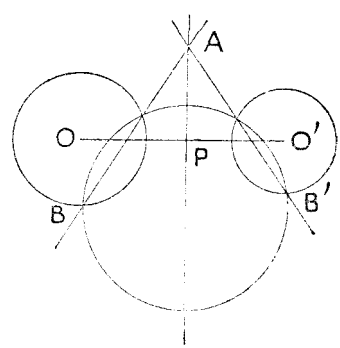
Составим уравнения радикальных осей для каждой пары этих окружностей:

$$U-U'=0,\ U'-U''=0,\ U''-U=0.$$

Сложив первые части этих уравнений, получим тождественно

$$(U-U')+(U'-U'')+(U''-U)=0.$$

Это показывает (§ 62), что три радикальные оси каждых трех окружностей, взятых попарно, сходятся в одной точке. Эта точка называется радикальным центром трех окружностей.



Черт. 86.

Последнее свойство дает возможность построить радикальную ось для двух не пересекающихся окружностей. Положим, что мы имеем две непересекающиеся окружности O, O' (черт. 85). Строим третью окружность так, чтобы она пересекала обе данные и находим радикальные оси

AB, AB' новой окружности с каждой из данных. По доказанному, через точку пересечения этих радикальных осей должна проходить и искомая радикальная ось; кроме того, мы видели, что радикальная ось перпендикулярна к линии центров данных окружностей; следовательно, если мы из точки пересечения A первых двух радикальных осей опустим перпендикуляр AP на линию центров OO_1 двух данных окружностей, то этот перпендикуляр и будет искомою радикальною осью.

ГЛАВА VII.

Упрощение уравнений кривых 2-го порядка.

109. Уравнение относительно сопряженных направлений. Выбирая надлежащим образом оси координат, мы можем привести уравнение кривой 2-го порядка к более простому виду. Примем за оси координат две прямыя, направления которых сопряжены между собою относительно данной кривой 2-го порядка. Угловые коэффициенты сопряженных направлений должны удовлетворять уравнению (33) § 89. Так как угловые коэффициенты осей X и Y суть соответственно 0 и ∞ (§ 48), то, положив в уравнении (33) $k=0$, мы должны получить $k'=\infty$, а для этого должно быть $a_{12}=0$.

Таким образом, *если кривая 2-го порядка отнесена к двум сопряженным направлениям, то ее уравнение не содержит члена с произведением координат.*

Так как у центральных кривых—эллипса и гиперболы—диаметры могут иметь любое направление, то у этих кривых одно из двух сопряженных направлений может быть взято произвольно, причем второе сопряженное направление будет всякий раз иное; напротив, в параболе все диаметры параллельны между собою, и потому в случае параболы одним из двух сопряженных направлений всегда является общее направление диаметров параболы, тогда как второе сопряженное направление может быть взято произвольно.

110. Предположим теперь, что оси координат не только имеют сопряженные направления, но что одна из осей есть диаметр, сопряженный хордам, параллельным другой оси. В таком случае уравнение кривой принимает еще более простой вид

Пусть, например, ось X есть диаметр, сопряженный хордам, параллельным оси Y. Уравнение диаметра, сопряженного хордам, параллельным оси Y, есть (§ 88)

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0.$$

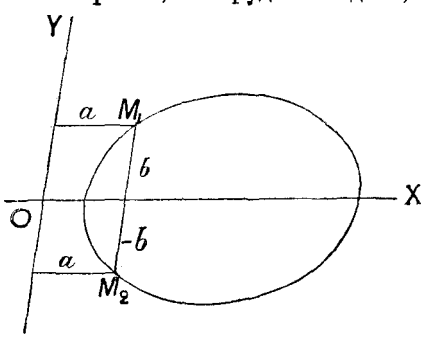
Чтобы это уравнение представляло ось X, оно должно обратиться в $y = 0$; поэтому имеем

$$a_{21} = 0, \quad a_{23} = 0.$$

Таким образом, уравнение кривой принимает в этом случае вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

Обратно, нетрудно видеть, что в уравнении (1) ось X делит пополам хорды, параллельные оси Y. Действительно, так как это уравнение не содержит членов с первою степенью y, то если ему удовлетворяют значения $x = a$, $y = b$, то ему удовлетворят и значения $x = a$, $y = -b$. Очевидно, что хорда $M_1 M_2$ (черт. 87), соединяющая точки $M_1(a, b)$ и $M_2(a, -b)$, параллельна оси Y и имеет средину на оси X.



Черт. 87.

111. Приняв за ось X один из диаметров кривой, мы можем поместить начало координат в любой точке этого диаметра. Примем за начало координат один из его концов, т.-е. одну из точек пересечения оси X с кривою. Тогда начало координат, или точка (0, 0), будет лежать на кривой, и полагая в (1) $x = 0$, $y = 0$, мы получим $a_{33} = 0$ (ср. § 52). При этом уравнение (1) обратится в следующее:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0. \qquad (2)$$

Здесь, как и в предыдущем, мы предполагаем, что осью X служит диаметр, сопряженный хордам, параллельным оси Y. Но касательная в конце диаметра параллельна сопряженным ему

хордам (§ 100); поэтому, если мы примем за начало координат один из концов диаметра, принятого за ось X, и возьмем направления осей X и Y сопряженными между собою, то ось Y есть не что иное, как касательная к кривой в начале координат. Таким образом, уравнение (2) есть уравнение кривой 2-го порядка относительно диаметра и касательной в его конце. Впоследствии мы рассмотрим это уравнение более подробно (§ 137).

Если данная кривая—парабола, то для нее уравнение (2) принимает еще более простой вид. Так как в этом уравнении осью X служит один из диаметров кривой, то угловой коэффициент диаметров параболы $k = -\frac{\alpha}{\beta}$ (§ 89) должен быть здесь равным нулю. Отсюда $\alpha = 0$, и, на основании равенства (14) § 79, $a_{11} = 0$. Таким образом, для параболы уравнение (2) имеет вид

$$a_{22}y^2 + a_{13}x = 0. \tag{3}$$

Применим, в виде примера, изложенные преобразования к кривой

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 + 3x + 4y - 4 = 0,$$

отнесенной к прямоугольным осям координат. Выберем для новых осей координат два направления, которые были бы сопряжены между собою относительно данной кривой. Уравнение (34) § 89, связывающее угловые коэффициенты сопряженных направлений, принимает здесь по умножении на 2 вид

$$4 - 3(k + k') - 4kk' = 0.$$

Одна из систем значений k и k', удовлетворяющих этому уравнению, есть система $k = \frac{4}{3}$, $k' = 0$; мы примем эти значения за угловые коэффициенты новых осей координат. Для дальнейшего упрощения примем, как было указано выше, за ось X диаметр, сопряженный первому из двух выбранных нами направлений. Уравнение (30) § 88, представляющее пучок диаметров кривой, дает в нашем случае

$$(4x - 3y + 3) + k(-3x - 4y + 4) = 0.$$

Полагая здесь $k=\frac{4}{3}$, находим

$$y=1,$$

— уравнение диаметра сопряженного хордам с коэффициентом $k=\frac{4}{3}$; так как последнее уравнение не содержит x, то угловой коэффициент этого диаметра равен нулю, как это и должно быть, так как выше мы нашли, что направлению $k=\frac{4}{3}$ сопряжено направление $k'=0$. Этот диаметр мы примем за новую ось X. Решая совместно уравнение кривой с уравнением диаметра, мы получим две точки (1, 1) и (—1, 1) пересечения нашего диаметра с кривою; одну из них (—1, 1) мы примем за новое начало координат.

Теперь мы определили как начало, так и направление новых осей координат. Полагая в формулах преобразования (12) § 31

$$\omega=\frac{\pi}{2},\ a=0,\ \beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3},\ a'=-1,\ b=1,$$

найдем

$$x=x'+\frac{3}{5}y'-1,\ y=\frac{4}{5}y'+1.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение кривой, после упрощений получим

$$x'^2-y'-2x'=0.$$

Мы видим, что наше преобразование привело уравнение кривой к виду (2).

112. Уравнение относительно центра. Изложенное выше упрощение уравнения кривой 2-го порядка применимо ко всякой кривой 2 го порядка. Но уравнения центральных кривых— эллипса и гиперболы—допускают еще другое, не менее важное преобразование, которое получится, если мы перенесем начало координат в центр кривой. Для параболы такое преобразование невозможно, так как центр параболы лежит в бесконечности.

Посмотрим, какой вид имеет уравнение кривой 2-го порядка, если начало координат лежит в центре кривой. Так

как в этом случае уравнения (28) § 87, определяющие координаты центра, должны удовлетворяться значениями $x=0$, $y=0$, то подставляя эти значения, мы получим

$$a_{13}=0,\ a_{23}=0,$$

и потому уравнение кривой относительно центра имеет вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{33}=0. \tag{4}$$

Таким образом, если начало координат находится в центре кривой 2-го порядка, то уравнение кривой не содержит членов с первыми степенями координат.

Докажем, обратно, что если уравнение кривой 2-го порядка не содержит членов с первыми степенями координат, то начало координат есть центр кривой. Если уравнение кривой имеет вид (4), то это уравнение не изменится, если мы одновременно переменим знаки при x и при y. Поэтому, если уравнению (4) удовлетворяют значения $x=a$, $y=b$, то ему удовлетворят и значения $x=-a$, $y=-b$. Это доказывает, что если на кривой лежит точка $M_1(a, b)$, то на ней лежит и точка $M_2(-a, -b)$. Так как координаты средины хорды равны полусуммам соответственных координат ее концов, то обе координаты средины хорды M_1M_2 равны нулю, т.-е. хорда M_1M_2 делится в начале координат пополам. Так как точка $M_1(a,b)$ есть произвольная точка кривой, то отсюда следует, что всякая хорда кривой, проходящая через начало координат, делится в нем пополам, т.-е. начало координат есть центр кривой.

113. Имея уравнение центральной кривой 2-го порядка, мы можем составить уравнение той же кривой относительно ее центра, не вычисляя предварительно координат этого центра. Пусть будет точка (x', y') центр кривой $2F=0$. Перенеся координат в точку (x', y'), мы получим уравнение кривой в виде (§ 74):

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2xF'_{x'}+2yF_{y'}+2F'=0,$$

по теореме Эйлера, имеем тождественно

$$2F'=x'F'_{x'}+y'F'_{y'}+t'F'_{t'}.$$

Здесь t' должно быть взято равным единице, так как x' и y, суть декартовы координаты (§ 68).

Так как координаты центра удовлетворяют уравнениям (28) § 87

$$F'_{x'} = 0, \quad F'_{y'} = 0,$$

то уравнение кривой получает вид

$$a_{11} x + 2a_{12} xy + 2a_{22} y^2 + F'_{t'} = 0.$$

Таким образом, при перенесении начала координат в центр кривой, свободный член уравнения обращается в $F'_{t'}$. Представив его в раскрытом виде

$$F'_{t'} = a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33}$$

и внеся вместо координат центра x', y' их выражения (29) § 87, получим

$$F'_{t'} = \frac{\begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{matrix}}{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} a_{31} + \frac{\begin{matrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{matrix}}{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} a_{32} + a_{33} = \frac{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}}{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}},$$

или (§ 82)

$$F'_{t'} = \frac{\Delta}{A_{33}}.$$

Таким образом уравнение кривой относительно центра есть

$$a_{11} x + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0. \qquad (5)$$

Например, уравнение

$$x^2 - 4 xy + 3 y^2 + 2 y - 2 = 0$$

после перенесения начала координат в центр кривой, обращается в следующее:

$$x^2 - 4 xy + 3 y^2 + \frac{\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}}{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{matrix}} = 0,$$

или

$$x^2 - 4 xy + 3 y^2 - 1 = 0.$$

114. Уравнение асимптот. Если кривая 2-го порядка отнесена к центру, то уравнение, представляющее ее две асимптоты, получится, если мы приравняем нулю старшие члены уравнения кривой. Таким образом, для кривой, изображаемой уравнением (4), уравнение асимптот имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0. \qquad (6)$$

Действительно, так как в уравнениях (4) и (6) старшие члены одинаковы, то линии, изображаемые этими уравнениями, имеют общие безконечно-удаленные точки (§ 78). С другой стороны, уравнение (6), как однородное, представляет пару прямых, проходящих через начало координат, т.-е. через центр кривой (§ 86). Таким образом, уравнение (6) представляет пару прямых проведенных из центра кривой в ее бесконечно-удаленные точки, а такие прямыя суть асимптоты (§ 90).

115. Подобные кривыя 2-го порядка. Предположим, что в уравнении кривой 2-го порядка старшие члены остаются без изменения, а коэффициенты при первых степенях координат и свободный член получают новые значения. Мы покажем, что получающаяся при этом кривая может отличаться от первоначальной своими размерами и положением, но сохраняет прежний вид, т.-е. остается подобною первоначальной кривой. Пусть будут

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}'x + 2a_{23}'y + a_{33}' = 0$$

уравнения двух кривых, причем старшие члены в обоих уравнениях одинаковы. Предположим, что наши кривыя—центральные, и отнесем уравнение каждой кривой к ее центру, не меняя направления осей координат. При этом старшие члены останутся без изменения, члены первой степени исчезнут, и уравнения кривых примут вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + c' = 0 \qquad (7)$$
$$a_{11}x''^2 + 2a_{12}x''y'' + a_{22}y''^2 + c'' = 0. \qquad (7')$$

Здесь x', y' и x'', y'' суть текущие координаты точек обеих кривых, а свободные члены c' и c'' определяются согласно § 113. Перейдем от декартовых координат к полярным, причем для

каждой кривой поместим полюс в ее центре. Обозначая для обеих кривых длины радиусов-векторов OM', OM'' (черт. 88) соответственно через ρ' и ρ'', будем иметь по формулам (18) § 33

$$x' = m\rho', \quad y' = n\rho';$$
$$x'' = m\rho'', \quad y = n\rho''.$$

Подставляя эти выражения в уравнения кривых, получим

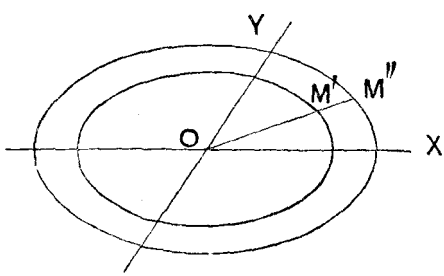
$$\rho' = \sqrt{\frac{c'}{a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2}},$$

$$\rho'' = \sqrt{\frac{c''}{a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2}},$$

и отсюда

$$\frac{\rho''}{\rho'} = \sqrt{\frac{c''}{c'}}.$$

Так как последнее соотношение не содержит угловых коэффициентов m, n, то оно показывает, что отношение соответствующих радиусов-векторов обеих кривых постоянно, т.-е. не зависит от их направления (черт. 88). Две кривыя, имеющие то свойство, что радиусы-векторы одной кривой пропорциональны параллельным им радиусам-векторам другой, называются кривыми подобными и подобно расположенными относительно точки O, отношение радиусов-векторов $\frac{\rho''}{\rho'}$ — коэффициентом подобия, а точка O — центром подобия. Таким образом, две кривыя 2-го порядка, у которых старшие члены уравнений одинаковы, суть кривыя подобные и подобно расположенные.



Черт. 88.

Заметим, что если в уравнениях (7) и (7′) свободные члены разные знаки, то отношение $\frac{\rho''}{\rho'}$ будет мнимым; вследствие этого мнимым точкам одной кривой будут соответствовать действительные точки другой кривой и обратно. Очевидно, что,

с геометрической точки зрения, две такие кривые не могут считаться подобными; тем не менее, так как уравнения таких кривых обладают свойствами уравнений кривых подобных, то в аналитеческой геометрии и эти кривыя называются подобными кривыми, но с мнимым коэффициентом подобия (см. § 117). Точно также, если в уравнении (7′) коэффициент c'' равен нулю, то оно представляет пару прямых, параллельных асимптота кривой (7) (§ 90). Поэтому пару асимптот кривой 2-го порядка можно рассматривать, как предельную форму кривой подобной данной кривой и подобно расположенной, с коэффициентом подобия равным нулю.

Мы рассматривали здесь только центральные кривыя 2-го порядка. Впоследствии мы покажем (§ 134), что все параболы подобны между собою, а если в их уравнениях старшие члены одинаковы, то и подобно расположены.

116. Уравнение относительно сопряженных диаметров. Если в уравнении центральной кривой 2-го порядка осями координат служат два сопряженных диаметра, то уравнение не содержит как членов первой степени (§ 112), так и члена с произведением координат (§ 109). Таким образом, уравнение центральной кривой 2-го порядка относительно сопряженных диаметров имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \qquad (8)$$

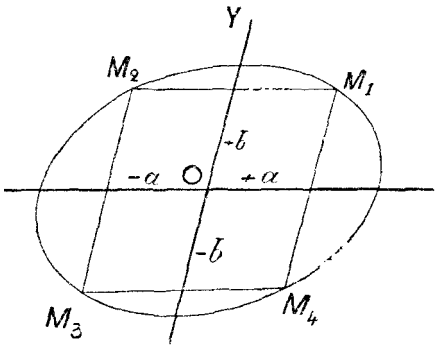
Обратно, если уравнение кривой 2-го порядка не содержит членов первой степени и члена с произведением координат, то кривая отнесена к сопряженным диаметрам. Действительно, так как уравнение (8) содержит x и y только во второй степени, то применяя соображения § 110, мы убедимся, что каждая из осей координат делит пополам хорды параллельные другой оси, т.-е. что осями координат служат два сопряженных диаметра.

Очевидно, что если уравнению (8) удовлетворяют значения $x = a$ $y = b$, то ему удовлетворяют следующие четыре системы значений

$$x = a,\ y = b;\ x = -a,\ y = b;$$
$$x = -a,\ y = -b;\ x = -a,\ y = -b.$$

Легко видеть, что точки $M_1(a, b)$, $M_2(-a, b)$, $M_3(-a\ -b)$

$M_4(a,-b)$ (черт. 89) образуют вершины параллелограмма, вписанного в кривую (8). Отсюда следует, что в каждую кривую 2-го порядка можно вписать бесконечное множество параллелограммов, стороны которых параллельны двум данным сопряженным диаметрам кривой. Обратно, нетрудно видеть, что стороны всякого параллелограмма, вписанного в кривую 2-го порядка, параллельны двум сопряженным диаметрам.



Черт. 89

117. Канонические уравнения центральных кривых 2-го порядка. При дальнейшем упрощении уравнения (8) мы рассмотрим отдельно те случаи, когда оно представляет эллипс и когда оно представляет гиперболу.

Так как уравнение (8) не содержит члена с произведением координат, то для него дискриминант старших членов обращается в произведение $a_{11}a_{22}$. Мы знаем, что если дискриминант старших членов положителен, то кривая есть эллипс, а если он отрицателен, то кривая есть гипербола. Следовательно, если в уравнении (8) a_{11} и a_{22} имеют знаки одинаковые, то кривая (8)—эллипс, а если разные, то эта кривая—гипербола.

Положим, что в уравнении

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \qquad (8)$$

все три коэффициента имеют одинаковые знаки; тогда не существует никакой пары действительных значений x и y, которые удовлетворяли бы уравнению. В самом деле, так как при x и y действительных x^2 и y^2 положительны, то все три члена будут иметь одинаковые знаки и сумма их не может равняться нулю. Поэтому хотя и в этом случае все коэффициенты уравнения (8)—числа действительные, тем не менее изображаемая таким уравнением кривая не имеет ни одной действительной точки; эта кривая называется мнимою кривою 2-го порядка; ее следует считать мнимым эллипсом, потому что в ее уравнении a_{11} и a_{12} имеют одинаковые знаки.

Положим далее, что знаки первых двух членов одинаковы, а знак свободного отличен от знака первых двух; тогда уравнению (8) можно удовлетворить действительными значениями x и y. Так как мы предположили, что знаки старших членов одинаковы, то дискриминант положителен, и следовательно уравнение в этом случае представляет действительный эллипс.

Перенося в уравнении (8) a_{33} в правую часть и деля обе части на a_{33}, будем иметь

$$\frac{x^2}{-\frac{a_{33}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{-\frac{a_{33}}{a}} = 1.$$

Так как, по предположению, знаки коэффициентов a_{11} и a_{22} противоположны знаку a_{33}, то отношения $-\frac{a_{33}}{a_{11}}$ и $-\frac{a_{33}}{a_{22}}$ положительны, и мы можем положить их равными квадратам некоторых действительных чисел. Положим

$$-\frac{a_{33}}{a_{11}} = a'^2, \quad -\frac{a_{33}}{a_{22}} = b'^2.$$

Тогда уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{a'^2} + 1. \tag{9}$$

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса. Вообще, каноническим называется такое простейшее уравнение, к которому может быть приведено посредством соответствующего преобразования каждое уравнение, принадлежащее к данному роду.

Легко видеть, что уравнение всякого эллипса может быть приведено к виду (9) безчисленными способами; действительно, эллипс имеет безчисленное множество пар сопряженных диаметров, и мы можем принять за две оси координат каждую из этих пар. Разумеется, принимая за оси координат ту или другую пару сопряженных диаметров, мы будем получать каждый раз различные значения для a' и b', так что в каноническом уравнении одного и того же эллипса a' и b' будут иметь разные

значения в зависимости от того, какую пару сопряженных диаметров кривой мы примем за оси координат.

В частности, мы можем отнести уравнение эллипса к главным осям; в этом случае принято обозначать параметры a', b' через a, b, так что уравнение эллипса относительно главных осей будет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{10}$$

Перейдем к уравнению гиперболы. Чтобы уравнение

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0,$$

представляло гиперболу, надо, чтобы дискриминант $a_{11}a_{22}$ был отрицательным, а для этого коэффициенты a_{11} и a_{22} должны иметь разные знаки. Положим, что знак a_{33} совпадает со знаком a_{22}; если бы он совпадал со знаком a_{11}, а не a_{22}, то мы переменим роли осей координат, и тогда знак a_{33} будет опять совпадать со знаком a_{22} (ср. § 79). Деля уравнение на $-a_{33}$, получим:

$$\frac{x^2}{-\frac{a_{33}}{a_{11}}}+\frac{y^2}{-\frac{a_{33}}{a_{22}}}=1.$$

Мы предположили, что знаки коэффициентов a_{11} и a_{33} разные; следовательно, дробь $-\frac{a_{33}}{a_{11}}$ положительна, и мы можем положить

$$-\frac{a_{33}}{a_{11}}=a'^2.$$

Во втором делителе знаки коэффициентов a_{33} и a_{22} одинаковы, следовательно, дробь $-\frac{a_{33}}{a_{11}}$ отрицательна; положим

$$-\frac{a_{33}}{a_{22}}=-b'^2.$$

При таких обозначениях уравнение гиперболы принимает вид:

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1. \tag{11}$$

Таково уравнение гиперболы, отнесенной к двум сопряженным диаметрам; это каноническое уравнение гиперболы. К этому виду можно привести уравнение всякой гиперболы бесчисленными способами, смотря по тому, какую пару сопряженных диаметров мы примем за оси координат. Если за оси координат принимаются главные оси, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12}$$

При выводе уравнения (11) мы предполагали, что коэффициент a_{33} имеет знак одинаковый с a_{11}; если бы a_{33} имел одинаковый знак с a_{22}, то уравнение гиперболы привелось бы в виду

$$-\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Если уравнения двух гипербол

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a'^2} + \frac{x^2}{b'^2} = 1, \tag{13}$$

отличаются только знаками при a'^2 и b'^2, то такие гиперболы называются сопряженными. Мы могли бы распространить понятие о сопряженных кривых также и на эллипсы и считать сопряженными кривыя

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1;$$

но так как из двух сопряженных эллипсов один непременно мнимый, то рассмотрение сопряженных эллипсов не представляет столь же большого интереса.

Очевидно, что уравнение сопряженной кривой можно также получить, оставляя в уравнениях (9) или (11) старшие члены без изменения и меняя знак свободного члена. Согласно с выводами § 115, это показывает, что две сопряженные кривыя можно рассматривать, как две кривыя подобные и подобно расположенные с коэффициентом подобия равным $\sqrt{-1}$.

118*. Мнимые линии. Мы видели выше, что уравнение с действительными коэффициентами может не удовлетворяться ника-

кими действительными значениями текущих координат и что поэтому линия, изображаемая таким уравнением не имеет ни одной действительной точки (ср. § 105). Такие линии называются мнимыми; но то же название принадлежит и линиям другого рода—именно линиям, уравнения которых имеют мнимые коэффициенты, если этот характер коэффициентов не может быть устранен умножением уравнения не соответствующего множителя. Мнимые линии этого рода могут иметь действительные точки, так, например, мнимая кривая

$$(1+i)x^2+(1-i)y^2=10+8i$$

содержит четыре действительных точки ($\pm 3, \pm 1$), лежащие на пересечении действительных кривых

$$x^2+y^2=10, \quad x^2-y^2=8.$$

Мнимые линии этого второго рода отличаются в своих свойствах от действительных линий более глубоко, нежели мнимые линии первого рода, так как присутствие мнимых коэффициентов существенно отражается на всех соотношениях между этими линиями и другими геометрическими образами. Напротив, хотя линии первого рода и не имеют ни одной действительной точки, тем не менее их свойства во многих отношениях одинаковы с свойствами действительных кривых. Так, поляры действительных точек относительно таких линий суть действительные прямыя; например, поляра точки (1, 1) относительно мнимой кривой $x^2+y^2+1=0$ есть действительная прямая $x+y+1=0$. Поэтому, мнимые кривые первого рода, т.-е. не имеющие действительных точек, но изображаемые уравнениями с действительными коэффициентами, называются иногда не мнимыми, а безветвенными кривыми, в отличие от мнимых кривых в собственном смысле, уравнения которых имеют мнимые коэффициенты.

119. Эллипс. При дальнейшем изучении центральных кривых мы будем пользоваться их уравнениями относительно главных осей, указывая попутно на различие в свойствах кривой относительно главных осей и относительно любой другой пары сопряженных диаметров.

Так как в первой части уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (10)$$

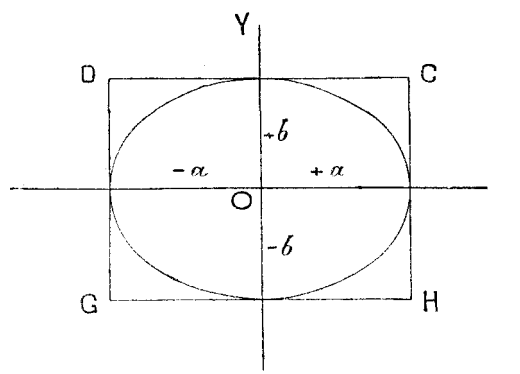
стоит сумма двух существенно положительных величин, и эта сумма равна единице, то каждая дробь не может быть больше единицы; отсюда следует

$$x^2 \leqq a^2,\ y^2 \leqq b^2,$$

или

$$|x| \leqq a,\ |y| \leqq b,$$

где знаками $|x|$, $|y|$ обозначены абсолютные значения координат x, y. Это дает нам понятие о тех пределах, в которых заключен эллипс. Отложим на оси X по обе стороны от начала отрезки $= a$ (черт. 90) и проведем через концы отрезков прямыя



Черт. 90.

параллельно оси X. Так как абсолютная величина координаты x не может быть больше a, то все точки эллипса будут лежать внутри или на границах полосы, образуемой этими прямыми Точно также, если на оси Y отложим в обе стороны от начала отрезки $+b$ и $-b$ и через концы этих отрезков проведем прямыя параллельно оси X, то все точки эллипса будут лежать внутри той полосы. Таким образом, весь эллипс расположен внутри прямоугольника $CDGH$. Из уравнения эллипса видно, что по мере того, как абсолютная величина координаты x возрастает величина y убывает, и обратно. Это замечание составить себе понятие об очертании эллипса.

Чтобы выяснить геометрический смысл параметров a и b в уравнении эллипса, найдем точки пересечения эллипса с осями. Решая уравнение (10) совместно с $y = 0$, получим

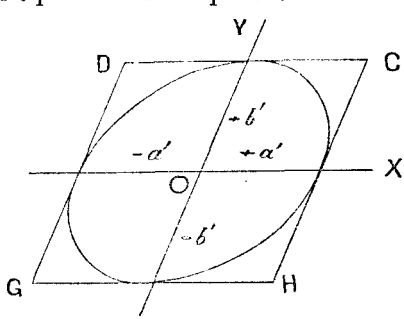
$$x = \pm a.$$

Это показывает, что эллипс образует на оси X отрезки $= a$; следовательно, a есть длина полуоси, принятой за ось X. Точно также, b есть длина полуоси, принятой за ось Y. Обыкновенно принимают за ось X бо́льшую и за ось Y меньшую ось эллипса. Поэтому обыкновенно полагают

$$a \geqq b,$$

и a называется длиною большой полуоси, а b длиною малой полуоси эллипса.

Точки пересечения кривой 2-го порядка с осями называются вершинами кривой. Так как эллипс встречается с каждою осью в двух действительных точках, то эллипс имеет четыре вершины.



Черт. 91.

Для уравнения (9) наши рассуждения останутся прежними, с тою только разницею, что описанный прямоугольник заменится параллелограммом (черт. 91). В уравнении (9) параметры a' и b' суть длины сопряженных полудиаметров, принятых за оси координат.

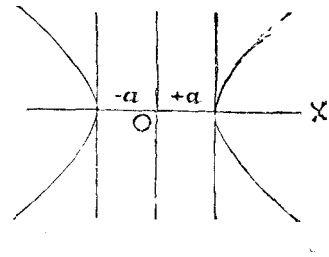
120. Гипербола. Так как левая часть уравнения гиперболы относительно главных осей гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (12)$$

представляет разность квадратов, то отношение $\frac{x^2}{a^2}$ не может быть менее единицы, и следовательно

$$|x| \geqq a.$$

Отсюда следует, что если мы отложим на оси X отрезки $\pm a$ и проведем через их концы прямые, параллельные оси Y, то точки гиперболы будут лежать вне или на границе полосы, образуемой этими прямыми (черт. 92). Координата y может иметь в уравнении (12) любое значение. Из уравнения кривой видно, что с возрастанием абсолютной величины x возрастает и абсолютная величина y, так что гипербола имеет вид, показанный на черт. 92.



Черт. 92.

Чтобы найти геометрическое значение параметров a и b, будем искать точки пересечения гиперболы с осями координат. Решая уравнение (12) совместно с уравнением $y = 0$, находим

$$x = \pm a^2$$

Таким образом, a есть длина полуоси, принятой за ось X. Решая уравнение гиперболы совместно с уравнением $x = 0$, получаем

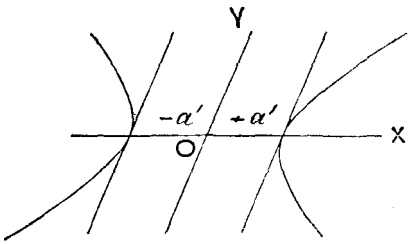
$$y^2 = -b^2, \text{ или } y = \pm ib.$$

Это значит, что гипербола встречает ось Y в мнимых точках. Это и понятно, так как гипербола лежит вне полосы, образуемой прямыми, проведенными параллельно оси Y на расстоянии a. Действительный отрезок b называют условно **мнимою полуосью** гиперболы. Заметим, что тогда как в эллипсе за полуось a принимается обыкновенно большая полуось, в гиперболе действительная полуось a может быть и больше, и равна, и меньше мнимой полуоси b.

Так как гипербола пересекается лишь с одною из двух осей, то она имеет только две действительные вершины, лежащие на концах действительной оси.

Для уравнения (11) относительно сопряженных диаметров вся разница будет заключаться в том, что угол между осями координат не будет прямым. Рассуждая по прежнему, мы убе-

димся, что из двух сопряженных диаметров один встречает гиперболу, а другой нет (черт. 93). Параметры a' и b' суть длины двух сопряженных полудиаметров, действительного и мнимого.



Черт. 93.

Сравнивая между собою уравнения (13) двух сопряженных гипербол, мы видим, что длины их сопряженных диаметров одинаковы, но действительные диаметры одной кривой обращаются в мнимые другой и обратно.

121. Касательныя и поляры. Мы знаем (§ 80), что уравнение касательной к кривой $2F=0$ в точке (x', y') имеет в однородных координатах вид

$$xF'_{x'} + yF'_{y'} + tF'_{t'} = 0.$$

Применим этот общий результат к уравнению эллипса относительно главных осей (10). В однородных координатах это уравнение принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - t^2 = 0.$$

Отсюда находим (§ 76)

$$F_x = \frac{x}{a^2}, \quad F_y = \frac{y}{b^2}, \quad F_t = -t.$$

Таким образом, уравнение касательной к эллипсу (10) в точке (x', y') есть

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - tt' = 0,$$

или в декартовых координатах

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1. \tag{14}$$

Так как уравнение гиперболы (12) отличается от уравне-

ния эллипса (10) только знаком при b^2, то уравнение касательной к гиперболе (12) будет

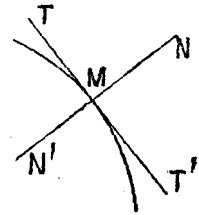
$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1. \tag{15}$$

Очевидно, что если эллипс и гипербола отнесены к сопряженным диаметрам, и их уравнения имеют вид (9) и (11), то уравнения касательных будут соответственно

$$\frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 1, \quad \frac{xx'}{a'^2} - \frac{yy'}{b'^2} = 1. \tag{16}$$

Так как уравнение поляры тождественно по виду с уравнением касательной (§ 92), то полученные здесь уравнения суть вместе с тем уравнения поляры точки (x', y') относительно соответствующих кривых.

122. Нормали. Если мы проведем в какой-нибудь точке M кривой (черт. 94) касательную TT' и в точке прикосновения восставим к этой касательной перпендикуляр NN', то этот перпендикуляр называется нормалью к кривой в данной точке.



Черт. 94

Выведем уравнения нормалей к эллипсу и к гиперболе. Возьмем уравнение эллипса относительно главных осей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и составим уравнение нормали в точке $(x'\ y')$ этой кривой. Так как нормаль проходит через точку (x', y'), то уравнение нормали имеет вид (§ 56)

$$A(x - x') + B(y - y') = 0.$$

Так как нормаль перпендикулярна к касательной и кривая отнесена к прямоугольным осям координат, то для получения коэффициентов A и B нужно в уравнении касательной переставить коэффициенты при x и y, переменив знак у одного из них (§ 54). Уравнение касательной к эллипсу в точке (x', y') есть

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

Коэффициенты при x и y равны здесь $\frac{x'}{a^2}$ и $\frac{y'}{b^2}$. Следовательно, уравнение нормали к эллипсу в точке (x', y') есть

$$\frac{y'}{b^2}(x - x') - \frac{x'}{a^2}(y - y') = 0. \qquad (17)$$

Так как уравнение гиперболы относительно главных осей отличается от уравнения эллипса только знаком при b^2, то уравнение нормали к гиперболе будет

$$\frac{y'}{b^2}(x - x') + \frac{x'}{a^2}(y - y) = 0. \qquad (18)$$

123. Сопряженные диаметры. Асимптоты. Мы знаем, что угловые коэффициенты двух сопряженных диаметров кривой 2-го порядка связаны между собою уравнением (34) § 89

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0.$$

Применим это соотношение к уравнению эллипса (10) мы имеем

$$a_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \frac{1}{b^2}$$

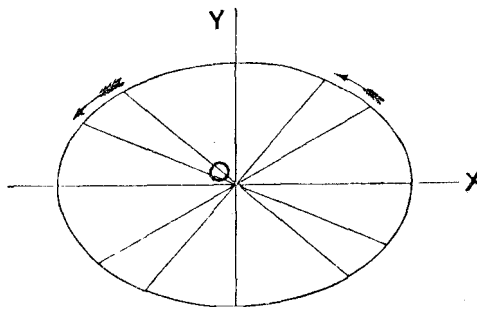
Подставив эти значения в предыдущее соотношение, находим

$$\frac{1}{a^2} + \frac{kk'}{b^2} = 0,$$

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}$$

Так выражается для уравнения (10) зависимость между угловыми коэффициентами двух сопряженных диаметров эллипса. Так как произведение угловых коэффициентов k и k' отрицательно, то знаки их различны, и два сопряженные диаметра эллипса расположены в смежных четвертях эллипса (черт. 95).

Пусть один из коэффициентов, напр. k получает положительные возрастающие значения. Тогда, как показывает уравнение (19), k' будет получать отрицательные значения, убывающи



Черт. 95.

по абсолютной величине. Очевидно, что убывая по абсолютной величине и будучи отрицательным, k' будет алгебраически возрастать. Так как с возрастанием тангенса возрастает и угол, то отсюда следует что, при вращении диаметра эллипса сопряженный ему диаметр вращается в ту же сторону.

Из соотношения (19) следует далее, что в эллипсе диаметр никогда не совпадает со своим сопряженным В самом деле, полагая в (19) $k' = k'$. находим $k = \pm i\frac{b}{a}$ т.-е. получаем для k мнимое значение. Действительно, диаметр, совпадающий с ему сопряженным, есть асимптота кривой, а эллипс действительных асимптот не имеет.

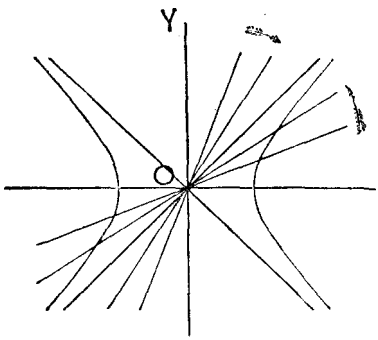
Так как уравнение гиперболы отличается от уравнения эллипса только знаком при b^2, то связь между угловыми коэффициентами двух сопряженных диаметров гиперболы есть

$$\frac{1}{a^2} - \frac{kk'}{b^2} = 0,$$

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (20)$$

Оно показывает, что угловые коэффициенты двух сопряженных диаметров гиперболы имеют одинаковые знаки. Отсюда следует, что два сопряженных диаметра гиперболы лежат в одной и той же четверти (черт. 96). Если абсолютная величина k бу-

дет возрастать, то абсолютная величина k' будет убывать; а так как k и k' имеют для гиперболы одинаковые знаки, то они будут изменяться в противоположных направлениях. Таким образом при вращении диаметра гиперболы сопряженный ему диаметр вращается в противоположную сторону.



Черт. 96.

Диаметры, совпадающие со своими сопряженными, т.-е. асимптоты, у гиперболы существуют (§ 90). Положив в (20) $k=k'$, мы найдем для угловых коэффициентов асимптот гиперболы (12) выражение

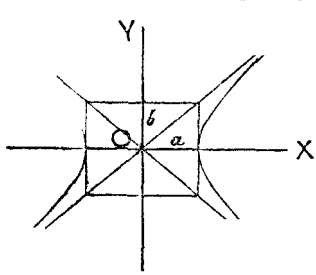
$$k=\pm\frac{b}{a}. \tag{21}$$

Таким образом, уравнения асимптот этой гиперболы будут

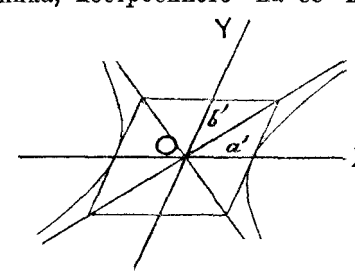
$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x. \tag{22}$$

Эти уравнения могли быть получены непосредственно из уравнения (6) § 114.

Из уравнений (22) нетрудно видеть, что асимптоты гиперболы проходят через точки $(\pm a, \pm b)$, и, следовательно, совпадают с диагоналями прямоугольника, построенного на ее полуосях (черт. 97). Точно также, исходя из уравнения (11'), мы увидим, что асимптоты совпадают с диагоналями параллелограмма, построенного на любой паре сопряженных полудиаметров гиперболы (черт. 98).

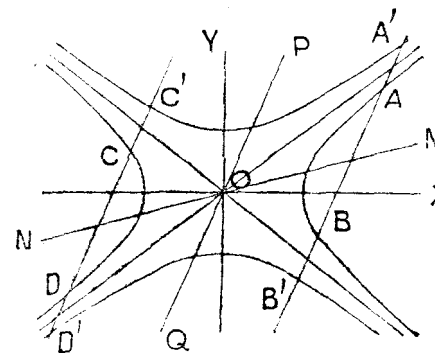


Черт. 97.



Черт. 98.

Так как уравнение сопряженной гиперболы получается посредством перемены знаков при a^2 и b^2 (§ 117), то для двух сопряженных гипербол уравнение (20) имеет одинаковый вид. Это показывает, что две сопряженные гиперболы имеют общую систему сопряженных диаметров и, в частности, общие асимптоты. Таким образом диаметры MN и PQ (черт. 99) являются сопряженными одновременно для обоих сопряженных гипербол, и диаметр MN делит пополам как хорды AB, CD первой гиперболы, параллельные диаметру PQ, так и хорды $A'B'$, $C'D'$ второй гиперболы, параллельные тому же диаметру.

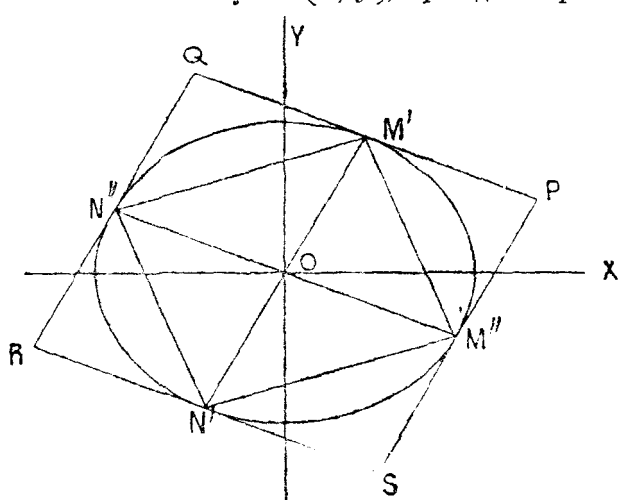


Черт. 99.

124. Теоремы Аполлония. Рассмотрим эллипс, отнесенный к главным осям (черт. 100),

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Возьмем на нем точку M' (x', y'), проведем через нее диаметр MN' и будем искать конечные точки диаметра, ему со-



Черт. 100.

пряженного. Пусть будет $M''(x'',y'')$ одна из этих точек. Так как точки M' и M'' лежат на эллипсе, то мы имеем

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1, \tag{23}$$

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1. \tag{24}$$

Составим уравнения сопряженных диаметров $M'N'$ и $M''N''$. Так как диаметр $M'N'$ проходит через точку M' и, кроме того, через начало координат, то его уравнение будет (§ 57) $\frac{y}{y'}=\frac{x}{x'}$, или $y=\frac{y'}{x'}x$. Таким образом, угловой коэффициент диаметра $M'N'$ есть

$$k=\frac{y'}{x'}.$$

Мы знаем (§ 123), что угловые коэффициенты сопряженных диаметров эллипса связаны между собою соотношением

$$kk'=-\frac{b^2}{a^2}.$$

Вставляя сюда вместо k его величину, найдем

$$k'=-\frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Поэтому уравнение диаметра $M''N''$ будет

$$y=-\frac{b^2x'}{a^2y'}x,$$

или

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0.$$

Заметим, что это уравнение отличается от уравнения (14) § 121 касательной в точке M' только тем, что в уравнении касательной свободный член равен не нулю, а единице. Это доказывает еще раз (§ 100), что касательная в конце диаметра параллельна диаметру сопряженному.

Так как точка M'' лежит на диаметре $M''N''$, то ее должны удовлетворять уравнению этого диаметра. Потому имеем

$$\frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} = 0. \qquad (25)$$

Заметим, что уравнение (25) симметрично относительно координат концов двух сопряженных диаметров x', y' и x'', y'', как это и должно быть вследствие того, что сопряженность двух диаметров взаимна.

Решая уравнения (24), (25), мы получим искомые координаты x'', y'' точки M''. Представим уравнение (25) в виде пропорции

$$\frac{x''}{a} : -\frac{y'}{b} = \frac{y''}{b} : \frac{x'}{a}$$

и обозначим через μ величину обоих отношений. Мы получим

$$\frac{x''}{a} = -\frac{y'}{b}\mu, \quad \frac{y''}{b} = \frac{x'}{a}\mu.$$

Внося эти выражения в уравнение (24), будем иметь:

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right)\mu^2 = 1,$$

или, на основании соотношения (23)

$$\mu^2 = 1,$$

откуда

$$\mu = \pm 1.$$

Таким образом, для x'' и y'' получаются выражения

$$\frac{x''}{a} = \mp\frac{y'}{b}, \quad \frac{y''}{b} = \pm\frac{x'}{a}.$$

Мы получили для x'', y'' две системы значений, так как диаметр $M''N''$ встречает эллипс в двух точках. Эти значения равны и противоположны, так как оба конца диаметра равно удалены от центра

Заменив в (23) $\frac{y'}{b}$ через $\pm\frac{x''}{a}$, получим

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{x''^2}{a^2}=1, \text{ или } x'^2+x''^2=a^2.$$

Точно также, заменив в (23) $\frac{x'}{a}$ через $\pm\frac{y''}{b}$, будем иметь

$$\frac{y'^2}{b^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1, \text{ или } y'^2+y''^2=b^2.$$

Сложив два полученных равенства, найдем:

$$(x'^2+y'^2)+(x''^2+y''^2)=a^2+b^2.$$

Обозначим через a' и b' длины сопряженных полудиаметров OM' и OM''. Тогда предыдущее равенстве примет следующий вид:

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2. \tag{26}$$

Это дает нам первую теорему Аполлония, сумма квадратов каждых двух сопряженных полудиаметров эллипса равна сумме квадратов его полуосей.

Далее, заменив в (23) один из множителей $\frac{x}{a}$ через $\frac{y''}{b}$ и один из множителей $\frac{y'}{b}$ через $-\frac{x''}{a}$, получим

$$\frac{x'y''-x''y'}{ab}=1.$$

Представим это соотношение в виде

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}ab.$$

Левая часть равенства представляет площадь треугольника $M'M''O$ (§ 60). Поэтому, обозначив через ω угол между диаметрами $M'N'$, $M''N''$, получим

$$\frac{1}{2}a'b'\sin\omega=\frac{1}{2}ab,$$

или

$$a'b'\sin\omega=ab. \tag{27}$$

Так как треугольник $M'M''O$ есть половина параллелограмма $OM'PM''$, то это соотношение дает нам вторую теорему Аполлония: площадь параллелограмма, построенного на двух сопряженных полудиаметрах эллипса, равна площади прямоугольника, построенного на полуосях.

Так как касательная в конце диаметра параллельна диаметру сопряженному, то проведя касательныя в точках M', M'', N', N'', мы получим описанный параллелограмм $PQRS$, стороны которого параллельны диаметрам M', N', $M''N''$. Отсюда ясно, что параллелограмм $OM'QM''$ составляет $^1/_4$ параллелограмма $PQRS$, и потому вторую теорему Аполлония можно представить еще в следующем виде: площадь описанного параллелограмма, стороны которого параллельны двум сопряженным диаметрам эллипса, равна площади прямоугольника, стороны которого параллельны главным осям.

Так как каноническое уравнение гиперболы получается из уравнения эллипса изменением знака у b^2, то для гиперболы

$$\frac{x}{a} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

уравнения (26), (27) будут иметь вид:

$$a' - b' = a^2 - b^2 \tag{28}$$

$$a'b' \sin\omega = ab. \tag{29}$$

где a' — обозначает длину одного из действительных полудиаметров гиперболы, а b' — длину сопряженного мнимого полудиаметра. Этим уравнениям можно дать геометрическое толкование, аналогичное тому, которое мы имели в случае эллипса.

125. Окружность и равносторонняя гипербола. Остановимся на том случае, когда оси эллипса или гиперболы равны между собою. Положив в уравнении (10) $b = a$, получим

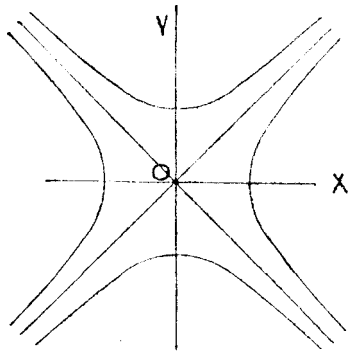
$$x + y^2 = a^2.$$

Это—уравнение окружности с центром в начале координат и с радиусом a. Таким образом, окружность есть эллипс, которого оси равны между собою.

Положив в уравнении (12) $b = a$, будем иметь

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{30}$$

Это уравнение представляет гиперболу, у которой действительная и мнимая оси равны между собою. Такая гипербола называется равносторонней. Формула (21) показывает, что для равносторонней гиперболы угловые коэффициенты асимптот относительно действительной оси равны ± 1. Таким образом, угол между каждою асимптотою и осью равносторонней гиперболы равен половине прямого, и, следовательно, угол между асимптотами равносторонней гиперболы, или ее асимптотический угол, равен прямому углу. Из уравнений (13) § 117 видно, что мнимая ось каждой из двух сопряженных гипербол равна действительной оси другой гиперболы. Отсюда следует, что равносторонняя гипербола одинакова с своею сопряженною (черт. 101).



Черт. 101.

Мы уже знаем (§ 101), что уравнение 2-й степени представляет окружность, если его коэффициенты удовлетворяют двум условиям:

$$a_{11} = a_{22},\ a_{12} = a_{11}\cos\omega,$$

которые для прямоугольных координат обращаются в следующие:

$$a_{11} = a_{22},\ a_{12} = 0.$$

Посмотрим, при каких условиях уравнение 2-й степени в косоугольных координатах представляет равностороннюю гиперболу. Мы видели, что асимптоты равносторонней гиперболы взаимно-перпендикулярны. Угловые коэффициенты асимптот определяются из уравнения (36) § 90:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0.$$

Если обозначим корни этого уравнения через k_1 и k_2, то

перпендикулярности асимптот представится в виде

$$1 + (k_1 + k)\cos\omega + k_1 k^2 = 0$$

свойству корней квадратного уравнения имеем

$$k_1 + k_2 = -\frac{2a_{12}}{a_{22}}, \quad k_1 k_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}}$$

Внося эти выражения в предыдущее соотношение, получим условие, при котором уравнение 2-й степени представляет равностороннюю гиперболу:

$$a_{11} + a_{22} - 2\,a_{12}\cos\omega = 0. \tag{31}$$

Для прямоугольных координат это условие принимает вид

$$a_{11} + a_{22} = 0.$$

126. Эллипс, как проекция круга. Возьмем уравнения эллипса (10)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Рассмотрим круг радиуса a с тем же центром и обозначим его ординаты, в отличие от ординат эллипса через y' так что его уравнение будет:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Вычисляя ординаты эллипса и круга, соответствующие одной и той же абсциссе, находим:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 + x^2},$$
$$y' = \pm\sqrt{a^2 + x^2},$$

откуда

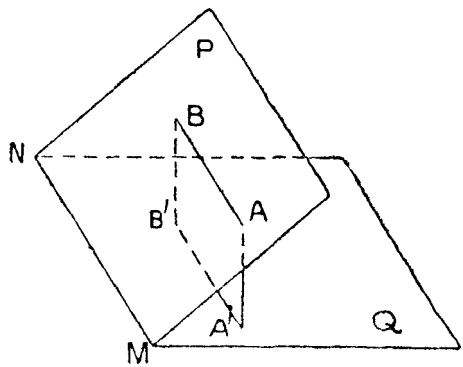
$$y = \frac{b}{a}y'. \tag{32}$$

Это показывает, что если мы имеем эллипс и концентрический с ним круг, радиус которого равен большой полуоси эл-

липса, то мы получим ординату каждой точки эллипса, уменьшив ординату соответствующей точки окружности в отношении $b:a$.

Из этого предложения следует, что каждый эллипс можно рассматривать, как проекцию некоторого круга. Покажем это.

Возьмем две пересекающиеся плоскости (черт. 102). Если из каждой точки одной плоскости P мы опустим перпендикуляры на другую плоскость Q, то основание каждого перпендикуляра называется проекцией на плоскость Q той точки, из которой опущен перпендикуляр. Точно также, если в плоскости P мы имеем прямую линию, то опустив перпендикуляры из концов этой линии на плоскость Q и соединив основания этих перпендикуляров, получим проекцию прямой на плоскость Q.



Черт. 102.

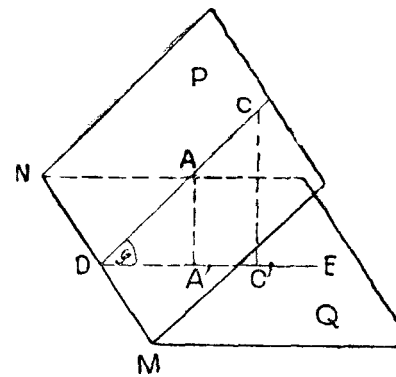
Линия MN пересечения плоскостей P и Q называется осью проекций. Предположим, что мы проектируем на плоскость Q отрезок AB, параллельный оси проекций MN. Легко видеть, что длина проекции $A'B'$ этого отрезка равна длине самого отрезка AB. В самом деле, линия AB параллельна оси проекций; следовательно, она параллельна и плоскости Q, так как прямая, параллельная прямой, лежащей в некоторой плоскости, параллельна самой плоскости. Далее, мы знаем, что если прямая AB параллельна плоскости Q, и через эту прямую проведена плоскость, пересекающая плоскость Q то линия пересечения этих плоскостей $A'B'$ будет параллельна AB. С другой стороны, AA' и BB', как линии перпендикулярные к одной и той же плоскости Q, параллельны между собою; следовательно, фигура $ABB'A'$ есть прямоугольник и $A'B'=AB$. Итак, отрезки, параллельные оси проекций, сохраняют при проектировании свою длину.

Рассмотрим теперь отрезок AC, перпендикулярный к оси проекций (черт. 103); его проекция есть $A'C'$. Продолжим AC и $A'C'$ до взаимного пересечения в D. Угол ADA' есть линейный угол двугранного угла между плоскостями, так как обе стороны

его AD и $A'D$ перпендикулярны к линии пересечения MN плоскостей P и Q. Так как $A'C'$ есть проекция отрезка AC на прямую DE, то по § 25 имеем

$$A'C' = AC\cos\varphi.$$

Итак, если проектируемый отрезок перпендикулярен к оси проекций, то длина его проекции равна длине проектируемого отрезка, умноженной на косинус угла между обоими плоскостям.



Черт. 103.

Выше мы видели, что если y есть ордината какой-нибудь точки эллипса с полуосями a и b, а y'—ордината соответствующей точки круга радиуса a, то

$$y = \frac{b}{a}y'.$$

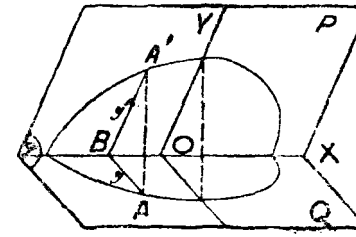
По предположению, $b < a$, так как a есть большая полуось эллипса; поэтому $\frac{b}{a} < 1$ и, мы можем положить

$$\frac{b}{a} = \cos\varphi, \tag{32}$$

где φ есть некоторый угол. Тогда

$$y = y'\cos\varphi.$$

Это показывает, что при равных абсциссах ордината y какой-нибудь точки эллипса может быть рассматриваема, как проекция соответствующей ординаты y' некоторого круга, радиус которого равен большой оси эллипса, если плоскость круга наклонена к плоскости эллипса под углом φ, определяемым соотношением (33).



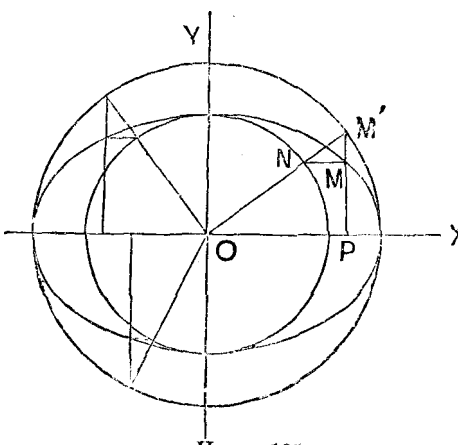
Черт. 104.

Примем (черт. 104) ось проекций за ось абсцисс и опишем в плоскости P окружность радиуса a. Если мы будем проектировать

все точки этой окружности на плоскость Q, наклоненную к первой под углом φ, то ясно, что абсциссы этих точек, как линии, параллельные оси проекций, сокращаться не будут, а ординаты будут сокращаться в отношении $\cos\varphi : 1$, и, следовательно, на основании сказанного выше, мы получим в проекции эллипс. Если $\cos\varphi = \frac{b}{a}$, то малая полуось эллипса будет равна b.

Во избежание излишней сложности на черт. 106 представлены лишь половины эллипса и круга, лежащие по одну сторону оси проекций OX.

127. Свойство эллипса, выражаемое равенством (32), дает удобный способ построения эллипса по точкам. Пусть нам даны полуоси эллипса a, b Опишем из центра две окружности радиусами равными большой и малой полуосям (черт. 105) Если мы возьмем ординату какой-нибудь точки M' на большей окружности, то мы получим из нее ординату соответствующей точки эллипса, если сократим ее в отношении $b : a$. Соединим M' с центром и проведем из точки N, в которой прямая OM' встречает малую окружность, прямую NM параллельную большой оси; точка пересечения M этой прямой с ординатою PM' будет принадлежать эллипсу. Действительно, угол $OM'P$, пересеченный двумя параллельным прямыми OP, NM, дает



Черт. 105.

$$\frac{PM}{PM'} = \frac{ON}{OM'} = \frac{b}{a},$$

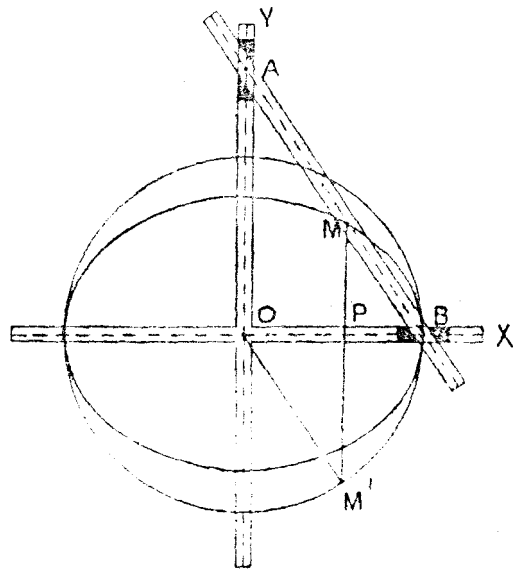
или

$$PM = PM' \cdot \frac{b}{a}.$$

Таким образом, ордината PM равна ординате PM', сокращенной в отношении $b : a$; следовательно, точка M лежит на

эллипсе. Повторяя это построение, мы получим сколько угодно точек эллипса.

На том же свойстве эллипса основано устройство эллипсографа. В точках A и B линейки (черт. 106) укреплены ползушки, которые могут двигаться в двух взаимно-перпендикулярных прорезах X, Y. Если мы поместим на линейке в точке M карандаш, то при движении линейки он начертит эллипс. Точка M может быть при этом взята как внутри отрезка AB, так и на его продолжении. Обозначим расстояния точки M от A и B через a и b и рассмотрим одно из положений линейки. Прове-



Черт. 106.

дем из центра O отрезок OM', равный и параллельный AM. При движении линейки точка M' опишет окружность радиуса a, и так как отрезки OM' и AM равны и параллельны, то прямая MM' будет перпендикулярна к оси X, так что PM и PM' будут ординатами точек M и M'. Из подобных треугольников PMB, $PM'O$ имеем

$$\frac{PM}{PM'} = \frac{MB}{OM'} = \frac{b}{a},$$

или

$$PM = PM' \cdot \frac{b}{a}.$$

Так как точка M' лежит на окружности, то, на основании предыдущей теоремы, точка M принадлежит эллипсу.

Если, как в нашем примере, точка M взята между точками A и B, то соответственные ординаты в эллипсе и круге лежат по разные стороны оси X; но так как обе кривыя расположены симметрично относительно оси X, то это обстоятельство не имеет значения.

128. Уравнение гиперболы относительно асимптот. Уравнение гиперболы принимает особенно простой вид, если осями координат служат асимптоты кривой. Так как асимптоты пересекаются в центре, то уравнение не содержит первых степеней координат (§ 112). Угловые коэффициенты асимптот удовлетворяют уравнению (36) § 90. Мы предполагаем, что асимптоты служат осями координат. Угловой коэффициент оси X есть $k = 0$, а оси Y — $k = \infty$ (§ 52). Следовательно, если мы примем асимптоты за оси координат, то одно из решений уравнения

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

должно быть $k = \infty$, а другое $k = 0$. Поэтому старший член и известный член уравнения должны быть равны нулю:

$$a_{11} = a_{22} = 0.$$

Таким образом, уравнение гиперболы относительно асимптот имеет вид

$$2a_{12}xy + a_{33} = 0,$$

или, обозначая $-\frac{a_{33}}{2a_{12}}$ через m,

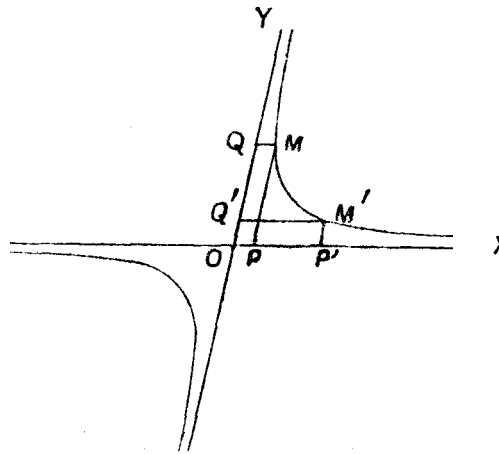
$$xy = m. \qquad (33)$$

Из последнего уравнения имеем

$$y = \frac{m}{x}.$$

Отсюда видно, что с увеличением x ордината y беспредельно убывает; так как расстояние точки (x, y) от оси X выражается в виде $y \sin\omega$, где ω — координатный угол, то это показывает, что ветви гиперболы по мере удаления в бесконечность беспредельно приближаются к своим асимптотам.

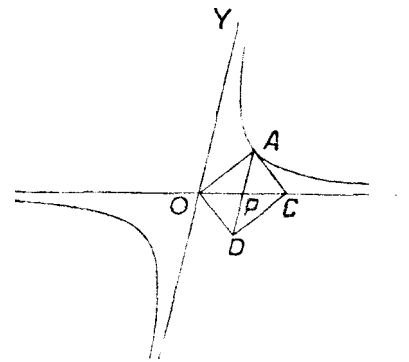
Уравнение (33) имеет простое геометрическое значение. Помножив обе части его на $\sin\omega$, где ω — координатный угол, мы найдем, что левая часть $xy\sin\omega$ представляет площадь параллелограмма $OPMQ$, построенного на координатах точки M гиперболы (черт. 107), и уравнение (33) выражает, что для всех точек гиперболы эта площадь имеет одну и ту же величину $m\sin\omega$.



Черт. 107.

Таким образом, гипербола есть геометрическое место вершин равновеликих параллелограммов, две стороны которых лежат на двух данных пересекающихся прямых. Эти прямыя суть асимптоты гиперболы.

Найдем выражение коэффициента m в уравнении (33) через a и b — полуоси гиперболы. Для этого выразим через a и b координаты какой-нибудь точки гиперболы относительно асимптот и подставим их в уравнение (33); тогда m будет выражено через a и b. Возьмем вершину гиперболы A (черт. 108); ее координаты суть OP и PA. Так как асимптоты параллельны диагоналям прямоугольника $AODC$, построенного на полуосях гиперболы (§ 123), то, заме-



Черт. 108.

чая, что OP и PA составляют половины диагоналей этого прямоугольника, имеем

$$OP = AP = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Так как OP и PA суть координаты точки A гиперболы относительно асимптот, то их значения должны удовлетворять уравнению (33). Отсюда имеем искомое выражение для m:

$$m = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

129. Составим для уравнения (33) соотношение между угловыми коэффициентами сопряженных диаметров гиперболы. В общем случае это соотношение имеет вид (§ 87)

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0.$$

Так как в уравнении (3) мы имеем $a_{11} = 0$, $a_{12} = \frac{1}{2}$, $a_{22} = 0$, то предыдущее условие обращается здесь в

$$k + k' = 0.$$

Таким образом, *если гипербола отнесена к своим асимптотам, то угловые коэффициенты ее сопряженных диаметров равны и противоположны.*

Найдем сложное отношение двух сопряженных диаметров и двух асимптот гиперболы. Известно (§ 64), что сложное отношение четырех прямых

$$U = 0,\ V = 0,\ U - kV = 0,\ U - k'Y = 0,$$

равно $\frac{k}{k'}$. Возьмем уравнение гиперболы в виде (33). Так как асимптоты приняты за оси координат, то их уравнения суть

$$y = 0, \quad x = 0.$$

Уравнения пары сопряженных диаметров имеют вид

$$y - kx = 0, \quad y - k'x = 0,$$

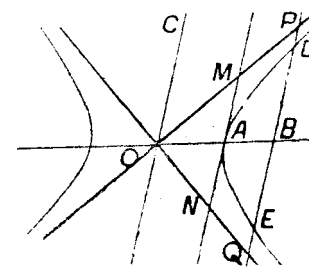
причем, как мы видели выше, $k' = -k$. Вычисляя сложное отношение этих четырех прямых, находим

$$\frac{k}{k'} = -1.$$

Таким образом (§ 12), асимптоты делят гармонически углы между каждой парой сопряженных диаметров гиперболы.

В частности, в равносторонней гиперболе каждая из двух асимптот делит пополам все углы между сопряженными диаметрами

Отсюда получаются два важных свойства асимптот. Рассмотрим два сопряженных диаметра OB, OC гиперболы и касательную MN в конце A того из диаметров, который встречает гиперболу в действительных точках (черт. 109). Эта касательная параллельна диаметру сопряженному (§ 98). По доказанному, асимптоты и два сопряженных диаметра образуют гармонический пучек; следовательно, и в пересечении с касательною MN эти лучи дадут четыре гармонических точки (§ 65). Точка пересечения касательной с диаметром OB есть точка прикосновения A: точка пересечения касательной с диаметром OC лежит в бесконечности, так как касательная параллельна этому диаметру. Но если одна из гармонических точек есть бесконечно-удаленная, то сопряженная ей делит отрезок между двумя остальными точками пополам (§ 12); поэтому точка A есть средина отрезка MN. Таким образом, отрезок между асимптотами каждой касательной к гиперболе делится в точке прикосновения пополам.



Черт. 109.

Возьмем теперь вместо касательной одну из секущих, параллельных диаметру OC. Пусть будет DE эта секущая. Рассуждая как и в случае касательной, мы убедимся, что точка пересечения секущей с сопряженным диаметром OB есть средина отрезка PQ секущей между асимптотами; поэтому

$$BP = QB.$$

С другой стороны, так как хорда DE параллельна диаметру OC, то она делится пополам сопряженным диаметром OB, и мы имеем

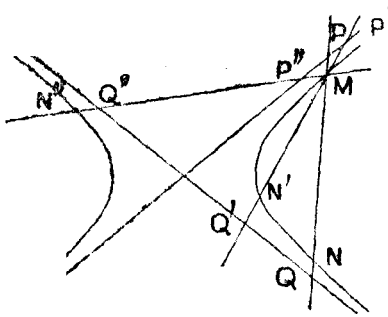
$$BD = EB.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получим

$$DP = QE.$$

Так как диаметр OC мог иметь произвольное направление, то последнее равенство показывает, что отрезки каждой секущей между гиперболою и ее асимптотами попарно равны между собою.

Это свойство гиперболы дает простое построение гиперболы по точке и двум асимптотам. Пусть нам дана точка M гиперболы и две ее асимптоты (черт. 110). Проведем через M произвольную прямую PQ; она пересечет асимптоты в точках P и Q. Возьмем отрезок MP от точки M до пересечения секущей с одною из асимптот и отложим его на той же секущей от точки ее пересечения с другою асимптотою; полученная точка N будет принадлежать гиперболе. Проводя через M секущ я по различным направлениям, мы получим таким образом произвольное число точек N, N', N'' гиперболы.



Черт. 110.

130. Рассмотрим гиперболу, отнесенную к асимптотам (черт. 111). Пусть будет $M(x', y')$ точка кривой, QM, PM ее координаты, AB касательная в этой точке. По доказанному, отрезки AM и MB равны, а следовательно равны и треугольники APM и MQB. Отсюда имеем

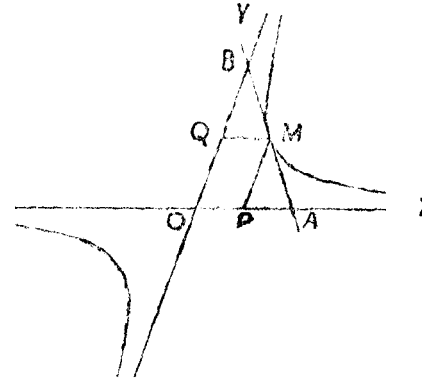
$$PA = QM = x', \quad QB = PM = y',$$

и следовательно

$$OA = OP + PA = 2x', \quad OB = OQ + QB = 2y' \qquad (35)$$

образом отрезки, отсекаемые касательною и гиперболе на ее асимптотах, равны удвоенным ординатам точки косновения.

Найдем площадь треугольника OAB. Обозначая между асимптотами ω, будем иметь



Черт. 111.

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin\omega = 2x'y' \sin\omega,$$

или на основании (33),

$$\triangle OAB = 2m \sin\omega.$$

Так как полученное выражение не содержит координат точки прикосновения M, то оно будет одно и то же для всех точек гиперболы. Это показывает, что касательныя к гиперболе образуют с асимптотами равновеликие треугольники.

Мы могли бы также получить выражения (35), составив уравнение касательной к гиперболе (33). Представив это уравнение в однородной форме, получим

$$xy - mt^2 = 0.$$

Уравнение касательной в точке (x', y') по § 80 будет

$$\frac{1}{2}(xy' + yx') - m = 0$$

как точка (x', y') лежит на кривой (33), то мы m через $x'y'$ и получим

$$\frac{x}{2x'} + \frac{y}{2y'} = 1$$

основании § 47, это уравнение представляет прямую, на осях координат отрезки $2x'$ и $2y'$

131. Парабола. Так как парабола не имеет центра, то ее уравнение нельзя упростить тем способом, каким мы пользовались для центральных кривых, помещая начало координат в центре кривой (§ 112); но мы можем употребить здесь преобразование § 111, применимое ко всем кривым 2-го порядка, т. е. отнести параболу к одному из диаметров и к касательной в его конце. При этом уравнение параболы принимает вид (3) § 111:

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0.$$

Решая это уравнение относительно y^2 и обозначая $-\frac{a_{13}}{a_{22}}$ через p', получим каноническое уравнение параболы в виде

$$y^2 = 2p'x. \tag{36}$$

Так как мы можем принять за ось X любой диаметр параболы, то уравнение каждой параболы может быть приведено к виду (36) бесчисленными способами. В частности, если осью X служит главная ось параболы, а осью Y касательная в вершине, то уравнение параболы пишется в виде

$$y^2 = 2px, \tag{37}$$

причем оси координат делаются прямоугольными. Количество p в этом уравнении называется параметром параболы.

Так как парабола имеет только одну ось и эта ось встречает параболу только в одной точке, то парабола имеет только одну вершину.

Заметим, что мы можем, не нарушая общности, считать в уравнении (37) параметр p положительным. В самом деле, если бы p был отрицательным, то мы изменим положительное направление оси X в противоположное; тогда x обратится в $-x$, и уравнение (37) примет вид

$$y^2 = -2px.$$

Таким образом в новом уравнении параметром служит $-p$, т. е. число положительное. Это замечание относится также и к уравнению (36).

Очевидно, что при p положительном в уравнении (37) действительные значения y соответствуют только положительным

значениям x. Это показывает, что все точки параболы лежат по одну сторону от оси Y.

132. Чтобы привести уравнение параболы к виду (37), нужно знать ось параболы. Покажем, как в случае прямоугольных координат найти по уравнению параболы уравнение ее оси. Пусть мы имеем в прямоугольных координатах уравнение параболы (§ 79).

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0.$$

Уравнение пучка диаметров кривой есть (§ 88)

$$(\alpha^2 x + \alpha\beta y + a_{13}) + k(\alpha\beta x + \beta^2 y + a_{23}) = 0,$$

или

$$\alpha x + \beta y + \frac{a_{13} + k a_{23}}{\alpha + k\beta} = 0.$$

В этом уравнении диаметра k есть угловой коэффициент сопряженных ему хорд. Из последнего уравнения видно, что угловой коэффициент диаметров параболы равен $-\frac{\alpha}{\beta}$ (ср. § 89). Так как ось параболы перпендикулярна к сопряженным ей хордам, то угловой коэффициент этих хорд есть

$$k = -1: \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Подставив это значение k в уравнение диаметров параболы, мы получим уравнение оси параболы в виде

$$\alpha x + \beta y + \frac{a_{13}\alpha + a_{23}\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

Найдем, например, уравненение относительно вершины для параболы

$$(3x - 4y)^2 + 10x - 110y + 50 = 0,$$

отнесенной к прямоугольным декартовым координатам. Уравнение главной оси для нее будет

$$3x - 4y + \frac{10 \cdot 3 + 55 \cdot 4}{3^2 + 4^2} = 0.$$

Решив его совместно с уравнением параболы, найдем координаты вершины

$$x = -2,\ y = 1.$$

Обозначая через φ угол главной оси параболы с осью X, будем иметь

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4} \text{ и отсюда } \cos\varphi = \frac{4}{5},\quad \sin\varphi = \frac{3}{5}.$$

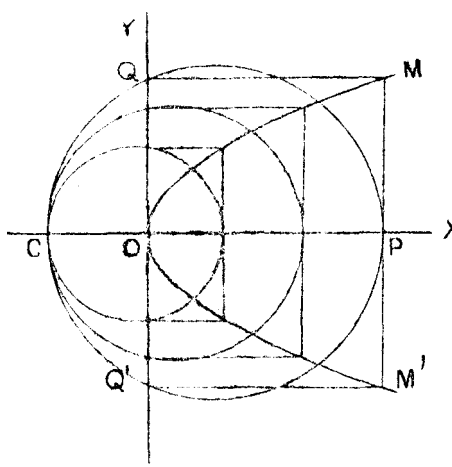
Таким образом формулы преобразования координат (§ 31) в нашем случае будут

$$x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}x' - 2,\quad y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' + 1.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение параболы, мы получим ее уравнение относительно вершины:

$$y'^2 = 2x'.$$

133. Построение параболы. Уравнение (37) показывает, что ордината y точки параболы есть средняя пропорциональная между



Черт. 112.

абсциссою той же точки x и удвоенным параметром $2p$. Отсюда получается простой способ построения параболы по точкам. Отложим на оси X (черт. 112) в отрицательном направлении от-

резок $OC = 2p$. Если мы затем отложим на оси X абсциссу OP и построим на OP, как на диаметре, окружность, то отрезки, отмеченные этою окружностью на оси Y, будут, по известному свойству окружности, средними пропорциональными между OC и OP; поэтому отрезки OQ и OQ' будут равны ординатам точек параболы, соответствующих абсциссе OP. Проводя из P, Q и Q' прямыя параллельно осям координат, мы получим в их пересечении две точки параболы M, M'. Изменяя абсциссу OP, мы можем построить таким образом сколько угодно точек параболы.

134. Рассмотрим две параболы. Поместив их так, чтобы их главные оси и вершины совпали (черт. 113), мы представим их уравнения в виде

$$y'^2 = 2p'x', \quad y''^2 = 2p''x''.$$

Перейдем от декартовых координат к полярным, поместив полюс в начале координат. Обозначим через ϱ', ϱ'' радиусы-векторы обеих парабол, соответствующие одному и тому же полярному углу φ. Формулы (13) § 32 дают

$$x' = \varrho' \cos\varphi, \quad y' = \varrho' \sin\varphi, \quad x'' = \varrho'' \cos\varphi, \quad y'' = \varrho'' \sin\varphi.$$

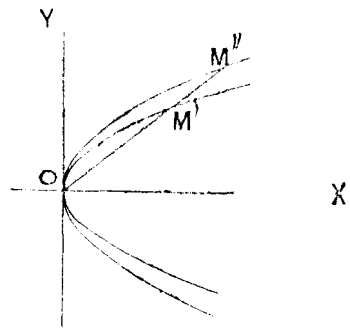
Подставляя эти выражения в уравнения парабол, получим

$$\varrho' \cos^2\varphi = 2p' \sin\varphi,$$
$$\varrho'' \cos^2\varphi = 2p'' \sin\varphi.$$

и отсюда

$$\frac{\varrho'}{\varrho''} = \frac{p'}{p''}.$$

Это показывает, что отношение соответственных векторов OM', OM'' обеих кривых (черт. 113) постоянно, т.-е не зависит от их направления.



Черт. 113.

Отсюда следует, что всякие две параболы подобны между собою (§ 115); их коэффициент подобия равен отношению их параметров.

135. Касательныя. Если уравнение параболы дано в виде (37), то приведя его к однородному виду, будем иметь

$$F_x = -pt, \quad F_y = y, \quad F_t = -px.$$

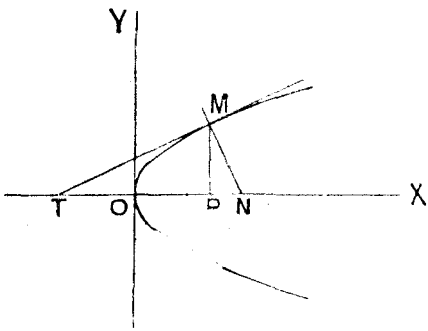
Подставив эти выражения в уравнение касательной (20) § 80 и полагая $t = t' = 1$, получим уравнение касательной к параболе (37) в точке (x', y') в виде

$$-px + y'y - px' = 0,$$

или

$$yy' = p(x + x'). \tag{38}$$

Если точка (x', y') есть какая-нибудь точка плоскости, то уравнение (38) представляет поляру точки (x', y') относительно параболы (37) (§ 92).



Черт. 114.

Пусть парабола отнесена к главной оси и к касательной в вершине. Проведем касательную к кривой в точке $M(x', y')$ (черт. 114). Определим точку встречи этой касательной с осью параболы; положив в уравнении (38) $y = 0$, получим:

$$x + x' = 0, \text{ или } x = -x',$$

т.-е. абсцисса точки пересечения касательной с осью параболы равна и противоположна абсциссе точки прикосновения. Отсюда следует, что если мы имеем отрезок TM касательной от точки прикосновения до оси параболы, то проекция TP этого отрезка на ось делится в начале координат пополам. Таким образом проекция на ось параболы отрезка касательной от точки прикосновения до оси делится в вершине параболы пополам. Проекция эта называется подкасательною, или субтангенсом кривой. Таким образом, субтангенс параболы равен удвоенной абсциссе точке прикосновения.

136. **Нормали**. Возьмем каноническое уравнение параболы (37). Из уравнения (38) находим угловой коэффициент касательной

$$k = \frac{p}{y'};$$

следовательно угловой коэффициент нормали (§ 122) равен

$$k' = -\frac{y'}{p},$$

и уравнение нормали в точке (x', y') будет

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x'). \tag{39}$$

Возьмем отрезок MN нормали от точки M кривой до точки пересечения нормали с осью. Проекция этого отрезка на ось называются субнормалью. Найдем длину субнормали параболы. Для этого найдем точку пересечения нормали с осью параболы. Полагая в уравнении нормали $y = 0$, получим

$$p y' = y'(x - x'),$$

или

$$x - x' = p.$$

Здесь x есть абсцисса точки пересечения нормали с осью X, т.-е. абсцисса точки N (черт. 114), x' есть абсцисса точки прикосновения, т.-е. точки M; следовательно $x - x' = PN$, т.-е. длине субнормали. Таким образом, в параболе длина субнормали есть величина постоянная, равная параметру параболы.

137. Уравнение относительно вершины. При совместном рассмотрении трех видов кривых второго порядка всего удобнее пользоваться такою формою уравнения этих кривых, которая будучи возможно более простою, могла бы вместе с тем представлять каждый из трех видов кривых. Мы получим такое уравнение, если отнесем все три вида кривых к осям координат, расположенным относительно этих кривых одинаковым образом. Так, мы видели в § 111, что уравнение всякой кривой 2-го порядка может быть приведено к виду (2), если мы примем за ось X один из диаметров кривой, а за ось Y — касательную в конце этого диаметра. В частности, если мы примем за ось X главную ось кривой, то касательная в ее конце будет к ней перпендикулярна, и мы будем иметь прямоугольную систему координат. Так как в этом случае началом координат служит вершина кривой, то уравнение кривой 2-го порядка относительно

главной оси и касательной в вершине обыкновенно называется уравнением относительно вершины.

Мы нашли в § 111, что уравнение кривой 2-го порядка относительно вершины имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0. \qquad (2)$$

Согласно § 117, оно представляет эллипс, если a_{11} и a_{22} имеют знаки одинаковые,—гиперболу, если эти знаки разные, и параболу, если $a_{11} = 0$.

Решая уравнение (2) относительно y^2, получим

$$y^2 = -2\frac{a_{13}}{a_{22}}x - \frac{a_{11}}{a_{22}}x^2.$$

Введем обозначения

$$-\frac{a_{13}}{a_{22}} = p, \quad -\frac{a_{11}}{a_{22}} = q.$$

Параметр p мы можем считать здесь, как и в случае параболы (§ 131), положительным, так как в противном случае мы могли бы переменить его знак, изменив положительное направление оси X в отрицательное. Что касается коэффициента q, то, на основании сказанного выше, он будет отрицательным для эллипса, положительным для гиперболы и равным нулю для параболы.

При таких обозначениях уравнение кривой 2-го порядка относительно вершины принимает вид

$$y^2 = 2px + qx^2. \qquad (43)$$

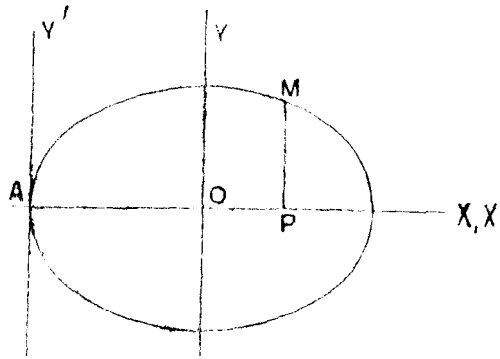
Найдем зависимость между p, q и полуосями a, b центральной кривой 2-го порядка. Возьмем уравнение центральной кривой относительно главных осей и, сохраняя направление осей, перенесем начало координат в одну из вершин кривой. При этом для сохранения возможно большего сходства между уравнениями трех видов кривых 2-го порядка мы будем переносить начало в ту вершину кривой, относительно которой кривая расположена так же, как расположена парабола относительно своей вершины. Так как в уравнении параболы (37) осью X служит главная ось кривой, а самая парабола лежит в положительную сторону от начала, считая по оси X, то и в центральных кри-

вых мы будем переносить начало в ту из вершин, лежащих на оси X, относительно которой ближайшие точки кривой лежат в положительном направлении, считая по оси X.

эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

отнесенный к главным осям. Согласно предыдущему замечанию, переносим начало координат в левую вершину $A(-a,0)$ (черт. 115).



Черт. 115.

Так как координаты нового начала суть $x=-a$, $y=0$, то формулы преобразования (7) § 29 принимают вид

$$x=x'-a, \quad y=y'.$$

Подставив эти выражения в уравнение эллипса, по упрощении получим

$$y'^2=2\frac{b^2}{a}x'-\frac{b^2}{a^2}x'^2.$$

Сравнив это уравнение с (40), найдем

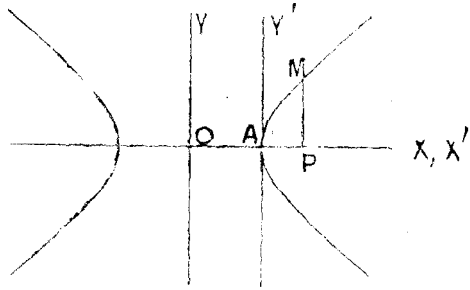
$$p=\frac{b^2}{a}, \quad q=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{41}$$

Для гиперболы, данной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

согласно предыдущему, начало координат должно перенести в правую вершину $A\ (+a,0)$ (черт. 156). Формулы преобразования координат будут здесь

$$x = x' + a, \quad y = y'.$$



Черт. 116.

Подставив эти выражения в уравнение гиперболы, после упрощения получим

$$y'^2 = 2\frac{b^2}{a}x' + \frac{b^2}{a^2}x'^2.$$

Сравнив это уравнение с (40), будем иметь

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad q = \frac{b^2}{a^2}. \tag{42}$$

Формулы (41) и (42) представляют выражения коэффициентов p и q через полуоси центральных кривых 2-го порядка

Из (41) и (42) получим для эллипса

$$a = -\frac{p}{q}, \quad b^2 = -\frac{p^2}{q^3}, \tag{43}$$

и для гиперболы

$$a = \frac{p}{q}, \quad b^2 = \frac{p^2}{q}. \tag{44}$$

138*. Уравнения кривых 2-го порядка относительно вершины выражают те свойства этих кривых, от которых три вида кривых 2-го порядка получили свои названия. Эти названия были им даны Аполлонием

Уравнение параболы

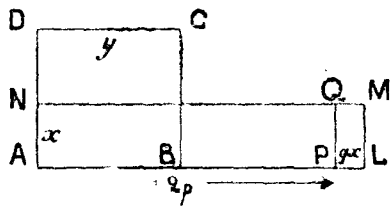
$$y^2 = 2px$$

показывает, что квадрат, построенный на ординате какой-нибудь точки параболы, равновелик прямоугольнику, построенному на удвоенном параметре кривой и на абсциссе той же точки. Таким образом, чтобы построить абсциссу, нужно превратить квадрат, построенный на ординате, в прямоугольник с данным основанием $2p$; его высота будет искомою абсциссою. В греческой геометрии превращение данного прямоугольника в равновеликий ему прямоугольник с данным основанием называлось приложением (*παραβολή*) данного прямоугольника к этому основанию; отсюда получилось название параболы.

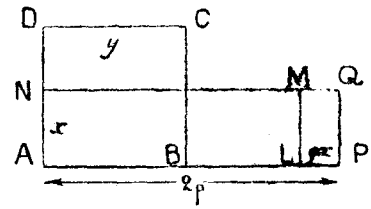
Уравнение гиперболы относительно вершины (40), представленное в виде

$$y^2 = 2px + qx \,.\, x,$$

показывает, что для получения абсциссы $x = AN$ (черт. 117) нужно квадрат $ABCD$, построенный на ординате $y = CD$, так



Черт. 117.



Черт. 118.

приложить к удвоенному параметру $2p$ в виде прямоугольника $ALMN$, чтобы избыток (*ὑπερβολή*) $PLMQ$ имел вид прямоугольника с данным отношением сторон q.

Так как в уравнении эллипса относительно вершины коэффициент q имеет отрицательное значение, то мы представим уравнение эллипса в виде

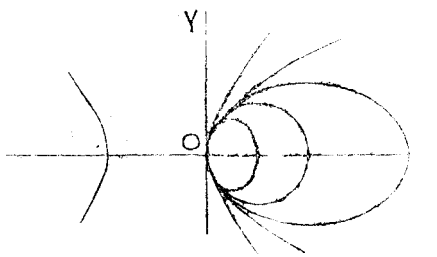
$$y^2 = 2px - qx.x.$$

понимая здесь под q положительное число. Это уравнение показывает, что в эллипсе для получения абсциссы нужно квадрат, построенный на ординате $y = CD$ (черт. 118), так приложить к удвоенному параметру, чтобы недостающая часть, или недостаток (*ἔλλειψις*) $LPQM$ имел вид прямоугольника с данным отношением сторон q.

139*. Положим,что в уравнении (40) коэффициент p, называемый параметром кривой 2-го порядка (ср. § 128), остается постоянным, а q получает всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Посмотрим, как будет при этом изменяться кривая, изображаемая этим уравнением. Так как переменный коэффициент q входит в уравнение (40) в первой степени, то уравнение изображает пучок кривых с общею осью и с общею касательною в одной из вершин. При $q<0$ кривыя пучка суть эллипсы, при $q=0$ — парабола, при $q>0$ — гиперболы.

При $q=0$ кривая (40) есть парабола. Будем давать q отрицательные значения. Тогда парабола обратится в эллипс, и формулы (43) показывают, что по мере того, как q будет удаляться от нуля, полуоси эллипса будут все уменьшаться. При $q=-1$ эллипс обращается в окружность, так как при этом получается $a=b$. При дальнейшем убывании коэффициента q эллипс будет, уменьшаясь, суживаться все более и более, и в пределе при $q=-\infty$ он обратится в пару прямых, сливающихся с осью Y. Действительно, разделив уравнение (40) на q и положив $q=-\infty$, мы получим уравнение $x^2=0$.

Будем теперь давать q положительные значения; тогда уравнение (40) будет представлять гиперболу. При весьма малом значении q правая ветвь гиперболы будет близка к параболе, левая же ветвь будет находиться далеко от оси Y. По мере того, как q будет расти, правая ветвь гиперболы будет вытягиваться по оси Y, и левая ветвь будет приближаться к правой. При $q=+\infty$ уравнение (40) обращается в $x^2=0$, и гипербола переходит в пару прямых, сливающихся с осью Y (черт. 119).



Черт. 119.

Мы видим, что в уравнении (40) парабола является общим пределом эллипсов и гипербол. Если коэффициент q будет стремиться к нулю, принимая отрицательные значения, мы получим параболу, как предел эллипсов; если же q будет стремиться к нулю от положительных значений, то парабола получится, как предел гипербол.

Из формул (43) и (44) видно, что при $q=0$ параметры a и b обращаются в бесконечность. Поэтому, рассматривая параболу, как предел эллипса и гиперболы, мы можем сказать, что парабола есть эллипс или гипербола с бесконечно большими осями.

Из тех же формул мы имеем

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{p}{a}$$

Это показывает, что при обращении центральной кривой в параболу, т.-е. при неограниченном возрастании a, обе полуоси стремятся к бесконечности с неодинаковою быстротою, так как отношение $\frac{b}{a}$ неограниченно убывает. Таким образом, рассматривая параболу, как предел центральной кривой, мы можем сказать, что оси параболы суть бесконечно большие величины разных порядков; так как при переходе к параболе отношение $\frac{a}{b^2}$ остается равным конечной величине $\frac{1}{p}$, то из двух осей параболы та, которая лежит на конечном расстоянии, есть бесконечно-большая величина второго порядка относительно другой оси, удалившейся в бесконечность.

140*. Инварианты кривой 2-го порядка Мы знаем, что уравнение одной и той же кривой имеет различный вид в зависимости от выбора осей координат, к которым эта кривая отнесена. Однако не следует думать, что можно соответствующим выбором осей координат, не меняя единиц длины, привести уравнение каждой данной кривой к любому виду. В самом деле, уравнение кривой 2-го порядка содержит шесть коэффициентов; после преобразования координат мы получим новое уравнение той же кривой, и шесть коэффициентов этого уравнения будут выражаться определенным образом через шесть коэффициентов первоначального уравнения и через четыре количества a, b, α, β, входящих в формулы преобразования (12) § 31 и определяющих положение новых осей координат относительно прежних. Исключив из шести выражений коэффициентов эти четыре параметра преобразования, мы получим два соотношения между коэффициентами преобразованного уравнения кривой и коэффициентами ее первоначального уравнения; эти соотношения будут иметь

место при всяком положении осей координат, так как в них не входят параметры преобразования a, b, α, β. Отсюда следует, что если мы, имея уравнение кривой 2-го порядка, отнесем эту кривую к новым осям координат, то коэффициенты преобразованного уравнения могут иметь не всякие значения, а только такие, которые удовлетворяют двум вышеуказанным соотношениям, или значения, им пропорциональные.

Если мы будем рассматривать не все преобразования координат, а только те, для которых новый координатный угол $\omega' = \beta - \alpha$ (§ 30) имеет данную величину, то в нашем распоряжении будет только три параметра a, b, α, и соответственно с этим мы будем иметь не два, а три соотношения между коэффициентами обоих уравнений кривой. Эти соотношения будут отличаться от предыдущих тем, что в них войдут, кроме коэффициентов уравнений, координатные углы ω и ω' первоначальной и новой системы координат.

Найдем эти три соотношения. Пусть уравнение кривой

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (45)$$

после преобразования обращается в

$$a'_{11}x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0, \qquad (45')$$

так что мы имеем тождественно

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \\ &= a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}'. \end{aligned} \qquad (46)$$

Нетрудно видеть, что в два из трех искомых соотношений войдут коэффициенты только старших членов обоих уравнений. Действительно, мы знаем, что старшие члены уравнения кривой не изменяются от перенесения начала координат; это показывает, что коэффициенты при этих членах не зависят от координат нового начала a, b, а только от углов α, β между новыми осями координат и прежнею осью X. Если новый координатный угол $\omega' = \beta - \alpha$ дан, то коэффициенты при старших членах преобразованного уравнения будут зависеть только от одного параметра преобразования α, откуда, по предыдущему, следует, что между тремя коэффициентами старших членов преобразованного уравнения и соответствующими коэффициентами первоначального уравнения должны существовать $3 - 1 = 2$ соотношения.

Так как старшие члены уравнения кривой не изменяются от перемены начала, то при выводе двух первых соотношений мы можем ограничиться рассмотрением только тех преобразований, при которых начало координат не изменяется. При выводе этих соотношений мы воспользуемся приемом, применяемым с пользою во многих вопросах аналитической геометрии и высшей алгебры. Рассмотрим какую нибудь точку (x, y); после преобразования ее координаты будут (x', y'). Так как, по предположению, начало координат при преобразовании не изменилось, то выражения квадратов расстояний точки (x, y) от начала координат по старой и по новой системе должны быть равны между собою, и мы будем иметь тождественно

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 = x'^2 + 2x'y'\cos\omega' + y'^2 \qquad (47)$$

Помножив обе части (47) на неопределенный множитель S и вычтя из (46), получим тождество

$$\begin{aligned}(a_{11} - S)x^2 + 2(a_{12} - S\cos\omega)xy + (a_{22} - S)y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + \\ + a_{33} = (a_{11}' - S)x'^2 + 2(a_{12}' - S\cos\omega')x'y' + (a_{22}' - S)y'^2 + \\ + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}'\end{aligned} \qquad (48)$$

Отсюда видно, что уравнения

$$\begin{aligned}(a_{11} - S)x^2 + 2(a_{12} - S\cos\omega)xy + (a_{22} - S)y^2 + \\ + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\end{aligned} \qquad (49)$$

и

$$\begin{aligned}(a_{11}' - S)x'^2 + 2(a_{12}' - S\cos\omega')x'y' + (a_{22} - S)y'^2 + \\ + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0\end{aligned} \qquad (49')$$

одну и ту же кривую, отнесенную к прежним и к новым осям координат. Найдем, при каком значении S эта кривая обращается в параболу. Уравнение (49) будет представлять параболу, если

$$(a_{11} - S)(a_{22} - S) - (a_{12} - S\cos\omega)^2 = 0 \qquad (50)$$

$$S^2\sin^2\omega - S(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0. \qquad (51)$$

Таким же образом для (49′) найдем условие

$$S^2\sin^2\omega' - S(a_{11}' + a_{22}' - 2a_{12}'\cos\omega') + (a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2) = 0. \qquad (51')$$

Так как уравнения (49) и (49′) представляют одну и ту же кривую, то уравнения (51) и (51′) должны давать для S одни и те же значения, и потому должно быть

$$\frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega} = \frac{a_{11}' + a_{22}' - 2a_{12}'\cos\omega'}{\sin\ \omega'} \tag{52}$$

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{22}^2}{\sin^2\omega} = \frac{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2}{\sin^2\omega'} \tag{53}$$

Равенства (52) и (53) представляют два искомых соотношения между коэффициентами первоначального и преобразованного уравнения кривой 2-го порядка и обоими координатными углами ω, ω'

Уравнение (50) имеет в теории кривых 2-го порядка большое значение. Положим, что оси координат взяты параллельно главным направлениям для данной кривой (§ 91). В таком случае будем иметь

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad a_{12} = 0,$$

и уравнение (50) примет вид

$$(a_{11} - S)(a_{22} - S) = 0,$$

откуда

$$S_1 = a_{11}, \quad S_2 = a_{22}.$$

Таким образом, корни уравнения (50) суть коэффициенты при квадратах координат в уравнении кривой относительно главных направлений и, в частности, относительно главных осей.

Чтобы получить третье соотношение между коэффициентами двух уравнений одной и той же кривой, рассмотрим уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{23}y + a_{33} - T = 0, \tag{54}$$

где T—произвольное число. После преобразования координат это уравнение обратится в

$$a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' - T = 0. \tag{54′}$$

Найдем, при каком значении T кривая, изображаемая этими

равнениями, обращается в пару прямых. Условие (25) § 82 для уравнения (54)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - T \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & T \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда находим

$$T = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Аналогичное выражение для T мы получим и из уравнения (54′). Но так как оба уравнения представляют одну и ту же кривую, отнесенную к двум различным системам осей, то оба выражения для T должны быть равны, и мы имеем третье искомое соотношение

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{vmatrix}} \tag{55}$$

Соотношения (52), (53), (55), имеют ту особенность, что каждое из них представляет равенство двух выражений, составленных одинаковым образом из коэффициентов двух уравнений кривой (45), (45′) и из соответствующих координатных углов. Они показывают, что три выражения

$$\frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}, \quad \frac{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}{\sin^2\omega}, \quad \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{56}$$

не меняют своей величины ни при каком преобразовании декартовых координат. Такие выражения называются инвариантами кривой 2-го порядка.

Последний полученный нами инвариант имеет простое значение: мы видели в § 113, что он представляет выражение свободного члена в уравнении кривой относительно центра. Так как в случае параболы знаменатель в этом инварианте обращается в безконечность, то вместо этого инварианта удобнее принять за третий инвариант выражение

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\sin^2 \omega} \tag{56}$$

представляющее частное второго и третьего из полученных нами инвариантов.

Обращение в нуль каждого из трех инвариантов связано с определенною особенностью соответствующей кривой, не зависящею от выбора осей координат. Как видно из §§ 125, 78 и 82, первый инвариант равен нулю для равносторонней гиперболы, второй - для параболы и третий—для распадающейся кривой 2-го порядка.

Заметим, что величина инварианта не меняется только при преобразовании координат, но она изменится, если обе части уравнения кривой будут умножены на одно и то же число. Поэтому, имея два уравнения одной и той же кривой, мы можем приравнивать между собою инварианты этих уравнений в том только случае, если одно уравнение было получено из другого только посредством замены одних координат другими при помощи формул преобразования координат, но не подвергалось при этом никаким другим преобразованиям.

141*. Пользуясь свойствами инвариантов кривых 2-го порядка, мы можем находить упрощенные уравнения этих кривых, не определяя положения новых осей координат, всякий раз как искомое уравнение содержит не более трех неизвестных коэффициентов. Пусть, например, нам дана кривая

$$3x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 4y = 0,$$

отнесенная к прямоугольным осям координат и требуется отнести ее к двум сопряженным диаметрам, угол между которыми равен 45^0. Составим инварианты данного уравнения. Так как $\omega = \frac{\pi}{2}$, то они будут

$$3 + 1 = 4, \quad 3 \cdot 1 - 1 = 2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12.$$

С другой стороны, преобразованное уравнение должно иметь вид (§ 116)

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33} = 0$$

По условию, $\sin \omega' = \frac{1}{2}$; поэтому инварианты преобразованного уравнения будут

$$2(a_{11}' + a_{22}'), \quad 2a_{11}'a_{22}', \quad 2a_{11}'a_{22}'a_{33}'.$$

Отсюда получаем условия

$$a_{11}' + a_{22}' = 2, \; a_{11}'a_{22}' = 1, \; a_{11}'a_{22}'a_{33}' = -6$$

из которых находим

$$a_{11}' = a_{22}' = 1, \; a_{33}' = -6.$$

Следовательно, искомое уравнение будет

$$x'^2 + y'^2 = 6.$$

Пусть еще мы имеем уравнение параболы в прямоугольных координатах

$$(2x - 3y)^2 + 10x - 2y - 9 = 0.$$

Найдем уравнение этой параболы относительно Преобразованное уравнение должно иметь вид (§ 131)

$$a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' = 0.$$

Сравнивая между собою значения инвариантов для обоих уравнений, находим

$$0 = 0, \quad 4 + 9 = a_{22}', \quad \begin{matrix} 4 & -6 & 5 \\ -6 & 9 & -1 \\ 5 & -1 & -9 \end{matrix} = -a_{22}' a_{13}'^2,$$

откуда $a_{22}' = 13$, $a_{13}' = \pm 13$, и уравнение данной параболы относительно вершины получится в виде

$$y'^2 = 2x'.$$

Из свойств инвариантов весьма просто получаются теоремы Аполлония (§ 124). Мы ограничимся здесь выводом этих теорем для эллипса. Пусть мы имеем уравнение эллипса относительно главных осей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и уравнение той же кривой относительно сопряженных диаметров, угол между которыми равен ω,

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Сравнивая между собою инварианты обоих уравнений, находим

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}\right) : \sin^2\omega, \quad \frac{1}{a^2 b^2} = \frac{1}{a'^2 b'^2 \sin^2\omega},$$

откуда получаем соотношения § 124

$$a'b' \sin\omega = ab, \quad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

ГЛАВА VIII.

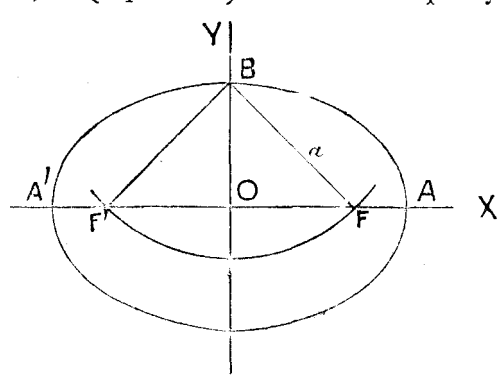
Фокальные свойства кривых 2-го порядка.

142. Фокусы эллипса. В плоскости каждой кривой 2-го порядка существуют точки, обладающие тем замечательным свойством, что расстояния их от точек этой кривой выражаются рационально через декартовы координаты последних, тогда как, вообще, расстояние между двумя точками плоскости выражается квадратным радикалом (§ 20).

Рассмотрим эллипс с полуосями a, b. Отложим на большой оси в обе стороны от центра отрезок

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}. \qquad (1)$$

Получаемые точки F, F' (черт. 120) называются фокусами эллипса. Так как $c < a$, то фокусы эллипса отстоят от центра ближе, чем концы большой оси и, следовательно, лежат внутри кривой.



Черт. 120.

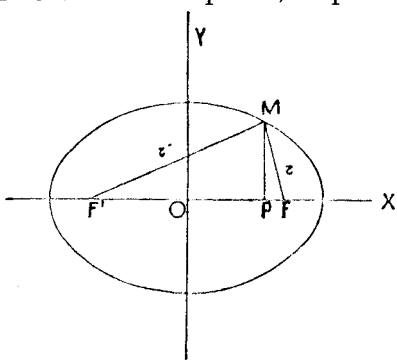
Чтобы построить фокусы, опишем из конца малой оси радиусом a окружность. Из треугольников OBF, OBF' имеем $OF = OF' = c$, откуда следует, что точки пересечения окружности с большою осью суть фокусы эллипса.

Так как фокусы эллипса лежат на его большой оси, то эта ось называется также фокальною осью эллипса.

Покажем, что расстояние каждой точки эллипса от его фокусов выражается рационально через координаты этой точки. Возьмем уравнение эллипса относительно главных осей

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

и обозначим через r, r' расстояния FM, $F'M$ точки $M(x, y)$ эллипса (черт. 121) от обоих фокусов; FM и $F'M$ называются радиусами-векторами точки M. Так как координаты фокусов равны соответственно $c, 0$ и $-c, 0$, то формула (4) § 20 дает



Черт. 121.

$$r^2=(x-c)^2+y^2,$$
$$r'^2=(x+c)^2+y^2.$$

Исключим из этих выражений координату y, пользуясь тем, что координаты x, y точки M удовлетворяют уравнению эллипса. Из этого уравнения мы имеем

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Внося это в предыдущее выражение для r и соединяя подобные члены, находим

$$r^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2cx+c^2+b^2.$$

На основании (1), $b^2=a^2-c^2$, и потому

$$r^2=\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2,$$

откуда

$$r=\pm\left(\frac{c}{a}x-a\right).$$

Так как мы ищем абсолютную длину радиуса-вектора r, то из двух знаков перед скобками нужно взять тот, который дает

для r положительное значение. Легко видеть, что для этого нужно взять знак —. В самом деле, для всех действительных точек эллипса x по абсолютной величине не превосходит a и отношение $\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ меньше единицы; следовательно, значение произведения $\frac{c}{a} x - a$ отрицательно.

Введем обозначение

$$\frac{c}{a} = e. \tag{2}$$

Число e, представляющее, как легко видеть, отношение расстояния между фокусами эллипса $2c$ к длине его фокальной оси $2a$, называется эксцентрицитетом эллипса. Для эллипса, очевидно, имеем

$$e < 1.$$

Вводя в выражение для r это обозначение и обращая внимание на знак, находим

$$r = a - ex. \tag{3}$$

Выражение для r' отличается от выражения для r только знаком при c; следовательно

$$r' = \pm \left(-\frac{c}{a} x - a \right).$$

Здесь опять, на основании приведенных выше соображений, необходимо взять перед скобками знак —; поэтому имеем

$$r' = a + ex. \tag{4}$$

Отсюда получаем замечательное свойство эллипса. Сложив равенства (3) и (4), получим

$$r + r' = 2a, \tag{5}$$

т.-е. для всякой точки эллипса сумма радиусов-векторов есть величина постоянная, равная большой оси.

Отсюда получается простой способ черчения эллипса непрерывным движением. Отметим два фокуса эллипса на расстоянии $2c$ один от другого и укрепим в фокусах концы нити, длину которой возьмем равною $2a$. Поместим, далее, в точке M острие карандаша, так чтобы нить, огибая острие, была им натянута. Если мы теперь будем вести карандаш так, чтобы нить оставалась постоянно натянутою, то острие карандаша очертит эллипс, так как мы будем иметь при всяком положении точки M $FM + F'M = 2a$.

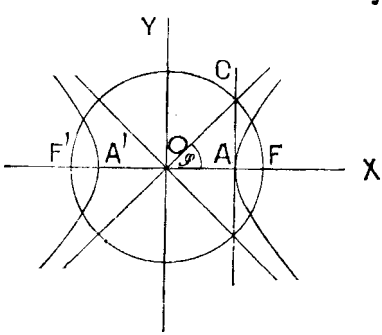
Если эллипс обращается в окружность, то $a = b$, и следовательно

$$c = 0, \quad e = 0.$$

Таким образом, оба фокуса окружности сливаются в ее центре, и эксцентрицитет окружности равен нулю.

Так как две главные оси эллипса отличаются только своими размерами, то эллипс должен иметь фокусы не только не большой, но и не малой оси. Но меняя в (1) места a и b, мы найдем, что расстояния фокусов, лежащих на малой оси, от центра кривой равны $\sqrt{b^2 - a^2} = ci$, и потому эти фокусы—мнимые.

143. Фокусы гиперболы. Уравнение гиперболы относительно главных осей отличается от уравнения эллипса только знаком при b^2; в связи с этим, фокусы гиперболы лежат на ее действительной оси, и их расстояние от центра равно



Черт. 122.

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c. \qquad (6)$$

Так как для гиперболы $c > a$, то фокусы гиперболы более удалены от центра кривой, чем ее вершины, и следовательно лежат, как и у эллипса, внутри кривой (§§ 96,98). Так как фокусы гиперболы лежат на ее действительной оси, то эта ось есть фокальная ось гиперболы.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AOC (черт. 122), образованный асимптотою, действительною осью и касательною

в вершине. В нем катет OA равен a, а прилежащий угол φ равен в половине угла между асимптотами. Отсюда имеем

$$OA = \frac{a}{\cos\varphi},$$

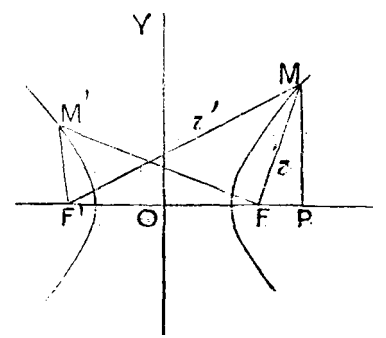
а так как $tg\,\varphi = \frac{b}{a}$ (§ 123), то

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

и

$$OA = \sqrt{a^2+b^2}$$

Отсюда получаем следующее построение фокусов гиперболы Найдем точку пересечения касательной в вершине с асимптотою и опишем из центра гиперболы окружность, проходящую через найденную точку, точки пересечения этой окружности с действительною осью гиперболы будут фокусами.



Черт. 123.

Найдем выражение растояния точки гиперболы от фокусов. Пусть будет $M(x, y)$ точка гиперболы (черт. 123). Обозначив ее расстояния от обоих фокусов через r, r', будем иметь

$$r^2 = (x-c)^2 + y^2,$$
$$r'^2 = (x-c)^2 + y^2$$

Исключая отсюда координату y при помощи уравнения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

получим для r выражение

$$r^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 - 2cx + c^2 - b^2,$$

или на основании (6)

$$r^2 = \frac{c}{a}x - 2cx + a^2,$$

откуда

$$r = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right).$$

Посмотрим, какой знак нужно здесь взять. Все действительные точки гиперболы лежат вне полосы, ограниченной прямыми, приходящими на расстоянии a по обе стороны от оси Y; поэтому абсолютная величина абсциссы x больше a. Так как при этом множитель $\frac{c}{a}$ больше единицы, то абсолютная величина произведения $\frac{c}{a}x$ также больше a, и знак разности $\frac{c}{a}x - a$ зависит от знака первого члена. Отсюда следует, что для правой ветви гиперболы, где x положительно, разность $\frac{c}{a}x - a$ также положительна и поэтому должна быть взята со знаком $+$; для левой ветви x отрицательно; следовательно для нее разность $\frac{c}{a}x - a$ отрицательна и должна быть взята со знаком $-$.

Введем обозначение

$$\frac{c}{a} = e. \tag{7}$$

Число e представляет здесь, как и в случае эллипса, отношение расстояния между фокусами гиперболы $2c$ к длине фокальной оси $2a$ и называется эксцентрицитетом гиперболы. В противоположность эллипсу, для гиперболы, очевидно, имеем

$$e > 1.$$

Мы видели, что для правой ветви разность $\frac{c}{a}x - a$ должна быть взята с знаком $+$; следовательно для правой ветви имеем

$$r = ex - a;$$

для левой ветви та же разность берется с знаком $-$; поэтому точек левой ветви имеем

$$r = -ex + a.$$

Преобразуя таким же образом выражение другого радиуса вектора r', найдем

$$r' = \pm (ex + a).$$

Так как и здесь знак выражения в скобках зависит от знака первого члена, то ясно, что для точек правой ветви перед скобкою должно взять знак $+$, а для точек левой ветви знак $-$. Таким образом, для точек той и другой ветви будем иметь соответственно

$$r = -ex + a, \quad r = ex - a,$$
$$r' = -ex - a, \quad r' = ex + a.$$

Вычитая выражения обоих радиусов-векторов, будем иметь для точек правой ветви

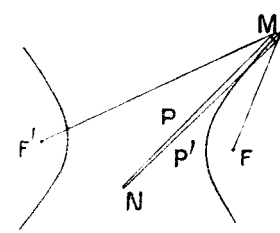
$$r' - r = 2a, \tag{8}$$

а для точек левой ветви

$$r - r' = 2a. \tag{8'}$$

т.-е. разность радиусов-векторов для всякой точки гиперболы есть величина постоянная, равная действительной оси.

Отсюда получаем способ черчения гиперболы непрерывным движением. Возьмем нить FNF' произвольной длины (черт. 124), укрепим ее концы в двух фокусах гиперболы и возьмем на ней точку N так, чтобы разность $F'N - FN$ была равна $2a$. Расположим нить так, чтобы две ее части перекрещивались между собою в M, образуя здесь петлю, и поместим в M острие карандаша. Тогда, если мы, удерживая нить согнутою в N, будем двигать карандаш так, чтобы он удерживал петлю натянутою, то острие карандаша M опишет одну ветвь гиперболы. В самом деле, так как $MPN = MP'N$, то



Черт. 124

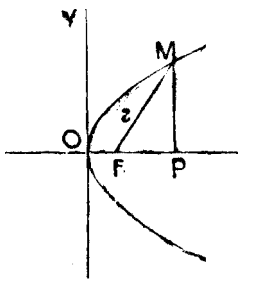
$$F'M - FM = F'MP'N - FMPN = 2a.$$

Кроме двух действительных фокусов, гипербола имеет, подобно эллипсу, еще два мнимых фокуса, расположенных на ее мнимой оси. Их расстояние от центра кривой равно $\sqrt{-b^2 - a^2} = c$

144. Фокус параболы. Парабола имеет только один фокус, лежащий на оси X на расстоянии $\frac{p}{2}$ от вершины. Возьмем уравнение параболы относительно вершины

$$y^2 = 2px \tag{9}$$

и найдем расстояние точки $M(x,y)$ параболы (черт. 125) от фокуса F. Обозначая длину радиуса-вектора FM через r, будем иметь



Черт. 125.

$$r^2 = \left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + y^2,$$

или, исключая y при помощи уравнения параболы,

$$r^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

откуда

$$r = \pm\left(x + \frac{p^2}{2}\right)^2$$

Так как в уравнении (9) абсциссы всех действительных точек параболы положительны, то выражение в скобках также положительно, и мы должны взять верхний знак. Таким образом имеем

$$r = x + \frac{p}{2} \tag{10}$$

Так как парабола имеет только один фокус, то ее эксцентрицитет нельзя определить, как отношение расстояния между фокусами к длине фокальной оси, как это мы делали для эллипса и гиперболы. Но рассматривая параболу, как предел эллипсов или гипербол, мы можем получить и для параболы определенное значение эксцентрицитета. В самом деле, уравнение гиперболы относительно вершины имеет вид (§ 137)

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

где $p = \frac{b^2}{a}$, $q = \frac{b^2}{a^2}$. Отсюда находим эксцентрицитет гиперболы

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1+q}.$$

Так как уравнение параболы получается из уравнения гиперболы при $q = 0$, то отсюда для эксцентрицитета параболы получаем $e = 1$. Ниже (§ 145) будет дано другое определение эксцентрицитета, применимое ко всем кривым 2-го порядка; из него будет непосредственно видно, что эксцентрицитет параболы равен единице.

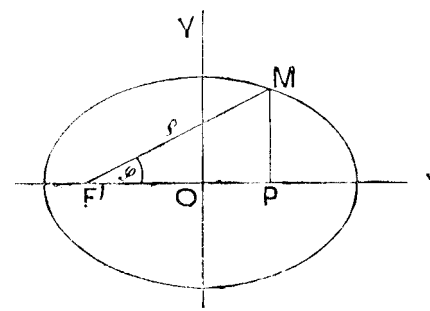
Если мы рассматриваем параболу, как предел центральных кривых 2-го порядка, то мы должны принимать, что парабола имеет, кроме одного фокуса, лежащего на конечном расстоянии, еще другой фокус, лежащий в бесконечно-удаленной точке оси параболы и, следовательно, в бесконечно-удаленной точке самой кривой (§ 91). В самом деле, уравнения (43), (44) § 137 показывают, что по мере того, как в уравнении относительно вершины коэффициент q стремится к нулю, другая вершина кривой удаляется в бесконечность; так как два фокуса центральной кривой 2-го порядка одинаково удалены от двух ее вершин, то ясно, что с удалением одной вершины в бесконечность вместе с нею уйдет в бесконечность и ближайший к ней фокус.

Фокальные свойства конических сечений были найдены Аполлонием.

145. Полярные уравнения кривых 2-го порядка относительно фокуса. Выведем уравнения кривых 2-го порядка в полярных координатах, принимая за полюс один из фокусов и за полярную ось фокальную ось кривой. Возьмем уравнение эллипса относительно главных осей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1$$

за полюс полярсистемы координат один фокус эллипса.



Черт. 126.

за полюс левый фокус F' эллипса, так как он лежит вправо от ближайшей вершины (черт. 126). Полярную ось возьмем по положительном направлению оси X.

Расстояние каждой точки от левого фокуса выражается формулою

$$\rho = a + ex.$$

С другой стороны, из прямоугольного треугольника $F'MP$ имеем:

$$F'P = F'O + OP = F'M\cos\varphi.$$

Но $F'O = c = ae$, а OP есть абсцисса x точки M; поэтому предыдущее равенство дает

$$ae + x = \rho\cos\varphi,$$

откуда

$$x = \rho\cos\varphi - ae.$$

Подставив это в выражение для ρ, получаем:

$$\rho = a + e\rho\cos\varphi - ae^2.$$

Так как

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

то предыдущее уравнение принимает вид:

$$\rho(1 - e\cos\varphi) = a\left(1 - \frac{a^2 - b}{a^2}\right),$$

или

$$\rho(1 - e\cos\varphi) = \frac{b}{a}.$$

Обозначив $\frac{b^2}{a}$ через p (§ 137), получим полярное уравнение эллипса относительно фокуса

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Мы здесь принимаем за направление полярной оси положительное направление оси X; если мы примем за направление

полярной оси отрицательное направление оси X, то амплитуда обратится в $\pi - \varphi$, и полярное уравнение эллипса будет

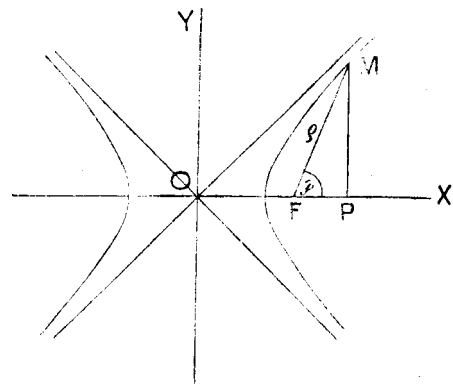
$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Выведем, далее, полярное уравнение гиперболы. Поместим полюс в правом фокусе F (черт. 127). Возьмем точку M на правой ветви; ее расстояние от правого фокуса выражается (§ 143) формулою

$$\rho = ex - a.$$

Из прямоугольного треугольника EMP находим

$$FP = OP - OF = \\ = FM\cos\varphi.$$



Черт. 127.

Но OP есть абсцисса x точки M, а OF есть расстояние фокуса от центра, т.-е. c, или ae: следовательно

$$x - ae = \rho\cos\varphi,$$

откуда

$$x = \rho\cos\varphi + ae$$

Подставив это в выражение радиуса-вектора ρ, имеем

$$\rho = e\rho\cos\varphi + a^2 - a.$$

Но $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$; поэтому имеем

$$\rho(1 - e\cos\varphi) = a\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} - 1\right).$$

или

$$\rho(1 - e\cos\varphi) = \frac{b^2}{a}.$$

а так как $\frac{b^2}{a}$ есть параметр p гиперболы (§ 137), то полярное уравнение гиперболы есть

$$\varrho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Если бы мы взяли точку M на левой ветви гиперболы, то результат получился бы тот же самый, так как для левой ветви φ равно $(a - ex)$, но $\cos\varphi$ отрицательно.

Если бы мы приняли за направление полярной оси отрицательное направление оси X, то нашли бы, что полярное уравнение гиперболы имеет в этом случае ви

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Выведем теперь полярное уравнение параболы. Уравнение параболы относительно вершины есть

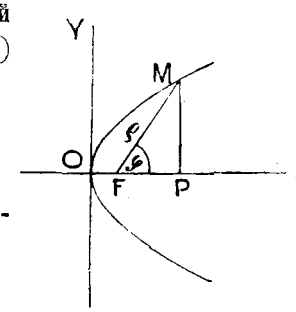
$$y^2 = 2px,$$

и расстояние каждой ее точки от фокуса выражается формулою

$$\varrho = x + \frac{p}{2}.$$

Примем фокус параболы за полюс и положительное направление оси X за направление полярной оси. Из треугольника FMP (черт. 128) имеем

$$FP = OP - OF = FM\cos\varphi.$$



Черт. 128.

Но $OP = x$, $OF = \frac{p}{2}$; следовательно, мы имеем

$$x - \frac{p}{2} = \varrho\cos\varphi,$$

откуда

$$x = \varrho\cos\varphi + \frac{p}{2}.$$

Подставив это в выражение для ϱ, получим

$$\varrho = \varrho\cos\varphi + p.$$

Отсюда имеем полярное уравнение параболы

$$\varrho = \frac{p}{1-\cos\varphi}.$$

Это уравнение получается из уравнения эллипса или гиперболы, если положить в них $e=1$. Это показывает еще раз (§ 144), что эксцентрицитет параболы должно считать равным единице.

Преобразовав знаменателя, мы можем дать уравнению параболы вид

$$\varrho = \frac{p}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Если бы приняли за направление полярной оси отрицательное направление оси X, то $\cos\varphi$ переменил бы знак, и мы имели бы полярное уравнение параболы в виде:

$$\varrho = \frac{p}{1+\cos\varphi}, \quad \text{или } \varrho = \frac{p}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}. \tag{11}$$

146. Мы нашли, что полярные уравнения всех трех кривых 2-го порядка относительно фокуса имеют один и тот же вид

$$\varrho = \frac{p}{1-e\cos\varphi}.$$

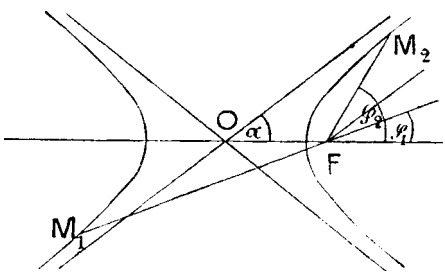
При $e=1$, это уравнение представляет параболу. Если $e<1$, то знаменатель $1-e\cos\varphi$ остается положительным при всяких значениях угла φ. Поэтому все радиусы-векторы в этом случае конечны, и мы имеем замкнутую кривую. Если $e>1$, то $|e\cos\varphi$ (см. § 6) больше или меньше единицы в зависимости от значения угла φ; знаменатель обращается в нуль, когда $\cos\varphi = \frac{1}{e}$. Так как $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$, то для угла φ существуют два значения между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, при которых знаменатель $1-e\cos\varphi$

обращается в нуль, и, следовательно, для гиперболы существуют два направления радиуса-вектора, встречающего кривую в бесконечности. Нетрудно видеть, что эти направления суть направления асимптот; действительно, обозначая через α значение угла φ, удовлетворяющее уравнению $1 - e\cos\varphi = 0$, имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{e} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

а это—выражение косинуса угла асимптот с действительной осью гиперболы (§ 143).

Будем давать углу φ в полярном уравнении гиперболы (11) различные значения, начиная от нуля (черт. 129). Пока $|\varphi| < |\alpha|$, мы имеем $\cos\varphi > \alpha$; при этом разность $1 - e\cos\varphi$ отрицательна, а вместе с нею и радиус-вектор получает отрицательные значения, изменяющиеся от $\varrho = -\frac{1}{e-1}$ до $\varrho = -\infty$; так как эти значения отрицательны, то они должны быть откладываемы не вправо по направлению радиусов-векторов, а влево — на их продолжениях. При дальнейшем изменении φ, когда $|\varphi| > |\alpha|$, мы получим $\cos\varphi < \cos\alpha$, и знаменатель $1 - e\cos\varphi$ перейдя через нуль, будет иметь положительные значения; вместе с ним и ϱ будет изменяться от $\varrho = +\infty$ до $\varrho = \frac{1}{1+e}$. Так как $\frac{1}{e-1} > \frac{1}{1+e}$, то отрицательные значения радиуса вектора соответствуют точкам более удаленной от полюса F левой ветви гиперболы, тогда как положительные значения радиуса-вектора соответствуют точкам правой ветви. Мы имеем здесь пример того, что в полярных координатах радиус-вектор может иметь не только положительные, но и отрицательные значения (§ 22).



Черт. 129.

Если в полярном уравнении (11), мы имеем $e = 1$, то знаменатель обращается в нуль только при $\varphi = 0$; это показывает

ветви параболы удаляются в бесконечность только по одному направлению.

Из полярного уравнения кривых 2-го порядка можно геометрическое значение параметра p для всех трех кривых 2-го порядка. Возьмем кривую 2-го порядка, и найдем длину перпендикуляра к фокальной оси, восставленного из фокуса до пересечения с кривою; этот перпендикуляр есть радиус-вектор, соответствующий значению $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Положив в уравнении (11) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, находим

$$\varrho = p.$$

Это показывает, что параметр кривой 2-го порядка есть величина ординаты в ее фокусе.

147. Директрисы. Директрисами, или направляющими прямыми кривой 2-го порядка называются поляры фокусов кривой. Найдем директрисы эллипса.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Подставив в уравнение поляры (14) § 121 вместо координат полюса координаты c, 0 правого фокуса, мы получим уравнение соответствующей директрисы

$$\frac{cx}{a^2} = 1.$$

Для левого фокуса уравнение директрисы будет

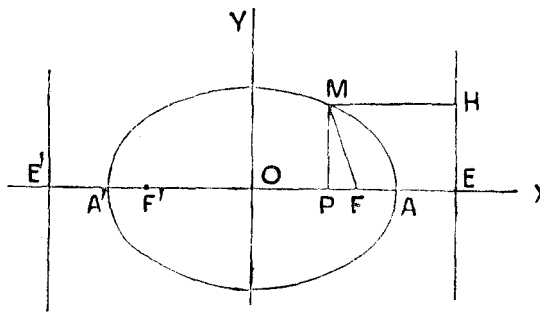
$$-\frac{cx}{a^2} = 1.$$

Заменяя на основании соотношения (2) c через ae, мы получим уравнения обеих директрис эллипса в виде

$$x = \frac{a}{e}, \quad x = -\frac{a}{e}. \tag{12}$$

Эти уравнения показывают, что директрисы эллипса суть

прямыя, перпендикулярные к фокальной оси и отстоящие от центра на расстояние $\frac{a}{e}$. Так как у эллипса $e < 1$, то $\frac{a}{e} > a$, и директрисы лежат вне эллипса (черт. 130).



Черт. 130.

Найдем расстояние d точки M эллипса от директрисы. Опустив из M перпендикуляры на директрису и на ось X, будем иметь

$$d = MH = PE = OE - OP.$$

Но OP есть абсцисса x точки M, а OE, на основании уравнения директрисы, равно $\frac{a}{e}$. Отсюда находим

$$d = \frac{a - ex}{e}.$$

Здесь числитель представляет выражение длины радиуса-вектора r точки M (§ 142). Поэтому последнее соотношение можно представить в виде

$$\frac{r}{d} = e.$$

Таким образом, для всех точек эллипса отношение между расстояниями точки от фокуса и от соответствующей директрисы есть величина **постоянная**, равная эксцентриситету.

Для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

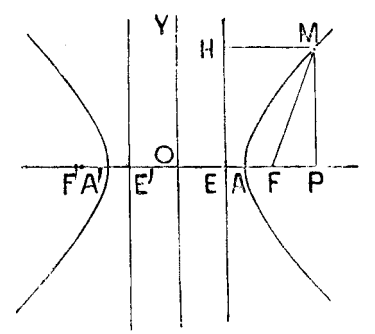
уравнение поляры имеет вид (15) § 121. Подставляя сюда координаты фокусов $(c, 0)$ и $(-c, 0)$, получим уравнения обеих директрис гиперболы

$$\frac{cx}{a}=1, -\frac{cx}{a}=1.$$

На основании отношения (7) § 143 уравнениям директрис можно дать вид

$$x=\frac{a}{e}, x=-\frac{a}{e}. \tag{14}$$

Так как для гиперболы $e>1$, то $\frac{a}{e}<1$, и следовательно, директрисы гиперболы расположены между обеими ветвями кривой (черт. 131).



Черт. 131.

Возьмем точку M на правой ветви гиперболы и найдем ее расстояние от директрисы. Опустив из M перпендикуляры на директрису и на ось X, и обозначая искомое расстояние через d, будем иметь

$$d=HM=EP=OP-OE.$$

Так как OP есть абсцисса точки M, а OE, на основании уравнения директрисы, равно $\frac{a}{e}$, то последнее соотношение принимает вид

$$d=\frac{cx}{e}-\frac{a}{e}$$

Так как здесь числитель представляет расстояние r точки M от фокуса F (§ 143), то отсюда имеем

$$\frac{r}{d}=e \tag{15}$$

Легко убедиться, что это соотношение имеет место и в том случае, если точка M лежит на левой ветви гиперболы. Оно показывает, что для всех точек гиперболы отношение между расстояниями точки от фокуса и от соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентрицитету.

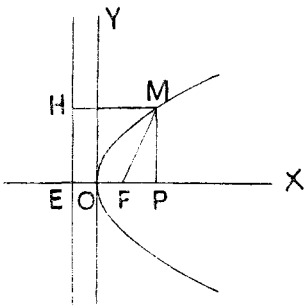
148. Для параболы

$$y^2 = 2px,$$

уравнени поляры имеет вид (38) § 135. Подставив в него координаты фокуса $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, получим уравнение директрисы параболы

$$x + \frac{p}{2} = 0, \text{ или } x = -\frac{p}{2}.$$

Из этого уравнения видно, что фокус и директриса параболы находятся от ее вершины на одинаковом расстоянии $\frac{p}{2}$ (черт. 132).



Черт. 132.

Найдем расстояние точки M параболы от директрисы. Поступая так же, как и ранее, получим

$$d = HM = EP = EO + OP,$$

или

$$d = x + \frac{p}{2},$$

откуда

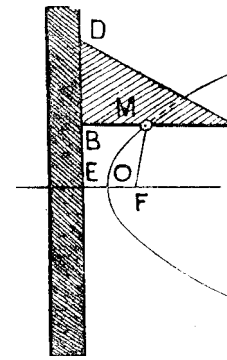
$$d = r. \tag{16}$$

Таким образом, расстояния каждой точки параболы от фокуса и от директрисы равны между собою.

Отсюда получаем следующий способ черчения параболы. Возьмем прямоугольный треугольник BCD (черт. 133) и укрепим в вершине C один из концов нити CMF, длина которой равна длине катета BC; другой конец нити укрепим в фокусе параболы F. Поместим, далее, в точке M острие карандаша

которое натягивало бы нить так, чтобы часть нити CM совпадала с катетом BC. Если мы теперь будем перемещать треугольник BCD, заставляя скользить катет BD по директрисе параболы, то острие карандаша M опишет параболу, так как мы будем иметь при всяком положении треугольника BCD

$$FM = BC - MC = BM.$$



Черт. 133

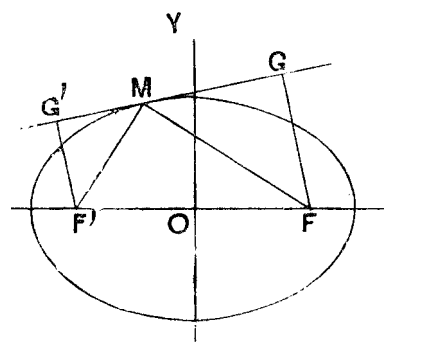
Представив равенство (16) в виде

$$\frac{r}{d} = 1, \qquad (17)$$

мы видим из соотношений (13), 15), (17), что всем трем видам кривых 2-го порядка можно дать одно общее геометрическое определение. Эти кривые представляют собою геометрические места точек, отношения расстояний которых от данной точки—фокуса—и от данной прямой—директрисы—имеют постоянную величину. Эта величина менее единицы для эллипса, более единицы для гиперболы и равна единице для параболы. Отсюда следует, что если мы будем определять эксцентрицитет кривой 2-го порядка, как постоянное отношение расстояний точек кривой от фокуса и от директрисы, то эксцентрицитет будет иметь прямой смысл не только для центральных кривых, но и для параболы, причем для последней кривой его числовая величина будет равна единице, как это мы нашли ранее из других соображений.

149. Фокусы и касательныя. Рассмотрим два фокуса эллипса и касательную в одной из его точек $M(x', y')$ (черт. 134). Докажем следующее предложение:

Касательная к эллипсу есть внешняя равноделящая угла между радиусами-векторами, проведенными в точку прикосновения.



Черт. 134.

Мы называем эту рав-

поделящую внешнюю, так как она делит пополам внешний угол треугольника MFF', образуемого двумя радиусами-векторами и фокальною осью.

Вычислим расстояния обоих фокусов от касательной. Уравнение касательной к эллипсу в точке (x', y') есть (§ 121)

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b} = 1$$

Приведем это уравнение к нормальному виду; для этого делим первую часть его на квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов при x и y:

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1$$

$$\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}$$

Чтобы найти расстояние от касательной до правого фокуса, нужно подставить в первую часть этого уравнения вместо текущих координат координаты правого фокуса, т.-е. $x = c, y = 0$, и результат взят с обратным знаком, так как фокус и начало координат лежат по одну сторону касательной (§ 59); таким образом

$$FG = \frac{1 - \frac{cx'}{a^2}}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}}$$

Умножим числителя и знаменателя этого выражения, на a заметив, что $\frac{c}{a} = e$, будем иметь

$$FG = \frac{a - ex'}{a\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}}$$

Так как $a - ex'$ есть длина радиуса-вектора FM, то мы можем представить предыдущее выражение в виде

$$FG = \frac{FM}{a\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}}$$

Найдем теперь расстояние от касательной до левого фокуса. Так как координаты левого фокуса суть $x=-c, y=0$, то расстояние этого фокуса от касательной найдем, изменив в предыдущих выражениях знак при c. Таким образом имеем

$$F'G'=\frac{1+\frac{cx'}{a^2}}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}=\frac{a+ex'}{a\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}$$

Но $a+ex'$ есть длина радиуса-вектора $F'M$. Поэтому

$$F'G'=\frac{F'M}{a\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}$$

Отсюда имеем

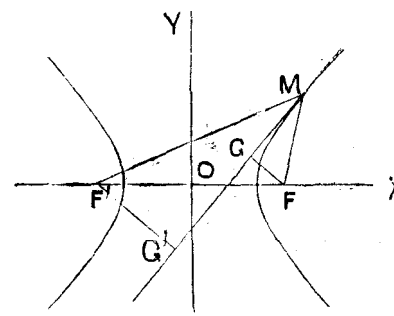
$$\frac{FG}{F'G'}=\frac{FM}{F'M}.$$

Из этого следует, что прямоугольные треугольники FMG и $F'MG'$ какеты, подобны между собою, и потому

$$\angle FMG=\angle F'MG'. \tag{18}$$

Таким образом, наше предложение доказано.

Рассмотрим точно также касательную к гиперболе (черт. 135). Соединим точку прикосновения ее M с фокусами F и F'. Докажем, что касательная к гиперболе есть внутренняя равноделящая угла между радиусами-векторами, проведенными в точку прикосновения. Уравнение касательной к гиперболе в точке (x', y') есть



Черт. 135.

$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=1.$$

Приведем его к нормальному виду

$$\frac{\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}-1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}$$

Будем искать расстояния фокусов от касательной. Положим, что точка M лежит на правой ветви; тогда правый фокус отделен касательною от начала координат, и расстояние правого фокуса от касательной, вычисленное посредством предыдущего уравнения, получится положительным. Поэтому имеем

$$FG=\frac{\frac{cx'}{a^2}-1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}},$$

или, по умножении числителя и знаменателя на a,

$$FG=\frac{ex'-a}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}$$

Но числитель представляет длину радиуса-вектора FM; следовательно

$$FG=\frac{FM}{a\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}$$

Таким же образом найдем расстояние касательной от левого фокуса F', причем необходимо иметь в виду, что этот фокус лежит относительно касательной по одну сторону с началом координат и потому левая часть уравнения касательной должна быть здесь взята с обратным знаком. Поэтому получим

$$F'G'=\frac{\frac{cx'}{a^2}+1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}=\frac{ex+a}{a\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^2}}}$$

$$F'G' = \frac{F'M}{a\sqrt{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}}}$$

Отсюда имеем

$$\frac{FG}{F'G'} = \frac{FM}{F'M'}$$

Таким образом, треугольники FMG и $F'MG'$

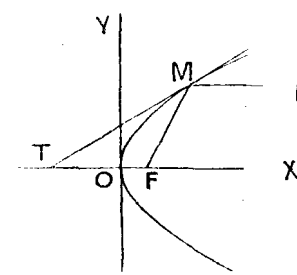
$$\angle FMG = \angle F'MG', \tag{19}$$

наше предложение доказано.

150. Обратимся к параболе

$$y^2 = 2px.$$

Проведем к ней в точке $M(x, y)$ (черт. 136) касательную MT. В треугольнике FMT сторона FM, как радиус-вектор точки M, равна $x + \frac{p}{2}$. Далее, имеем $TF = TO + OF$. Но мы знаем (§ 135), что $TO = x$; кроме того, OF, как расстояние фокуса от вершины равно $\frac{2}{p}$. Таким образом, $TF = x + \frac{p}{2}$, и потому $TF = FM$. Следовательно, треугольник FMT — равнобедренный, и мы имеем



Черт. 136.

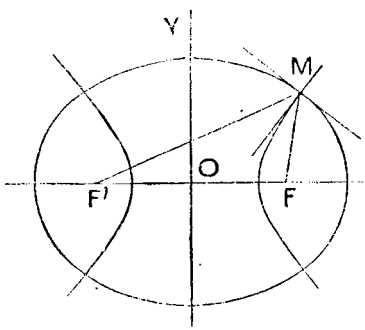
$$\angle FTM = \angle FMT. \tag{20}$$

Таким образом, касательная к параболе одинаково наклонена к оси параболы и к радиусу-вектору, проведенному в точку прикосновения.

Это свойство параболы может быть рассматриваемо, как предельный случай выведенных выше свойств эллипса и гиперболы. В самом деле, мы видели (§ 144), что при обращении эллипса или гиперболы в параболу, второй фокус удаляется в бесконечность по оси кривой. Вследствие этого второй радиус-вектор точки M обращается в пределе в прямую MF', параллельную оси па-

раболы, и угол касательной со вторым радиусом-вектором делается равным углу касательной с осью. Так как касательныя к центральным кривым 2-го порядка одинаково наклонены к двум радиусам-векторам, проведенным в точку прикосновения, то, переходя к пределу, мы найдем, что касательныя к параболе одинаково наклонены к оси кривой и к радиусу-вектору, проведенному в точку прикосновения.

151*. Софокусные кривыя. Кривые 2-го порядка, имеющие общие фокусы, называются софокусными, или конфокальными. Пусть нам даны точки F и F' (черт. 137). Легко видеть, что через каждую точку M плоскости проходят один эллипс и одна гипербола, имеющие точки F и F' своими фокусами. Действительно, так как нам известно расстояние между фокусами FF' и длины радиусов-векторов FM и $F'M$, то полуоси эллипса определяются из соотношений (§ 142)



Черт. 137.

$$a^2 - b^2 = OF^2, \quad 2a = FM + F'M,$$

а полуоси гиперболы (§ 143) из

$$a^2 + b^2 = OF^2, \quad 2a = F'M - FM.$$

Проведем в M касательныя к обоим софокусным кривым. Так как касательная к эллипсу есть внешняя равноделящая угла между радиусами-векторами, а касательная к гиперболе есть внутренняя равноделящая того же угла, то эти две прямыя, как равноделящия двух смежных углов, будут взаимно перпендикулярны, так что касательная к каждой из двух кривых будет вместе с тем нормалью к другой кривой. Если две кривыя пересекаются между собою, то углом между кривыми в точке их пересечения называется угол между касательными к обоим кривым в этой точке, и из предыдущего видно, что две софокусные кривыя 2-го порядка пересекаются в каждой из их четырех общих точек под прямым углом. Кривыя, пересекающиеся под прямым углом, называются кривыми ортогональными.

Выведем уравнение семейства софокусных кривых. Примем фокальную ось за ось X прямоугольной системы координат, начало которой поместим в средине между обоими фокусами. Пусть будет $2c$ расстояние фокусов от центра. Обозначая через λ квадрат большой полуоси одного из софокусных эллипсов, мы найдем две его полуоси из уравнений

$$a^2 = \lambda,\ a^2 - b^2 = c^2,$$

вследствие чего уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1.$$

Точно также, обозначая через λ квадрат действительной полуоси одной из софокусных гипербол, будем иметь

$$a^2 = \lambda,\ a^2 + b^2 = c^2$$

и отсюда уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{\lambda} - \frac{y^2}{c^2 - \lambda} = 1.$$

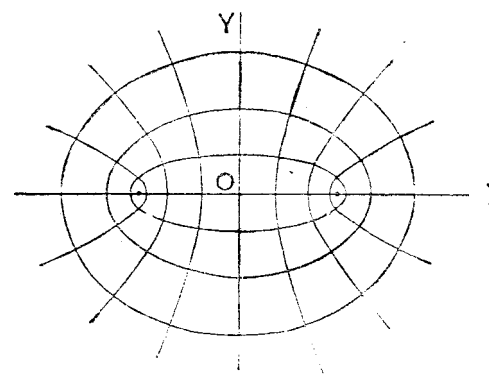
Полученные нами уравнения софокусных эллипсов и гипербол тождественны между собою. Поэтому уравнение

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1. \qquad (21)$$

представляет при переменном параметре λ все семейство софокусных кривых. При $\lambda > c^2$ оно представляет эллипсы, при $0 < \lambda < c$ —гиперболы и при $\lambda < 0$ — мнимые кривыя 2-го порядка.

Проследим, как изменяется вид кривой (21) с изменение параметра λ (черт. 138). Эксцентрицитет этой кривой равен (§ 142).

$$e = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{\lambda}}.$$



Черт. 138.

При $\lambda = \infty$ уравнение (21) представляет эллипс с бесконечно-большими осями; так как при этом эксцентритет обращается в нуль, то это — окружность бесконечно-большого радиуса. По

мере того, как λ будет убывать, полуоси эллипса будут также уменьшаться, причем эксцентрицитет будет возрастать, так что эллипс будет принимать все более и более вытянутую форму. При $\lambda = c^2$ уравнение (21) по умножении на $\lambda - c^2$ обратится в пределе в $y^2 = 0$, и будет представлять ось X, как двойную прямую. Рассматривая этот случай, как предельный, мы скажем, что при $\lambda = c^2$ мы имеем бесконечно-тонкий эллипс (и гиперболу) с вершинами в фокусах. При дальнейшем уменьшении λ от c^2 о нуля мы будем иметь гиперболы с все возрастающим эксцен рицитетом; мнимые оси этих гипербол будут постепенно увеличиваться, и ветви гипербол будут раскрываться, приближаясь оси Y. При $\lambda = 0$ уравнение (21) по умножении на λ обращаем в пределе в $x^2 = 0$ и представляет ось Y, как двойную прямую. При $\lambda < 0$ уравнение (21) представляет мнимые кривыя. Обратим внимание на то, что при $\lambda = c^2$, когда софокусные эллипсы переходят в гиперболы, мы имеем, как переходную форму, не просто двойную прямую, а двойную прямую с двумя точками на ней — обоими фокусами, подобно тому, как при распадении кривой 2-го порядка на пару прямых мы имели не просто двойную точку, а двойную точку с двумя прямыми, через нее проходящими. Когда λ приближается к c^2 уменьшаясь, то эллипс, делаясь все более и более плоским, в пределе заполняет дважды отрезок фокальной оси между фокусами, оставляя часть оси вне фокусов незаполненною; напротив, когда λ приближается к c^2 возрастая, то гипербола, делаясь все более и более плоскою в ределе, заполняет дважды часть фокальной оси, лежащую вне фокусов, оставляя внутреннюю часть оси незаполненною.

Освободив (21) от знаменателя, получим

$$(\lambda - c^2)x^2 + \lambda y^2 - \lambda(\lambda - c^2) = 0. \qquad (22)$$

Так как параметр λ входит здесь во второй степени, то софокусные кривыя образуют не пучек (§ 44), а семейство иного вида. Это следует также из того, что через каждую точку плоскости проходят две кривыя данного софокусного семейства, тогда как в пучке через каждую точку можно провести только одну кривую. В § 153 мы увидим, что в каждом софокусном семействе есть только одна кривая, касающаяся данной прямой. Семейство кривых, в котором каждой прямой касается только одна кривая семейства, называется с е т ь ю кривых. Поэтому семейство софо-

кусных кривых 2-го порядка представляет сеть кривых. Сеть кривых есть семейственно взаимное пучку кривых по началу двойственности (§ 67).

Пусть нам дана точка $M(x, y)$. Найдем значения параметра λ, соответствующие кривым софокусного семейства (21), проходящим через эту точку. Для этого решим относительно λ уравнение (21), или, что то же, уравнение (22), принимая в них x, y за данныя. Так как уравнение (22)—второй степени относительно λ, то оно даст для λ два корня λ_1, λ_2, откуда вновь следует, что через каждую точку проходят две кривых софокусного семейства. Нетрудно убедиться, что одна из этих кривых—эллипс, а другая—гипербола. Подставим в левую часть уравнения (22) вместо λ значения 0, c^2 и сколь угодно большое положительное число, которое мы обозначим через $+\infty$; мы получим в первом случае отрицательный результат—c^2x^2, во втором положительный c^2y^2 и в третьем, так как старший член $-\lambda^2$ имеет коэффициент -1,—опять отрицательный. Так как левая часть уравнения (22) меняет знак при изменении λ от 0 до c^2 и от c^2 до $+\infty$, то она должна сбращаться в нуль в каждом из этих двух промежутков, т.-е. уравнение (22) должно иметь по одному корню в каждом промежутке. Таким образом, мы имеем

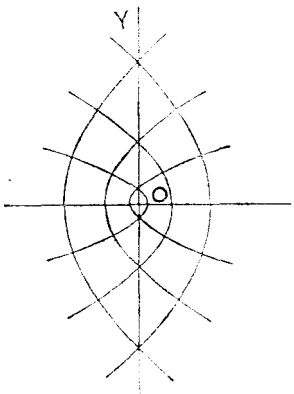
$$0 \leqq \lambda_1 \leqq c^2, \quad c^2 \leqq \lambda_2 \leqq +\infty$$

одна из софокусных кривых, проходящих через M, есть гипербола, а другая эллипс.

Так как софокусные кривыя имеют общие главные оси, то четыре точки пересечения двух софокусных кривых расположены симметрично в четырех углах между осями (черт. 137). Поэтому, если мы будем рассматривать точки только одного из этих четырех углов, например, нормального, то в этом углу две софокусные кривыя будут определять своим пересечением только одну точку. Так как эти кривыя, в свою очередь, определяются значениями параметров λ_1, λ_2, то мы можем сказать, что параметры λ_1, λ_2 определяют в рассматриваемой части плоскости одну точку. Вследствие этого мы можем рассматривать параметры λ_1, λ_2, как криволинейные координаты (§ 24) той точки, в которой пересекаются соответствующие софокусные кривыя; эти координаты называются эллиптическими координатами точки. Эллиптические координаты имеют обширное применение как в

геометрии, так и в ее приложениях. Из предыдущего видно, что в системе эллиптических координат два семейства координатных линий состоят из софокусных эллипсов и гипербол.

152*. Если один из фокусов софокусного семейства уходит в бесконечность, то мы получим в пределе семейство софокусных парабол с общею осью (черт. 139). Составим уравнение этого семейства. Поместим начало координат в фокусе, а ось X—по оси парабол. За параметр λ мы примем расстояние директрисы параболы от фокуса; оно, как мы знаем (§ 148), равно параметру параболы. Так как директриса перпендикулярна к оси X, то ее уравнение будет $x-\lambda=0$. Выразив, что точка (x, y) параболы одинаково удалена от фокуса и от директрисы, мы получим уравнение параболы



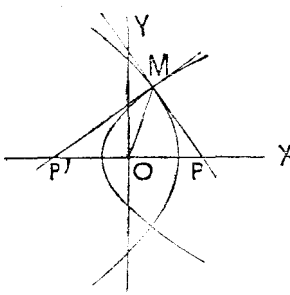
Черт 139.

$$x^2+y^2=(x-\lambda)^2,$$

или

$$y^2+2\lambda x-\lambda^2=0. \qquad (23)$$

Так как это уравнение содержит параметр λ во второй степени, то через каждую точку M (черт. 140) проходят две параболы софокусного семейства. Чтобы найти параметры этих парабол, решим уравнение (23) относительно λ, считая координаты x, y точки M известными. Уравнение (23) дает



Черт. 140.

$$\lambda_1=x+\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\lambda_2=x-\sqrt{x^2+y^2}.$$

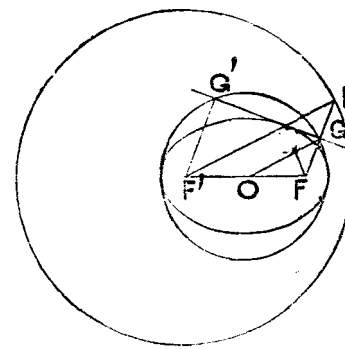
Отсюда видно, что обе параболы, проходящие через точку M—действительные. Так как оба корня имеют разные знаки, то две параболы, проходящие через точку M, обращены своими вершинами в противоположные стороны.

Проведем в M касательныя к обоим параболам. Так как треугольники OMP и OMP' равнобедренные (§ 150), то в

треугольнике MPP' угол PMP' равен сумме двух других углов; следовательно, этот угол—прямой. Это показывает, что софокусные параболы ортогональны.

Как и в предыдущем случае, мы можем принять корни λ_1, λ_2 уравнения (23) за две криволинейные координаты точки M. Координатными линиями здесь будут два ряда софокусных парабол, из которых одни обращены своими вершинами вправо, а другие—влево.

153. Направляющий круг. Пусть мы имеем эллипс (черт. 141) его два фокуса F, F' и касательную в точке M. Опустим из F перпендикуляр FG на касательную и продолжим его на такое же расстояние до H так, чтобы $FG = GH$. Точка H называется симметричною с F по отношению к касательной. Она есть как бы изображение фокуса F в зеркале GG'. Соединим M с F, F' и H. Так как в треугольнике MFH высота MG делит основание пополам, то он равнобедренный, и мы имеем



Черт. 141.

$$HM = FM, \quad \angle HMG = \angle FMG.$$

Но, по свойству эллипса (§ 149) $\angle FMG = \angle F'MG'$. Отсюда имеем

$$\angle HMG = \angle F'MG'.$$

Это показывает, что точки F', M, H лежат на одной прямой. Поэтому мы имеем

$$F'H = F'M + MH = F'M + FM = 2a.$$

Последнее равенство показывает, что точка, симметричная с одним из фокусов по отношению к касательной в одной из точек эллипса, находится от другого фокуса на постоянном расстоянии, равном большой оси эллипса.

Так как это свойство имеет место по отношению ко всем касательным, то геометрическое место точек, симме-

тричных с одним из фокусов эллипса по отношению к касательным, есть окружность, описанная из другого фокуса радиусом, равным большой оси. Эта окружность называется направляющею окружностью эллипса. Каждому из двух фокусов соответствует своя направляющая окружность. Так как в эллипсе $2c < 2a$, то каждый фокус лежит внутри направляющей окружности, описанной из другого фокуса.

Так как MH представляет расстояние точки M от управляющей окружности, то равенство $HM = FM$ показывает, что эллипс есть геометрическое место точек, равно удаленных от данной окружности и от точки, данной внутри нее.

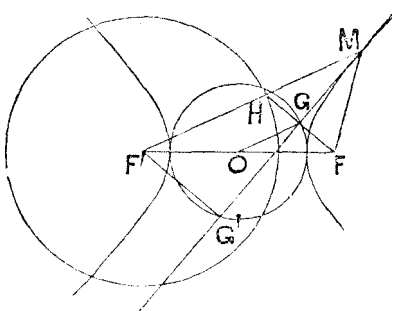
Соединим центр эллипса O с проекциею G фокуса F на касательную. Так как O есть средина FF' и G средина FH, то треугольники FOG и $EF'H$ подобны и мы имеем

$$\frac{OG}{F'H} = \frac{FO}{FF'} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$OG = \frac{1}{2} F'H = a.$$

Это показывает, что геометрическое место проекций фокусов эллипса на касательныя есть окружность, описанная из центра эллипса радиусом, равным большой полуоси. Эта окружность касается эллипса в концах большой оси; мы будем называть ее описанною окружностью.



Черт. 142.

Рассмотрим теперь гиперболу (черт. 142). Построим, как и в случае эллипса, точку H симметричную с F относительно касательной в M. Из равнобедренного треугольника MFH находим

$$HM = FM, \quad \angle HMG = \angle FMG.$$

Так как, по свойству гиперболы, $\angle FMG = \angle F''MG'$, то $\angle HMG = \angle F''MG'$. Это показывает, что точки F'', H, M лежат на одной прямой. Поэтому имеем

$$F''H = F''M - HM = F''M - FM = 2a.$$

Таким образом, геометрическое место точек, симметричных с одним из фокусов гиперболы по отношению к касательным, есть окружность, описанная из другого фокуса радиусом, равным действительной оси. Это есть направляющая окружность гиперболы. Так как в гиперболе $2c > 2a$, то каждый из фокусов лежит вне направляющей окружности, описанной из другого фокуса.

Равенство $HM = FM$ показывает, что гипербола есть геометрическое место точек, равно удаленных от данной окружности и от точки, данной вне ее.

Соединив центр O с проекцией G фокуса F'

$$OG = \frac{1}{2} F'H = a.$$

Отсюда геометрическое место проекций фокусов гиперболы на ее касательныя есть окружность, описанная из центра гиперболы радиусом, равным действительной полуоси.

Легко видеть, что два фокуса и касательная определяют единственную кривую 2-го порядка. В самом деле, построив точку, симметричную с одним из фокусов относительно данной касательной, мы найдем одну из точек направляющей окружности и таким образом будем знать ее радиус, т.-е. длину $2a$ фокальной оси искомой кривой; эта длина, вместе с двумя фокусами, вполне определит кривую. Чтобы найти точку прикосновения данной касательной, проводим радиус $F'H$ направляющей окружности в точку, симметричную другому фокусу относительно данной касательной; точка пересечения его с касательною будет искомою точкою прикосновения.

154. Посмотрим, какой вид принимают выведенные выше свойства для параболы. Рассмотрим касательную к параболе

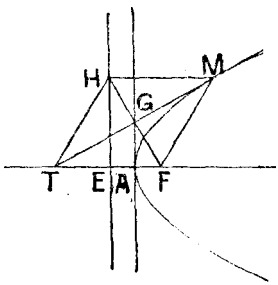
в точке M (черт. 143). Соединив M с фокусом F и опустив из M перпендикуляр MH на директрису EH, будем иметь, по свойству параболы,

$$FM = HM.$$

Далее, касательная MT делит пополам угол FMH (§ 150) и потому MG есть высота равнобедренного треугольника MFH; следовательно

$$FG = GH.$$

Это показывает, что точка H симметрична фокусу F относительно касательной в M. Таким образом геометрическое место точек, симметричных с фокусом параболы по отношению к касательным, есть директриса.



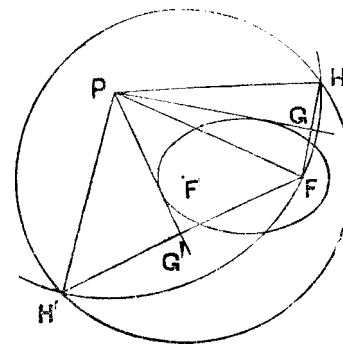
Черт. 143.

Опустим из G на ось параболы перпендикуляр GA. Так как A есть средина отрезка FE между фокусом и директрисою, то это—вершина параболы (§ 148). Отсюда геометрическое место проекций фокуса параболы на ее касательные есть касательная в вершине.

Отсюда видно, что в параболе направляющая окружность обращается в директрису, а описанная—в касательную в вершине; в самом деле, так как второй фокус параболы и ее центр находятся в бесконечно-удаленной точке оси параболы (§ 144), то окружности, имеющие эти две точки своими центрами, должны обратиться в пределе в прямыя, перпендикулярные к оси параболы.

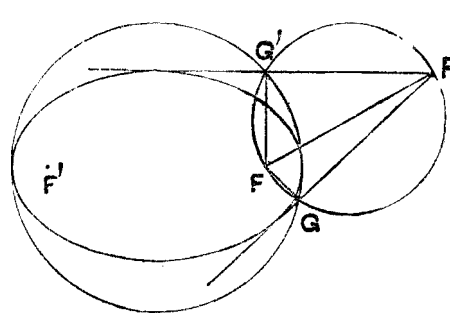
155. Построение касательных. Пользуясь свойствами направляющего и описанного кругов, мы получаем элементарное решение задачи о проведении касательных из данной точки к кривой 2-го порядка, данной своими фокусами и длиною фокальной оси. Пусть в кривой 2-го порядка даны два фокуса, F. F' (черт. 144) и фокальная ось $2a$. Описав окружность радиусом $2a$ из одного из фокусов F', мы получим направляющий круг. Другой фокус F, как мы знаем, будет лежать внутри круга у эллипса и вне—у гиперболы. Пусть требуется провести к кривой

касательную из данной точки P. Пусть будет PG искомая касательная. Точка H, симметричная с F по отношению к касательной, будет лежать на направляющем круге, описанном из F'. С другой стороны, FP и HP равны, как наклонныя, равно удаленныя от перпендикуляра PG; следовательно, H будет лежать также на окружности, описанной из P и проходящей через фокус F. Это показывает, что точка H, симметричная с F относительно искомой касательной, есть точка пересечения этой последней окружности с направляющею окружностью; так как две окружности пересекаются в двух точках, то мы получим таким образом две точки H, H'. Чтобы найти касательныя, остается опустить из P перпендикуляры на FH и FH'; эти касательныя будут действительными, мнимыми или сливающимися, смотря по тому, будет ли круг, описанный из P радиусом PF, действительно пересекаться с направляющим кругом, или они совсем не встретятся, или они будут касаться один другого. Первый случай будет иметь место, если точка P лежит вне данной кривой 2-го порядка, второй, если она лежит внутри, а третий, P лежит на самой кривой.



Черт. 114.

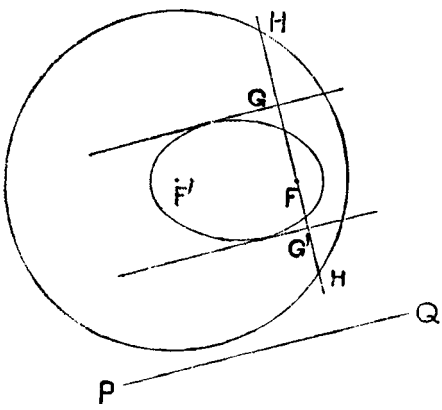
Для проведения касательных к центральной кривой из данной точки можно также воспользоваться описанным кругом. Пусть дан эллипс, его ось и фокусы F и F' (черт. 145). Основания перпендикуляров, пущенных из фокуса на касательныя, лежат на круге, описанном из центра эллипса радиусом, равным большой полуоси. Если соединим F' с P, то касательная и перпендикуляр FG на нее из фокуса образуют прямой угол, опирающийся на PF'. Следовательно, если мы построим окружность на



Черт. 145.

отрезке PF, как на диаметре, то точки ее пересечения с описанным кругом дадут основания G и G' перпендикуляров, опущенных из фокуса на касательныя; соединяя G и G' с P, мы получим искомые касательныя.

Таким же образом решается и задача о проведении касательной к центральной кривой 2-го порядка по данному направлению. Пусть требуется провести параллельно данной прямой PQ касательную к кривой 2-го порядка, данной своими фокусами и направляющим кругом (черт. 146). Опустим из F перпендикуляр на PQ; точки H, H' его пересечения с направляющею окружностью будут точками симметричными с F относительно искомых касательных. Самые касательныя получатся, как перпендикуляры в срединах G, G' отрезков FH, FH'. Точки G, G' лежат, как мы знаем, на описанном круге, которым мы поэтому могли бы воспользоваться вместо направляющего круга для решения той же задачи.

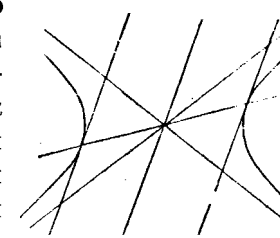


Черт. 146.

Последнюю задачу можно рассматривать, как предельный случай предыдущей. В самом деле, провести касательную по данному направлению значит провести касательную через данную бесконечно-удаленную точку. По мере удаления точки P в бесконечность, обе окружности как описанная из P радиусом PF так и построенная на PF, как на диаметре, обращаются в пределе в прямую, проведенную через F перпендикулярно к PQ. Таким образом, построения последней задачи являются также пределами построений предыдущей задачи.

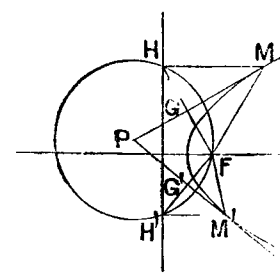
Обратим внимание на различие по отношению к последней задаче между эллипсом и гиперболою. Так как у эллипса фокус F лежит внутри направляющего круга, описанного из F', то всякая прямая, проходящая через F, пересекает направляющую окружность, и потому касательныя к эллипсу возможны по всякому направлению. Напротив, в гиперболе фокус F лежит

вне направляющего круга, и не всякая прямая, проходящая через F, пересекает направляющую окружность; поэтому к гиперболе можно провести касательную не по всякому направлению. Из того, что касательные в концах диаметра кривой 2-го порядка параллельны диаметру сопряженному (§ 100), ясно, что так как гипербола пересекается только с теми диаметрами, которые расположены внутри угла между асимптотами, то касательные к гиперболе могут быть параллельны только диаметрам, проходящим вне асимптотического угла (черт. 147).



Черт. 147.

В случае параболы предыдущие построения изменятся только в том отношении, что направляющая окружность заменится директрисою параболы, а описанная—касательною в вершине. Например, чтобы провести к параболе касательную из данной точки P (черт. 148), описываем из P окружность радиусом PF и находим точки H, H' ее пересечения с директрисою; эти точки будут симметричны с F относительно искомых касательных, а самые касательные получатся, как перпендикуляры из P к прямым FH, FH'. Чтобы найти точки прикосновения, восставим к директрисе перпендикуляры HM, $H'M'$. Точки M, M' будут точками прикосновения, так как по свойству наклонных имеем



Черт. 148.

$$FM = HM,\ FM' = H'M,$$

и следовательно M и M' лежат на параболе, как точки, равноудаленные от фокуса и от директрисы.

156*. Некоторые свойства касательных к кривым 2-го порядка

В дополнение к предыдущему мы укажем здесь несколько свойств касательных к кривым 2-го порядка. Рассмотрим угол MPM' (черт. 149), описанный около центральной кривой 2-го порядка. Построим точку H, симметричную с F относительно PM, и точку H', симметричную с F' относительно PM'. Так как

$$PF = PH,\ PF' = PH',\ FH' = F'H = 2a,$$

то треугольники PFH' и $PF'H$ равны, и мы имеем

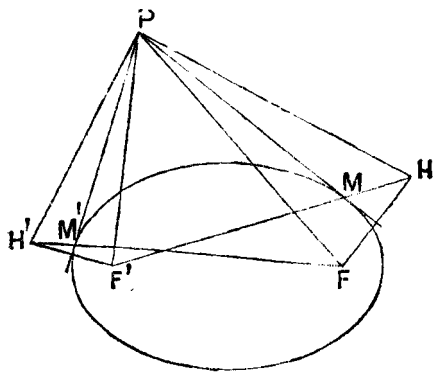
$$\angle FPH' = \angle F'PH,$$

или, отнимая общую часть $\angle F'PF$,

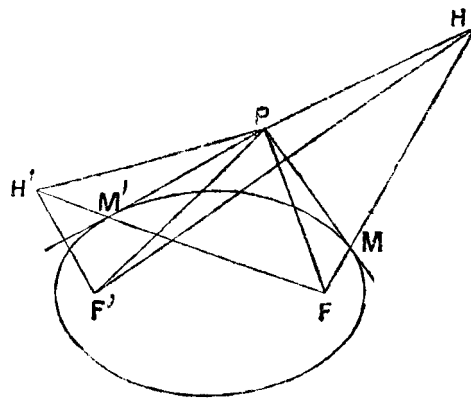
$$\angle FPH = \angle F'PH'.$$

Так как последние углы делятся пополам касательными PM, PM', то отсюда имеем

$$\angle FPM = \angle F'PM'.$$



Черт. 149.



Черт. 150.

Таким образом, стороны угла, описанного около центральной кривой 2-го порядка, одинаково наклонены к двум радиусам-векторам, проведенным в его вершину.

Далее, построим точки H, H' (черт. 150), симметричные с F' относительно обоих сторон описанного угла. В треугольниках PFH, PFH' сторона PF—общая и, кроме того,

$$PH = PF' = PH', \quad FH = FH' = 2a.$$

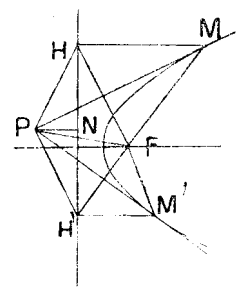
Следовательно, эти треугольники равны и мы имеем

$$\angle PFM = \angle PFM'.$$

Это показывает, что радиус-вектор, проведенный в вершину описанного угла, делит пополам

угол между радиусами-векторами, проведенными в точки прикосновения сторон.

Для параболы соответствующие свойства получатся, если мы обратим внимание на то, что один из фокусов параболы лежит в бесконечности. Рассмотрим угол MPM', описанный около параболы (чер. 151). Построим точки H, H', симметричные с F относительно сторон угла; они будут лежать на директрисе. Так как касательные PM, PM' делят пополам углы при вершинах равнобедренных треугольников PFH, PFH', то угол MPM' равен половине угла HPH'. Далее, опустив перпендикуляр PN на директрису HH', найдем, что угол HPN также равен половине угла HPH'. Отсюда



Черт. 151.

$$\angle MPM' = \angle HPN,$$

и, отнимая общую часть $\angle MPN$,

$$\angle M'PN = \angle HPM = \angle FPM.$$

Таким образом, в параболе одна из сторон описанного угла так же наклонена к радиусу-вектору, проведенному в его вершину, как другая сторона к оси параболы.

В равнобедренном треугольнике PHH' имеем $\angle PHH' = \angle PH'H$. Прибавляя к обоим углам прямые углы $\angle H'HM$ и $\angle HH'M'$, найдем

$$\angle PHM = \angle PH'M.$$

Далее, из равных треугольников FPM, HPM имеем $\angle PHM = \angle PFM$ и точно также $\angle PH'M' = \angle PFM'$

$$\angle PFM = \angle PFM$$

Это показывает, что в параболе радиус-вектор проведенный в вершину описанного угла, делит пополам угол между радиусами-векторами, проведенными в точки прикосновения сторон.

Наконец, в треугольнике PHH' имеем

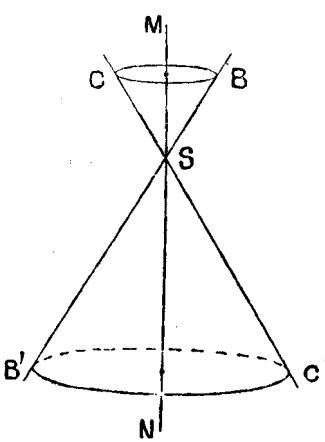
$$HN = H'N.$$

Так как HN и $H'N$ равны расстояниям точек M и M' от прямой PN, то отсюда имеем: в параболе прямая, проведенная через вершину описанного угла параллельно оси, равно удалена от точек прикосновения обеих сторон угла.

Если мы будем рассматривать параболу, как предельный вид центральной кривой 2-го порядка то все эти свойства касательных к параболе могут быть получены в пределе из выведенных выше свойств касательных к эллипсу и к гиперболе.

157*. Конические сечения. Каждая кривая 2-го порядка может быть получена, как линия пересечения конуса вращения с плоскостью. Поэтому кривыя 2-го порядка называются также коническими сечениями (§ 78).

Рассмотрим две пересекающиеся прямыя MN, BB' (черт. 152). Пусть будет S их точка пересечения. Вращая BB' около MN, мы получим поверхность, называемую конусом вращения, или круглым конусом. Эта поверхность состоит из двух полостей, простирающихся в бесконечность и имеющих общую точку S—вершину конуса. Различные положения вращающейся прямой BB' будут образующими конуса. Каждая точка прямой BB' описывает при вращении окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси конуса, а центр лежит на этой оси. Мы можем принять одну из этих окружностей, например, окружность $B'C'$, за направляющую окружность конуса.

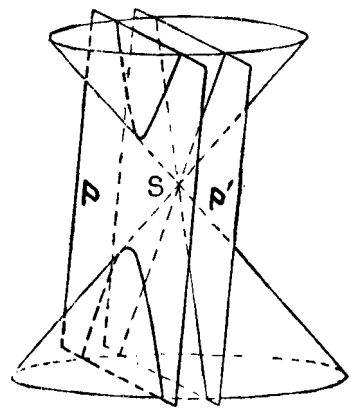


Черт. 152.

Пересечем конус произвольною плоскостью. Так как эта плоскость встретится с каждою образующею в одной точке, то мы получим в сечении линию, имеющую по одной общей точке с каждою образующею конуса. Но к некоторым из образующих секущая плоскость может быть параллельна, и тогда точка пересечения удалится в бесконечность; таким образом, линия пересечения

конуса с плоскостью будет иметь столько безконечно-удаленных точек, скольким образующим конуса параллельна секущая плоскость.

Пусть будет P (черт. 153) секущая плоскость. Проведем через вершину S плоскость P' ей параллельную; эта плоскость пересечет конус по известному числу образующих. Легко найти как велико может быть это число. Так как каждая образующая встречает направляющую окружность конуса в одной точке, то в плоскости P' будет лежать столько образующих, в скольких точках эта плоскость встретит направляющую окружность; так как направляющая есть кривая 2-го порядка, то число действительных точек пересечения может быть только 0, 1 или 2. Далее, легко видеть, что все образующие конуса, параллельные плоскости P необходимо лежат в плоскости P', так как эта плоскость содержит в себе все прямыя, проходящие через вершину S и параллельныя плоскости P. Поэтому никакая плоскость не может быть параллельна более нежели двум образующим круглого конуса. Отсюда следует, что сечения круглого конуса могут или вовсе не иметь безконечно-удаленных точек, или иметь их одну, или две. Мы увидим, что эти три случая соответствуют трем видам кривых второго порядка.

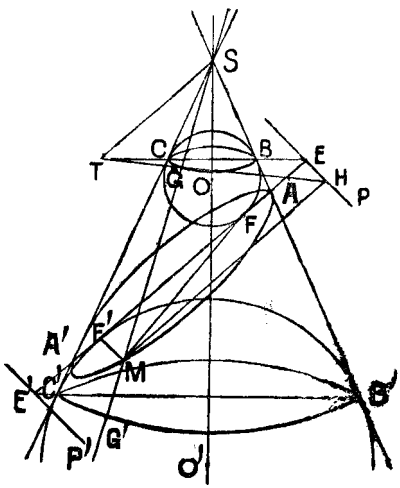


Черт. 153.

158*. Эллипс. Предположим, что секущая плоскость не параллельна ни одной образующей конуса. Так как в этом случае все точки линии пересечения конуса с плоскостью следуют одна за другою непрерывно, то ясно, что секущая плоскость пересечет только одну из двух полостей конуса. Пусть будет AMA' (черт. 154) секущая плоскость. Проведем через ось конуса SOO, плоскость, перпендикулярную к секущей плоскости; эта плоскость пересечет конус по двум образующим SA, SA' и секущую плоскость—по прямой AA'. Построим в плоскости треугольника SAA две окружности O, O', касающияся трех сторон этого треугольника или их продолжений и имеющие центры на оси конуса; это возможно, так как ось делит пополам угол между образую-

щими SA, SA'. Эти окружности коснутся образующих SA, SA' в точках B, B' и C, C' а прямой AA'—в точках F, F'.

Если мы будем вращать образующую SB и окружности O, O' около оси конуса, то получим конус и два шара. Так как $SB = SC$, как две касательныя из точки S к кругу O, то шар O будет касаться конуса по окружности, описанной точками B, C, и лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси конуса; точно также и шар O' будет касаться конуса по окружности $B'C'$.



Черт. 154.

Легко видеть, что шары O, O' будут касательными к секущей плоскости AMA' в точках F, F'. В самом деле, радиус OF лежит в плоскости SAA', перпендикулярной к секущей плоскости; кроме того, OF перпендикулярен к линии пересечения AA' обеих плоскостей; поэтому радиус OF перпендикулярен к секущей плоскости AMA', и шар O касается этой последней. То же относится и к шару O'.

Рассмотрим какую нибудь точку M на линии пересечения конуса с секущею плоскостью. Проведем прямыя MF, MF' и образующую SM; последняя пересечется в G, G' с окружностями BC, $B'C'$, по которым шары O, O' касаются конуса. Так как шар O касается конуса и секущей плоскости AMA', то отрезки MF и MG, как касательныя к шару, равны, и мы имеем:

$$MF = MG,$$

точно также относительно шара O'

$$MF' = MG'.$$

Отсюда

$$MF + MF' = MG + MG' = GG'$$

Но $GG' = BB'$, как образующия усеченного круглого конуса, потому, где бы мы ни взяли точку M на линии $AM'A$, сумм- $MF + FM'$ будет иметь постоянную величину BB':

$$MF + MF' = BB'. \qquad (24)$$

Прилагая те же рассуждения к точкам A и A', найдем:

$$AF + AF' = A'F + A'F' = BB'. \tag{25}$$

С другой стороны

$$AF + A'F = AF' + A'F' = AA'. \tag{26}$$

Складывая два последних равенства, имеем

$$2AF + AF' + A'F = 2A'F' + AF' + A'F.$$

Отсюда

$$AF = A'F',$$

и точно также

$$A'F = AF'.$$

Вследствие этого равенства (25) дают

$$BB' = A'F' + AF' = AA',$$

и равенство (24) обращается в следующее:

$$MF + MF' = AA'.$$

Это показывает, что линия пересечения конуса с плоскостью AMA' есть эллипс с фокусами в F S F', имеющий AA' своею большою осью.

Продолжив плоскости кругов BC, $B'C'$ до пересечения с секущею плоскостью AMA', мы получим в пересечении две прямыя EP, $E'P'$. Так как три названные плоскости перпендикулярны к плоскости SAA', то и прямыя EP, $E'P'$ также перпендикулярны к этой плоскости, а следовательно и к прямой AA'. Проведем из S прямую ST параллельно AA' до пересечения с прямою BC в точке T и проведем плоскость через прямыя SM, ST. Так как прямая ST параллельна AA', а плоскость AMA' содержит прямую AA', то плоскость, проведенная через SM, ST пересечется с плоскостью AMA по прямой MH, параллельной AA', и с плоскостью BC по прямой TGH. Из подобных треугольников GMH, GST имеем

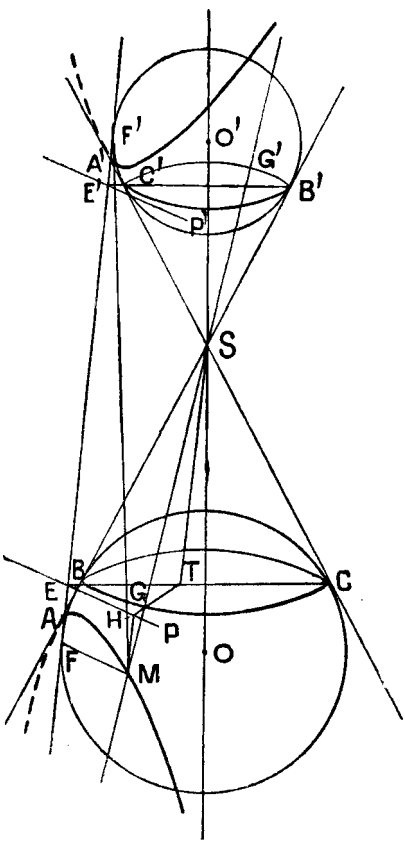
$$\frac{MG}{MH} = \frac{SG}{ST},$$

или, так как $MG = MF$,

$$\frac{MF}{MH} = \frac{SG}{ST}.$$

Так как расстояния точки S от всех точек окружности BC равны между собою, то отсюда видно, что отношение расстояний точки M от фокуса F и от прямой EP есть величина постоянная, не зависящая от положения точки M на линии AMA'. Это показывает, что прямая EP есть директриса, соответствующая фокусу F. Точно также убеждаемся, что прямая $E'P'$ есть директриса, соответствующая фокусу F'.

159*. Гипербола. Предположим теперь, что секущая плоскость параллельна двум образующим конуса. Тогда линия пересечения будет иметь две безконечно-удаленныя точки и будет состоять из двух отдельных ветвей, так как секущая плоскость встречает здесь обе полости конуса.



Черт. 155.

Повторим здесь то же построение, какое мы делали в случае эллипса. Теперь шары O, O' будут лежать в разных полостях конуса (черт. 155) и прямая ST, параллельная AA', пройдет не вне конуса, как это было в предыдущем случае, а внутри его.

Из равенства касательных, проведенных к шару из одной и той же точки M, имеем:

$$MF' - MF = MG' - MG = GG'.$$

Но

$$GG' = SG + SG' = SB + SB' = BB',$$

образующия конуса равны между собою и потому

$$MF' - MF = BB'. \qquad (27)$$

Прилагая те же рассуждения к точкам A, A', имеем

$$AF' - AF = A'F - A'F' = BB'. \tag{28}$$

С другой стороны,

$$A'F - AF = AF' - A'F' = AA'. \tag{29}$$

Складывая эти равенства, получим

$$AF' + A'F - 2AF = AF' + A'F - 2A'F'.$$

Отсюда

$$AF = A'F'$$

и точно также

$$A'F = AF'.$$

Вследствие этого равенства (27), (29) дают

$$BB' = AF' - A'F' = AA$$

и следовательно

$$MF' - MF = AA'.$$

Это показывает, что линия пересечения конуса S с плоскостью AMA' есть гипербола с фокусами F, F', имеющая AA' своею действительною осью.

Продолжив плоскости кругов BC, $B'C'$ до пересечения с секущею плоскостью, мы получим в пересечении прямыя EP, $E'P'$. Проведем прямую ST параллельно AA' до пересечения с BC и проведем через прямыя SM, ST плоскость, которая пересечет секущую плоскость AMA' по прямой MH, параллельной AA', а плоскость BC по прямой TGH. Из подобных треугольников GMH, GST находим

$$\frac{MG}{MH} = \frac{SG}{ST},$$

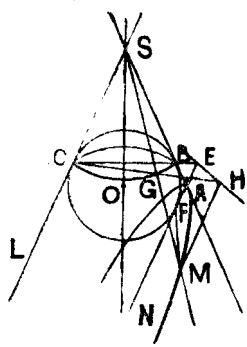
так как $MG = MF$,

$$\frac{MF}{MH} = \frac{SG}{ST}$$

Мы видим, что отношение расстояний точки M от фокуса F от прямой EP не зависит от положения точки M

боле AMA'; отсюда следует, что прямая EP есть директриса гиперболы, соответствующая фокусу F. Таким же образом убеждаемся, что $E'P'$ есть директриса, соответствующая фокусу F'

160*. Парабола. Предположим, что секущая плоскость параллельна только одной из образующих конуса. Тогда линия пересечения конуса с этою плоскостью будет иметь одну безконечно-удаленную точку. Повторяя здесь то же построение, какое было произведено в двух предыдущих случаях, проведем через вершину конуса S плоскость SAL (черт. 156), перпендикулярную к секущей плоскости AM. Легко видеть, что секущая плоскость



Черт. 156.

параллельна одной из тех двух образующих конуса, которые лежат в плоскости SAL. В самом деле, если бы секущая плоскость была параллельна образующей, лежащей впереди плоскости SAL, то по симметрии, она была бы параллельна еще другой образующей, лежащей позади этой плоскости; таким образом, секущая плоскость была бы параллельна не одной образующей, как мы это предполагаем, а двум. Плоскость SAL, проходя через образующую SL, параллельную секущей плоскости AM, пересечет эту последнюю по прямой AN, параллельной SL. Опишем в плоскости SAL окружность O, касательную к трем прямым SA, SL, AN; окружность O имеет центр на оси конуса, так как ось делит угол ASL пополам. Будем теперь вращать около оси конуса угол ASO и окружность O. Мы получим конус и шар O, касающийся конуса по кругу BC, плоскость которого перпендикулярна к оси конуса. Этот шар будет также касаться секущей плоскости AM в точке F (ср. § 158). Рассмотрим какую-нибудь точку M на линии пересечения конуса с плоскостью. Проведем образующую SM и положим, что она встретит окружность BC в точке G. Продолжим плоскость круга BC до пересечения с секущею плоскостью AM по прямой EP. Так как обе плоскости BC и AM перпендикулярны к плоскости SAL, то и прямая EP перпендикулярна к этой плоскости, а следовательно и к прямой AM. Проведем теперь плоскость через образующия SL и SM. Так как прямая SL параллельна прямой AN, то эта плоскость пересечет секущую плоскость AM по прямой MH, параллельной AN

С плоскостью BC эта плоскость пересечется
Из подобных треугольников GMH и GSC имеем

$$\frac{MG}{MH}=\frac{SG}{SC}.$$

Но $SG=SC$, как образующия конуса: с другой стороны, $MG=MF$, как касательныя из точки M к шару O. Таким образом из последней пропорции находим

$$MF=MH.$$

Это показывает, что линия пересечения конуса S с плоскостью AM есть парабола, имеющая точку F фокусом и прямую EP—директрисою.

Указанные в §§ 158—160 построения фокусов и директрис для сечений прямого круглого конуса дал в 1822 г. Данделен (Dandelin).

ГЛАВА IX.

Применение метода сокращенных обозначений к кривым 2-го порядка.

161. Пучек кривых 2-го порядка. Рассмотрим дво кривыя 2-го порядка

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \\ &b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Обозначим левые части уравнений кривых через A, B. Рассмотрим пучек кривых 2-го порядка

$$A - kB = 0, \qquad (2)$$

где k — параметр пучка.

Центрами пучка (2) служат четыре точки пересечения кривых (1); через эти четыре точки проходят все кривыя пучка.

Определим, сколько распадающихся кривых содержится в пучке кривых 2-го порядка. Представив уравнение пучка в раскрытом виде, будем иметь

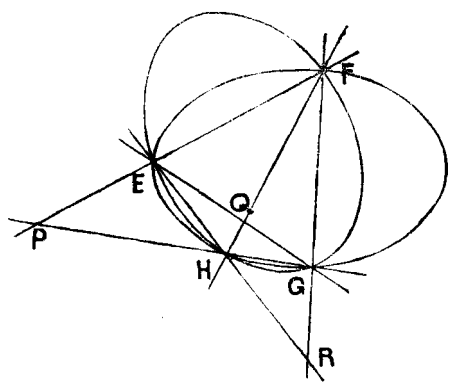
$$\begin{aligned} &(a_{11} - kb_{11})x^2 + 2(a_{12} - kb_{12})xy + (a_{22} - kb_{22})y^2 + \\ &+ 2(a_{13} - kb_{13})x + 2(a_{23} - kb_{23})y + (a_{33} - kb_{33}) = 0. \end{aligned}$$

Мы знаем, что кривая 2-го порядка распадается на пару прямых, если дискриминант ее уравнения равен нулю (§ 82). Приравнивая нулю дискриминант уравнения (2), получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} - kb_{11} & a_{12} - kb_{12} & a_{13} - kb_{13} \\ a_{21} - kb_{21} & a_{22} - kb_{22} & a_{23} - kb_{23} \\ a_{31} - kb_{31} & a_{32} - kb_{32} & a_{33} - kb_{33} \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Это уравнение третьей степени относительно k. В самом деле, левая часть уравнения есть детерминант третьего порядка, и потому каждый его член представляет произведение трех элементов детерминанта; а так как каждый элемент содержит неизвестное k в первой степени, если только соответствующий коэффициент b не равен нулю, то левая часть уравнения (3) будет, вообще, представлять многочлен третьей степени относительно k. Если, в частном случае, при раскрытии детерминанта (3) коэффициенты при старших степенях параметра k обратятся в нули, то это будет показывать, что некоторые корни уравнения (3) сделались безконечно-большими (см. § 78).

Отсюда следует; что в пучке кривых 2-го порядка есть, вообще, три распадающиеся кривыя (EF, GH), (EG, FH), (EH, FG) (черт. 157), соответствующие трем корням уравнения (3). Эти три распадающиеся кривыя образуют три пары хорд, соединяющих точки пересечения кривых пучка. Две хорды, принадлежащия к одной паре, называются дополнительными одна к другой. Очевидно, что каждые две дополнительные хорды, вместе взятые, например, EG и FH, проходят через все четыре центра пучка.



Черт. 157.

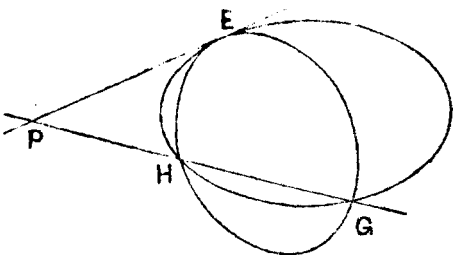
162*. Случай, когда одна из основных кривых пучка распадается на пару прямых. Предположим, что одна из двух основных кривых пучка (2), например, $B=0$ распадается на две прямых $M=0$, $N=0$, где M и N — многочлены первой степени по x и y. В этом случае уравнение $B=0$ обращается в $MN=0$ (§ 43), и уравнение пучка (2) принимает вид

$$A-kMN=0. \qquad (4)$$

Очевидно, что в пучке (4) центрами будут четыре точки пересечения кривой $A=0$ с прямыми $M=0$, $N=0$.

Следует заметить, что для пучка (4) один из корней уравнения (3) обращается в бесконечность, так как при $k=\infty$ мы получаем распадающуюся кривую пучка $MN=0$ (§ 44).

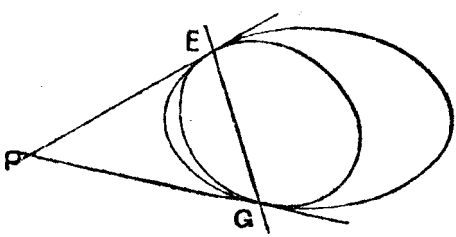
Посмотрим, что произойдет в том случае, когда одна из тех двух прямых, на которые распадается кривая $B=0$, например $N=0$, касается кривой $A=0$, Пусть это будет прямая PE (черт. 158). При этом два центра пучка, именно, две точки пересечения прямой $N=0$ с кривою $A=0$, сливаются в точке прикосновения E, и мы имеем пучек с тремя центрами, из которых один двойной. В этом случае все кривые пучка касаются друг друга в E, так как здесь сливаются две точки пересечения этих кривых; прямая $N=0$ есть их общая касательная.



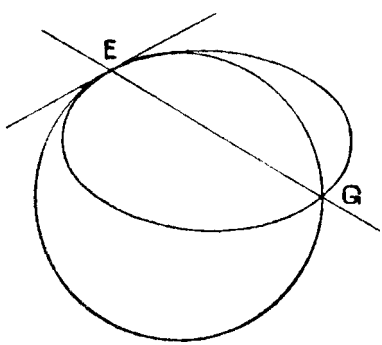
Черт. 158.

Если две кривые касаются друг друга, то число точек пересечения, сливающихся в точке прикосновения, уменьшенное на единицу, называется порядком прикосновения кривых в этой точке. Из предыдущего видно, что кривые пучка (4) имеют в E прикосновение первого порядка.

Положим теперь, что прямая $M=0$, обращается, как и прямая $N=0$, в касательную к кривой $A=0$. В этом случае четыре центра пучка сливаются попарно в точках прикосновения



Черт. 159.



Черт. 160.

обеих касательных, и мы получаем пучек кривых, имеющих двойное прикосновение, т.-е. касающихся между собою в двух точках. Пусть будут PE, PG (черт. 159) прямые $M=0$, $N=0$; тогда все кривые пучка будут касаться друг друга в точках E, G.

Далее, положим, что прямые $M=0$, $N=0$ различны, но что

прямая $M=0$ проходит через точку прикосновения E прямой $N=0$ (черт. 160). В этом случае все кривые пучка касаются между собою в точке E, в которой сливаются три из четырех центров пучка. Кривые пучка имеют в E прикосновение второго порядка. Так как здесь в E сливается нечетное число точек пересечения кривых пучка, то кривые пучка, соприкасаясь между собою в этой точке, вместе с тем перекрещиваются в ней, чего не было в двух предыдущих случаях. Здесь, как и в предыдущем случае, пучек имеет только два различных центра; но тогда или в предыдущем случае по два центра пучка сливались попарно, здесь три центра сливаются между собою, а четвертый стоит отдельно.

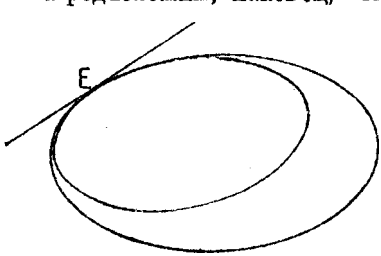
Рассмотрим теперь тот случай, когда прямые $M=0$, $N=0$ совпадают. Здесь многочлен M тождествен с многочленом N, и уравнение пучка имеет вид

$$A-kM^2=0. \qquad (5)$$

Так как прямые $M=0$, $N=0$ совпадают, то каждая точка пересечения прямой $M=0$ с кривою $A=0$ представляет здесь не один, а два сливающихся центра пучка (черт. 161). Таким образом мы имеем здесь, как и в предыдущем случае, пучек кривых, находящихся в двойном прикосновении; но тогда как ранее прямые $M=0$, $N=0$ были касательными в двух точках прикосновения, здесь уравнение $M=0$ представляет прямую EG, соединяющую обе точки прикосновения.

Прямая, соединяющая две точки прикосновения двух кривых, называются хордою прикосновения этих кривых (§ 96). Таким образом в уравнении (5) прямая $M=0$ есть общая хорда прикосновения кривых пучка.

Предположим, наконец, что в уравнении (5) прямая $M=0$ касается кривой $A=0$ (черт. 161). Тогда две точки пересечения прямой $M=0$ с кривою $A=0$ сольются в одну. Так как в каждой из этих двух двух точек сливались по два центра пучка, то теперь в точке прикосновения линий $M=0$ и $A=0$ сольются все четыре центра пучка. Таким образом, в этом случае все кривые пучка



Черт. 161.

будут иметь между собою в точке E прикосновение третьего порядка. Очевидно, что прикосновения порядка выше третьего между двумя кривыми 2-го порядка быть может, так как две кривые 2-го порядка не могут иметь более четырех общих точек.

163*. Характеристическое уравнение. Характер пучка кривых 2-го порядка тесно связан с свойствами характеристического уравнения (3) (§ 161).

Мы знаем, что каждому корню этого уравнения соответствует в пучке кривая, распадающаяся на пару прямых и что точка пересечения этих прямых определяется из системы совместных уравнений (§ 82)

$$\begin{aligned}(a_{11}-kb_{11})x+(a_{12}-kb_{12})y+(a_{13}-kb_{13})t&=0,\\(a_{21}-kb_{21})x+(a_{22}-kb_{22})y+(a_{23}-kb_{23})t&=0,\\(a_{31}-kb_{31})x+(a_{32}-kb_{32})y+(a_{13}-kb_{13})t&=0,\end{aligned}\qquad(6)$$

где k есть соответствующий корень характеристического уравнения (3).

Предположим, что все три корня уравнения (3) различны Тогда мы будем иметь в пучке три различных пары прямых линий. Легко видеть, что это может быть только в том случае, когда все четыре центра пучка различны между собою (черт. 157). Мы здесь имеем, таким образом, самый общий случай.

Положим теперь, что из трех корней уравнения (3) два корня равны между собою. Тогда две из трех распавшихся кривых пучка должны слиться. Очевидно, что это может быть только в том случае, когда из четырех центров пучка два центра сливаются между собою. Если, например, центр F совпадает с E, то прямые EG, FH совпадают соответственно с FG, EH, и две точки Q, R пересечения обеих пар прямых переходят обе в E. Так как здесь два центра пучка сливаются в E, то все кривые пучка взаимно касаются в этой точки (черт. 158). Распадающиеся кривые пучка состоят в этом случае с одной стороны из касательной PE и секущей GH, и с другой—из пары прямых EG, EH.

Положим, далее, что двукратный корень уравнения (3) обращает в нуль не только детерминант (3), но и все его миноры. Тогда (§ 84) из трех уравнений (6) независимо только одно, и потому пара прямых, соответствующая этому корню, обращается

в одну двойную прямую. Очевидно, что в двух точках пересечения этой прямой с кривыми пучка сливаются по два центра, и пучек состоит из кривых, взаимно касающихся в двух точках (черт. 159). Мы здесь также имеем только две распадающиеся кривые; одна состоит из хорды прикосновения EG, как двойной прямой, а другая—из пары касательных PE, EG.

Предположим теперь, что все три корня уравнения (3) равны между собою. Тогда все три пары распадающихся прямых должны быть тождественны между собою; это может быть только в том случае, если три из четырех центров пучка сливаются между собою. В этом случае единственная распадающаяся кривая будет состоять из касательной в тройном центре и из прямой, соединяющий этот центр с последним простым (черт. 160).

Далее, если трехкратный корень обращает в нуль и все миноры, то, по предыдущему, последняя прямая сливается с касательной, и мы имеем пучек с четырьмя слившимися центрами (черт. 161).

Наконец, если трехкратный корень обращает в нуль все элементы детерминанта (13), то все три уравнения (6) обращаются в тождества, и всякая пара прямых на плоскости может считаться принадлежащею к пучку (2). В этом случае коэффициенты обоих уравнений (1) пропорциональны и эти уравнения представляют одну и ту же кривую. Очевидно, что в этом случае все кривыя пучка тождественны между собою и только одна из них делается вполне неопределенною.

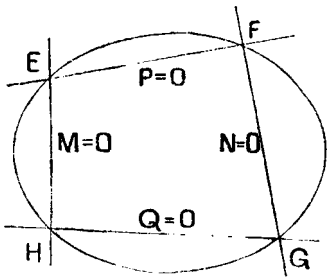
164*. Случай, когда обе основные кривые пучка распадаются на пары прямых. Положим, что обе основные кривые пучка (2) распадаются на пары прямых. Пусть кривая $A=0$ распадается на прямые $M=0$, $N=0$, а $B=0$ на прямые $P=0$, $Q=0$. Тогда уравнение пучка будет

$$MN-kPQ=0. \tag{7}$$

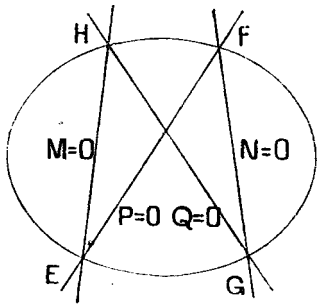
Очевидно, что в этом случае один из корней уравнения (3) будет $k=0$, а другой $k=\infty$, так как корням уравнения (3) соответствуют распадающиеся кривые пучка (2), а мы знаем (§ 44), что основным кривым пучка соответствуют значения $k=0$, $k=\infty$.

Четыре центра пучка (7) лежат в точках пересечения прямых $M=0$, $N=0$ с прямыми $P=0$, $Q=0$. Эти точки служат вершинами четыреугольника $EFGH$, для которого $M=0$, $N=0$

и $P=0$, $Q=0$ будут парами противоположных сторон (черт. 162) и уравнение (7) есть уравнение пучка кривых 2-го порядка, описанных около этого четыреугольника. Может случиться, что одна пара прямых будет перекрещиваться внутри другой пары (черт. 163). При этом фигура $EFGH$ уже не будет ограничивать площади, и потому не будет четыреугольником в обычном смысле этого слова; но если мы условимся называть четыреугольником всякую совокупность четырех точек вместе с четырьмя прямыми, соединяющими эти точки в определенной последовательности (§ 66), то, с этой точки зрения, фигура $EFGH$ будет четыреугольником при всяком расположении прямых $M=0$, $N=0$, $P=0$, $Q=0$, и потому мы можем сказать, что уравнение $MN-kPQ=0$ всегда представляет пучек кривых, описанных около четыреугольника, стороны которого суть упомянутые прямые.



Черт. 162.



Черт. 163.

Если в уравнении (7) прямые $P=0$, $Q=0$ сливаются между собою, то уравнение принимает вид

$$MN-kP^2=0 \qquad (8)$$

Так как прямые $P=0$, $Q=0$ сливаются между собою, то каждая точка пересечения прямой $P=0$ с прямыми $M=0$, $N=0$ представляет здесь не один, а два сливающихся центра пучка. Таким образом, уравнение (8) представляет пучек кривых 2-го порядка, касающихся прямых $M=0$, $N=0$ в точках их пересечения с прямою $P=0$. Прямая, соединяющая две точки прикосновения кривой, называется (§ 162) хордою прикосновения. Таким образом, в уравнении (8) прямая $P=0$ есть

хорда прикосновения кривых пучка. На черт. 159 прямые PF, PG суть общие касательные $M=0$, $N=0$ к кривым пучка, а прямая EG—хорда прикосновения $P=0$.

165*. Остановимся несколько подробнее на уравнении (7). Легко убедиться, что к виду (7) может быть приведено уравнение каждой кривой 2-го порядка. В самом деле, если мы примем любые четыре точки кривой за вершины вписанного четыреугольника и обозначим уравнения его сторон через $M=0$, $N=0$, $P=0$, $Q=0$, то наша кривая будет принадлежать пучку кривых, описанных около четыреугольника, и потому ее уравнение будет иметь вид (7), причем параметр k будет иметь некоторое определенное числовое значение. Мы можем присоединить числовой множитель k к многочлену P, и тогда уравнение нашей кривой будет иметь вид:

$$MN - PQ = 0. \tag{9}$$

Из этой формы уравнения кривых 2-го порядка можно вывести несколько важных свойств этих кривых. Приведем многочлены M, N, P, Q к нормальному виду (§ 49). Пусть их нормирующие множители будут соответственно m, n, p, q. Тогда уравнение (8) представится в виде

$$\frac{mM.nN}{m.n} = \frac{pP.qQ}{p.q},$$

или

$$\frac{mM.nN}{pP.qQ} = \frac{mn}{pq}.$$

Так как многочлены mM, nN, pP, qQ имеют нормальный вид, то, каждый из них представляет расстояние точки (x, y), соответственно от прямых $M=0$, $N=0$, $P=0$, $Q=0$ (§ 59), и предыдущее уравнение выражает, что произведение расстояний любой точки кривой 2-го порядка от двух прямых $M=0$, $N=0$, и произведение расстояний той же точки от двух других прямых $P=0$, $Q=0$, находятся между собою в отношении, одинаковом для всех точек кривой. Отсюда мы получаем следующее предложение:

Геометрическое место точек, для которых произведение их расстояний от двух данных пря-

мых находится в постоянном отношении к произведению их расстояний от двух других данных прямых, есть кривая 2-го порядка, описанная около четыреугольника, образованного этими четырьмя прямыми. (Папп, около 300 г. после Р. Х.).

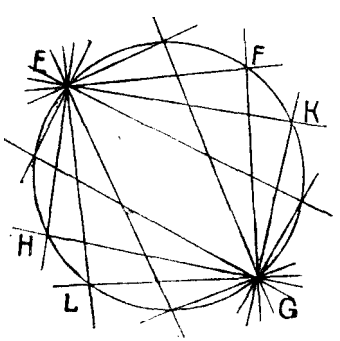
166*. Образование кривых 2-го порядка посредством проективных пучков. Из уравнения (9) может быть получено другое, еще более важное свойство кривых 2-го порядка. Представим это уравнение в виде

$$\frac{M}{P} = \frac{Q}{N} \tag{9'}$$

Обозначая величину обоих отношений через h, мы можем заменить уравнение (9') двумя следующими:

$$M - hP = 0, \quad Q - hN = 0. \tag{10}$$

Пусть будут прямые $M=0$, $N=0$, $P=0$, $Q=0$ соответственно EH, GF, EF, GH (черт. 164). Будем рассматривать в уравнениях (10) h, как переменный параметр. Тогда первое из них будет представлять пучек прямых с центром в E, а второе— пучек прямых с центром в G. Давая в обоих уравнениях параметру h определенное значение, мы будем иметь в каждом пучке определенный луч. Если мы будем считать соответственными те лучи обоих пучков, которые соответствуют одному и тому же значению параметра h, то этим будет установлено между лучами обоих пучков взаимно-однозначное соответствие, т.-е. такое, при котором каждому лучу одного пучка соответствует один луч другого. Пусть будет K точка пересечения двух соответственных лучей EK, GK пучков (10). Так как из системы уравнений (10) следует уравнение нашей кривой (9') то координаты точки K, удовлетворяя уравнениям (10), будут удовлетворять и уравнению кривой (9'). Отсюда получается следующее предложение:



Черт. 164.

Геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух прямолинейных пучков, находящихся в взаимно-однозначном соответствии, есть кривая второго порядка, проходящая через центры обоих пучков.

Это предложение принадлежит Штейнеру (Steiner, 1826).

Дадим в уравнениях (10) параметру h два различных значения h_1, h_2. Мы получим две пары соответственных лучей обоих пучков, и так как каждые два соответственных луча пересекаются в одной из точек кривой (9), то мы получим две точки K, L кривой.

Рассмотрим четыре точки H, F, K, L и найдем сложное отношение четырех лучей, соединяющих эти точки с точкою E, а также сложное отношение четырех лучей, соединяющих те же четыре точки с точкою G. Так как уравнения лучей EH, EF, EK, EL суть соответственно $M=0$, $P=0$, $M-h_1P=0$, $M-h_2P=0$, то их сложное отношение равно $h_1 : h_2$ (§ 64); точно также уравнения лучей GH, GF, GK, GL, суть $Q=0$, $N=0$, $Q-h_1N=0$, $Q-h_2N=0$, и их сложное отношение тоже равно $h_1 : h_2$. Так как точки E и G суть две произвольные точки кривой, то, очевидно, что из какой бы точки кривой мы ни проводили лучей к четырем точкам той же кривой H, E, K, L, сложное отношение этих лучей будет иметь одну и ту же величину. Отсюда получаем следующее предложение:

Сложное отношение четырех лучей проведенных к четырем точкам кривой 2-го порядка из произвольной пятой точки той же кривой, не зависит от положения этой пятой точки, и есть, в этом смысле, величина постоянная.

Это предложение дал Шаль (Chasles, 1829)

Два последних предложения служат в высшей, или проективной геометрии основанием теории кривых 2-го порядка.

167* Частные виды уравнения пучка кривых 2-го порядка. Остановимся на том случае, когда в пучке кривых 2-го порядка одна из основных кривых распадается на пару прямых, и одна из этих прямых удаляется в бесконечность. Этот случай интересен, между прочим, в том отношении, что из него получаются некоторые из выведенных ранее видов уравнения кривых 2-го порядка. Предположим, что в уравнении (4) § 162 прямая $N=0$

есть бесконечно-удаленная; так как уравнение бесконечно-удаленной прямой есть $1 = 0$ (§ 53), то уравнение (4) принимает вид

$$A - kM = 0 \qquad (11)$$

Чтобы выяснить смысл этого уравнения, рассмотрим прямую $M = 0$ и кривую $A = 0$, которую мы примем за гиперболу, чтобы иметь действительными точки пересечения ее с бесконечно-удаленною прямою. Уравнение $A - kMN = 0$ представляет пучек кривых, проходящих через точки пересечения кривой $A = 0$ с прямыми $M = 0$ и $N = 0$; так как прямая $N = 0$ обратилась в бесконечно-удаленную, то уравнение $A - kM = 0$ представляет пучек кривых 2-го порядка, имеющих с гиперболою $A = 0$ две общие точки на конечном расстоянии и две на бесконечно-удаленной прямой. Но если кривые имеют две общие точки в бесконечности, то в этих бесконечно-удаленных точках должны встречаться и асимптоты этих кривых; следовательно, уравнение (11) представляет пучек кривых, имеющих две общие точки и параллельные асимптоты.

Так как уравнения вида $A - kM = 0$ при различных значениях параметра k отличаются только членами первой степени, то мы можем сказать, что если уравнения кривых 2-го порядка имеют одинаковые старшие члены, то эти кривые имеют общие бесконечно-удаленные точки. Такие кривые 2-го порядка называются подобными и подобно расположенными (§ 115).

Таким же образом можно исследовать и тот случай, когда в уравнении (5) $A - kM^2 = 0$ прямая $M = 0$ обращается в бесконечно удаленную. Выше мы видели (§ 162), что уравнение $A - kM^2 = 0$ представляет пучек кривых, имеющих с кривою $A = 0$ двойное прикосновение по хорде $M = 0$. Если $M = 0$ есть бесконечно-удаленная прямая, то ее уравнение есть $1 = 0$, и уравнение $A - kM^2 = 0$ принимает вид

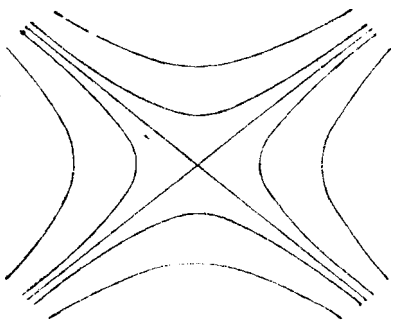
$$A - k = 0$$

представляет пучек кривых, имеющих двойное прикосновение бесконечно-удаленной прямой. Но если две кривые 2 го касаются друг друга в двух бесконечно-удаленных точках, в этих точках общие касательные, т. е. следовательно и общий центр (черт. 165). Таким

образом, уравнение $(11)=0$ представляет пучок кривых, имеющих общие асимптоты.

Так как изменяя k в уравнении $A-k=0$, мы изменяем только постоянный член, то отсюда получаем следующий вывод

если уравнения кривых отличаются только постоянным членом, то соответствующие кривые имеют общие асимптоты.



Черт. 165.

Перейдем к уравнению (8). Оно, как мы знаем, представляет пучек кривых, касающихся прямых $M=0$, $N=0$ в точках их пересечения с прямою $P=0$. Предположим, что прямая $P=0$ обратилась в бесконечно-удаленную. Тогда уравнение (8) принимают вид

$$MN-k=0. \tag{13}$$

Согласно предыдущему, оно представляет теперь пучек кривых, касающихся прямых $M=0$, $N=0$ в бесконечности, т.-е имеющих эти прямые асимптотами. Если мы примем прямые $M=0$, $N=0$ за оси координат, то их уравнения будут $x=0$, $y=0$, и мы получим известное уравнение кривой 2-го порядка относительно асимптот (§ 128)

$$xy-k=0.$$

Если в уравнении (8) удаляется в бесконечность прямая $N=0$, то уравнение принимает вид

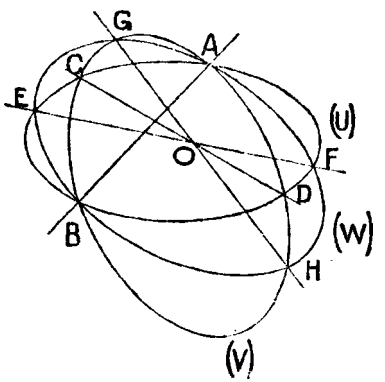
$$M-kP^2=0. \tag{14}$$

Это уравнение представляет пучек кривых, касающихся прямой $M=0$ и бесконечно-удаленной прямой в точках их пересечения с прямою $P=0$. Таким образом, кривыя (14) суть параболы (§ 10), и так как прямые, направленные в бесконечно удаленную точку параболлы, суть ее диаметры (§ 89), то уравнение (14) представляет пучек парабол, имеющих прямую $P=0$ диаметром, а прямую $M=0$ касательною в его конце. Если мы при-

мом прямые $P=0$ и $M=0$ за оси координат и заменим k через $\frac{1}{2p'}$, то уравнение (14) обратится в известное уравнение параболы (§ 131)

$$y^2 = 2p'x.$$

168. Свойство кривых 2-го порядка, имеющих общую хорду. Рассмотрим три кривых 2-го порядка (U), (V), (W), имеющие две общие точки A, B (черт. 166). Пусть, кроме того, кривые (U) и (V) пересекаются еще в точках C, D, кривые (U) и (W) — в точках E, F, и кривые (V) и (W) — в точках G, H. Проведем общую хорду AB и дополнительные хорды CD, EF, GH (§ 161).



Черт. 166.

Пользуясь методом сокращенных обозначений, докажем следующую теорему:

Если три кривых 2-го порядка имеют общую хорду, то три их дополнительные хорды проходят через одну точку.

Пусть будут

$$U=0,\ M=0,\ N=0,$$

уравнение кривой (U) и прямых AB, CD, EF. Нетрудно найти вид уравнений двух остальных кривых (V) и (W). Так как кривая (V) проходит через точки пересечения кривой (U) с прямыми AB, CD, то она принадлежит к пучку, определяемому кривою (U) и парою прямых AB, CD, и потому ее уравнение должно иметь вид (§ 162)

$$U - kMN = 0.$$

Точно также уравнение кривой (W) будет иметь вид

$$U - k'MP = 0.$$

Вычитая эти два уравнения, получим

$$M(kN - k'P) = 0.$$

Так как это уравнение получилось через вычитание уравнений кривых (U) и (W), то координаты, удовлетворяющие совместно уравнениям обеих кривых, будут удовлетворять и последнему уравнению. Это показывает, что кривая, изображаемая этим уравнением, проходит через все точки пересечения кривых (V) и (W). Так как левая часть последнего уравнения распадается на два множителя, то соответствующая кривая распадается на пару прямых:

$$M = 0, \quad kN - k'P = 0.$$

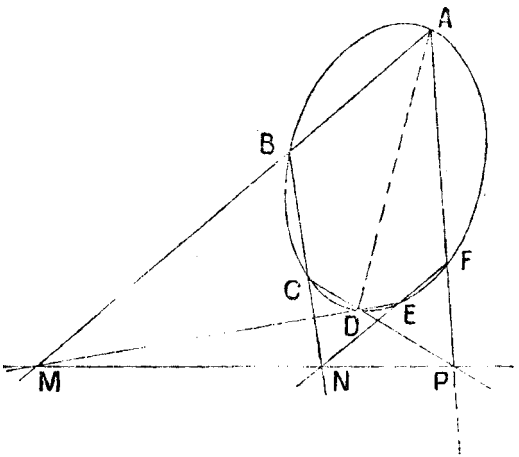
Первая из этих прямых есть хорда AB; поэтому вторая прямая должна проходить через две остальные точки пересечения G, H кривых (U) и (W). Таким образом, $kN - k'P = 0$ есть уравнение прямой GH.

Сопоставляя между собою уравнения $N = 0$, $P = 0$ и $kN - k'P = 0$ мы видим непосредственно, что хорды CD, EF и GH проходят через одну точку (§ 62). В самом деле, координаты точки пересечения O первых двух прямых обращают в нуль многочлены N и P, а следовательно и многочлен $kN - k'P$ откуда следует, что третья прямая проходит через точку, пересечения двух первых. Таким образом, наша теорема доказана.

169. Теорема Паскаля. Так как кривая 2-го порядка определяется пятью лежащими на ней точками (§ 73), то, вообще, нельзя провести кривую 2-го порядка через шесть точек, произвольно взятых на плоскости, так как кривая, проведенная через пять из них, вообще, не пройдет через шестую. Отсюда следует, что если шесть точек лежат на кривой 2-го порядка, то между ними должно существовать некоторое соотношение. Это соотношение выражается теоремою Паскаля (Pascal, 1640).

Положим, что шесть точек A, B, C, D, E, F, лежат на кривой 2-го порядка (черт. 167). Соединим эти точки в каком нибудь порядке замкнутою ломаною. Мы будем называть эту ломаную шестиугольником, вписанным в кривую 2-го порядка, независимо от того, заключает ли она часть плоскости (черт. 167) или нет (черт. 168) (ср. § 164). Условимся называть противоположными те стороны шестиугольника, между которыми находятся по две стороны; тогда парами противоположных сторон будут AB и ED, BC и EF, CD и FA.

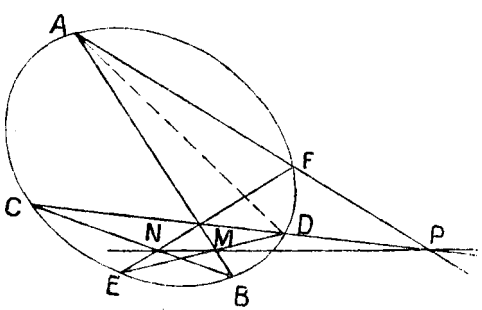
Найдем три точки M, N, P, в которых пересекаются противоположные стороны вписанного шестиугольника или их продолжения. Теорема Паскаля состоит в следующем:



Черт. 167.

Во всяком шестиугольнике, вписанном в кривую 2-го порядка, три точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.

Теорема Паскаля представляет пример геометрического предложения, относящегося к взаимному положению геометрических



Черт. 168.

форм, или дескриптивного, в отличие от предложений, относящихся к их количественным свойствам, или метрических. Так, мы знаем, что окружность определяется тремя точками; поэтому между каждыми четырьмя точками окружности должна существовать известная зависимость. Эта зависимость выражается в теореме. Птоломея, связывающей между собой длины сторон и диа-

гоналей вписанного в круг четыреугольника; очевидно, что теорема Птоломея есть предложение метрическое. Напротив, в теореме Паскаля мы имеем ряд прямых, проходящих через данные точки, и точек, лежащих на данных прямых, и самая теорема устанавливает зависимость между относительными положениями этих элементов; эта теорема есть предложение дескриптивное.

Для доказательства теоремы Паскаля мы воспользуемся теоремою предыдущего параграфа. Прием за кривую (U) кривую, описанную около шестиугольника, а за каждую из кривых (V) и (W) — по две стороны шестиугольника, взятых через одну, так чтобы общею хордою трех кривых была прямая, соединяющая две противоположных вершины шестиугольника. Если мы примем за общую хорду прямую AD, то кривою (V) будет пара прямых (AB, CD), а кривою (W)—пара прямых (DE, FA).

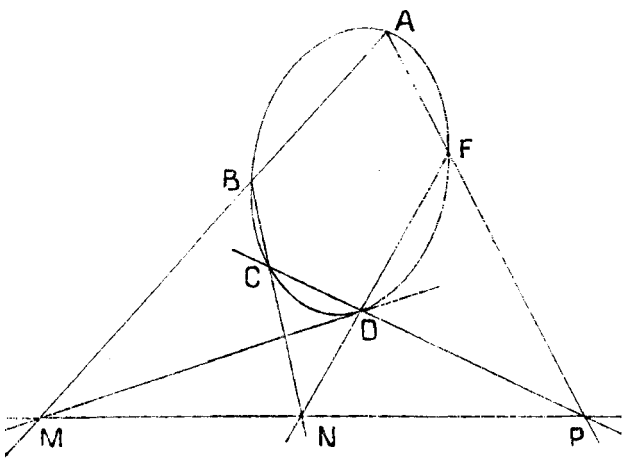
Найдем для каждых двух кривых (U), (V), (W) хорды дополнительные к общей хорде AD. Так как (U) и (V) пересекаются в точках A, B, C, D, то для них хордою дополнительною к AD будет прямая BC. Точно также дополнительною хордою для (U) и (W) будет EF, а для (V) и (W)—MP. По предидущей теореме (§ 168), прямая MP проходит через точку N, в которой пересекаются прямые BC и EF. Так как M, N, P суть три точки пересечения пар противоположных сторон вписанного шестиугольника $ABCDEF$, то теорема Паскаля доказана.

170. Предельные случаи теоремы Паскаля. Посмотрим, как видоизменится теорема Паскаля, если некоторые из вершин вписанного шестиугольника будут беспредельно сближаться между собою. Мы знаем (§ 80), что если две точки пересечения прямой с кривою сближаются между собою, то самая прямая стремится к совершенно определенному положению, именно, к положению касательной в той точке, где слились две прежние точки пересечения. Поэтому, если две смежные вершины шестиугольника, вписанного в кривую 2-го порядка, будут неограниченно сближаться между собою, то соединяющая их сторона в пределе примет положение касательной в точке слияния обоих вершин (черт. 169). Посмотрим, какой вид получит в этом случае теорема Паскаля. Положим, что вершина D и E слились между собою. Тогда вместо шестиугольника у нас получится пятиугольник $ABCDF$; но так как в точке D слились две точки, то исчезнувшая шестая сторона DE заменится касательною в точке D

Точки N и P останутся попрежнему точками пересечения противоположных сторон BC с DF и CD с AF; но точка M обратится в точку пересечения стороны AB с касательною в противоположной вершине D. Таким образом мы получаем предложение:

Во всяком пятиугольнике, вписанном в кривую 2-го порядка, точки пересечения двух пар несмежных сторон лежат на одной прямой с точкою пересечения пятой стороны и касательной в противоположной вершине.

Если мы приведем в совпадение еще одну пару вершин вписанного шестиугольника, то получим вписанный четыреуголь-



Черт. 169.

ник. При этом получается один из наиболее замечательных случаев Паскалевой теоремы. Положим, что в точках B и D слились по две вершины шестиугольника (черт. 170); тогда в этих точках мы должны провести касательные, которые заменят исчезнувшие стороны шестиугольника. Найдем точки пересечения противоположных сторон. Первая сторона есть AB, вторая — касательная в B, третья — BC, четвертая — CD, пятая — касательная в D, шестая — DA. Первая точка пересечения есть M — точка пересечения AB с CD; вторая точка пересечения находится на пересечении сторон второй и пятой: это будет точка N пересечения касательных в B и в D; наконец, третья точка P получится, как точка пересечения третьей и шестой сторон, т.-е. BC и DA.

увидим, что теорема Паскаля позволяет выполнять эти построения при помощи только одной линейки. Это значит что для этих построений нужно только проводить прямую через две данные точки и находить точку пересечения двух данных прямых. Положим, что нам даны пять точек кривой 2-го порядка A, B, C, D, E (черт. 167). Чтобы построить сколько угодно точек кривой при помощи теоремы Паскаля, поступим следующим образом. Проведем через одну из данных точек произвольную прямую AP и будем искать вторую точку пересечения этой прямой с кривою. Соединим данные точки в любой последовательности ломаною линиею, начиная с A, и примем прямые PA, AB, BC, CD, DE за пять сторон шестиугольника, вписанного в искомую кривую. Найдем точки пересечения M, P противоположных сторон шестиугольника AB и DE, PA и CD. По теореме Паскаля на прямой MP должна лежать точка пересечения стороны BC с неизвестною шестою стороною треугольника. Поэтому, если мы найдем точку пересечения N стороны BC с прямою MP, то прямая EN будет шестою стороною вписанного шестиугольника, а точка пересечения F прямых AP и EN — новою точкою кривой 2-го порядка. Проводя из точки A прямые по разным направлениям, мы можем построить таким образом сколько угодно точек кривой.

Таким же образом мы могли бы построить сколько угодно точек кривой, если бы были даны четыре точки и касательная в одной из них или три точки и касательные в двух из них.

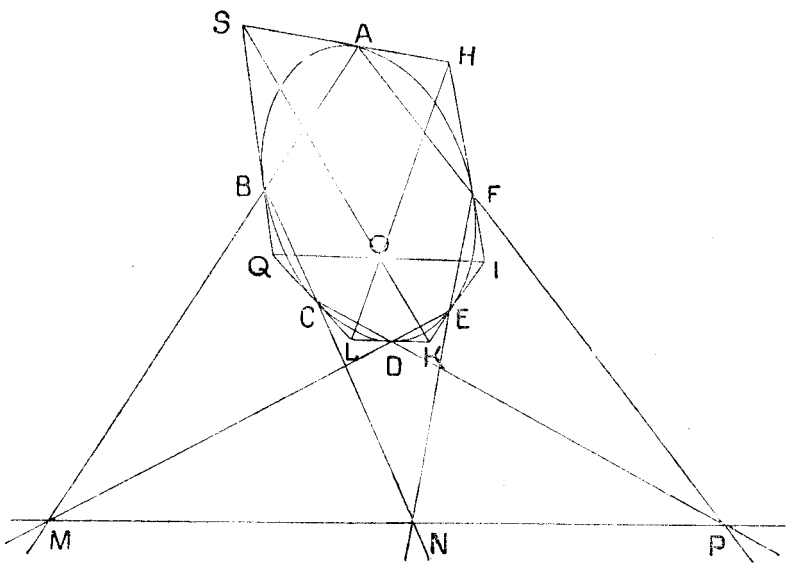
Пользуясь теоремою Паскаля, мы можем также построить касательную в каждой из пяти данных точек кривой 2-го порядка. Пусть нам даны пять точек A, B, C, D, E кривой (черт 169). Чтобы построить касательную в точке D, находим точки пересечения N, P, сторон BC и DF, CD и AF и точку пересечения M стороны AB с прямою NP; прямая DM будет искомою касательною.

172. Теорема Брианшона. Так как теорема Паскаля выражает свойство положения известной группы точек и прямых то на основании начала двойственности ей соответствует другая теорема, которая получится, если мы заменим в теореме Паскаля точки прямыми, прямые — точками, а кривую 2-го порядка — кривою 2-го класса; известно (§ 81), что кривая 2-го класса суть те же кривыя 2-го порядка, но рассматриваемые не как геометрические места точек, а как огибающие касательных

к ним прямых (§ 67). Поэтому, преобразуя теорему Паскаля согласно началу двойственности, мы получим новое предложение, относящееся, как и теорема Паскаля, к кривым 2-го порядка.

Теорема взаимная теореме Паскаля носит название теоремы Брианшона (Brianchon, 1806). Для получения ее из теоремы Паскаля мы воспользуемся методом взаимных поляр (§ 94). Будем искать поляры всех точек и полюсы всех прямых, рассматриваемых в теореме Паскаля, пользуясь тем свойством поляр, что если из двух точек одна лежит на поляре другой, то другая лежит на поляре первой.

Рассмотрим шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в кривую 2-го порядка (черт. 171). Построим поляры его вершин относи-



Черт. 171.

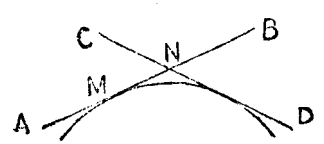
тельно кривой. Так как поляры точек кривой, взятые относительно той же кривой, суть касательные к кривой в этих точках (§ 92), то поляры вершин вписанного шестиугольника образуют шестиугольник $HIKLQS$, описанный около кривой, причем точками прикосновения сторон описанного шестиугольника служат вершины вписанного. Легко видеть, что, обратно, стороны вписанного шестиугольника будут полярами вершин описанного; это следует из того, что поляра вершины описанного угла есть хорда прикосновения его сторон (§ 96).

Рассмотрим точку пересечения M противоположных сторон AB, DE вписанного шестиугольнива. Так как точка M принадлежит прямым AB и DE, то ее поляра должна проходит через полюсы этих прямых, т.-е. через вершины S и K описанного шестиугольника; таким образом, поляра точки M есть диагональ SK описанного шестиугольника. Таким же образом мы убедимся, что полярами двух других точек пересечения N, P противоположных сторон вписанного шестиугольника служат две другие диагонали QI, LH описанного шестиугольника. По теореме Паскаля, точки M, H, P лежат на одной прямой; поэтому диагонали SK, QI, LH, как поляры этих точек, должны проходить через одну и ту же точку O—полюс этой прямой. Отсюда имеем следующее предложение:

Во всяком шестиугольнике, описанном около кривой 2-го порядка, три диагонали сходятся в одной точке.

В этом состоит теорема Брианшона. Следует заметить, что она относится к тем диагоналям шестиугольника, которые соединяют его противоположные вершины, т.-е. вершины, взятые через две.

173. Предельные случаи теоремы Брианшона. Мы получили предельные случаи теоремы Паскаля, предполагая, что некоторые вершины вписанного шестиугольника сливаются между собою. Точно также мы получим предельные случаи теоремы Брианшона, если предположим, что некоторые стороны описанного шестиугольника сливаются между собою. Посмотрим, во что обратится точка пересечения двух касательных, если эти касательные сливаются между собою. Мы знаем, что две касательные к кривой 2-го порядка сливаются, если они проведены из точки, данной на самой кривой (§ 96); поэтому за точку пересечения двух сливающихся касательных должно принимать точку, лежащую на кривой, т.-е. точку их прикосновения. То же самое видно и непосредственно; если мы предположим (черт. 172), что касательная CD неограниченно приближается к AB, то ясно, что точка их пересечения N будет неограниченно стремиться к точке прикосновения M.

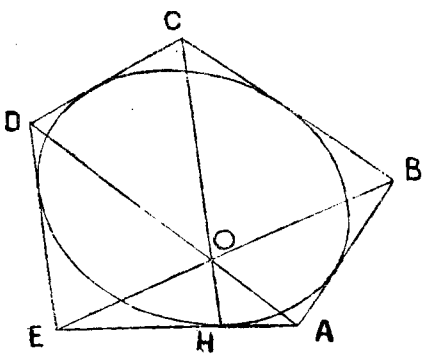


Черт. 172.

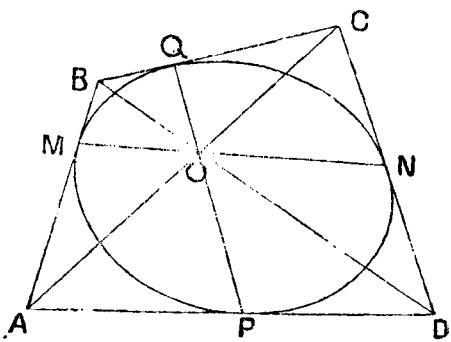
Положим, что две стороны шестиугольника, описанного около кривой 2-го порядка, слились между собою. Тогда шестиугольник

ник обратится в пятиугольник $ABCDE$ (черт. 173), а шестая вершина—в точку прикосновения слившихся сторон. Отсюда на основании теоремы Брианшона имеем: во всяком пятиугольнике, описанном около кривой 2-го порядка прямая, соединяющая одну из вершин с точкою прикосновения противоположной стороны, проходит через точку пересечения двух диагоналей, соединяющих остальные вершины.

Если мы положим, что две пары сторон описанного шестиугольника слились между собою (черт. 174), то получим: во всяком четыреугольнике, описанном около кривой



Черт. 173.



Черт. 174.

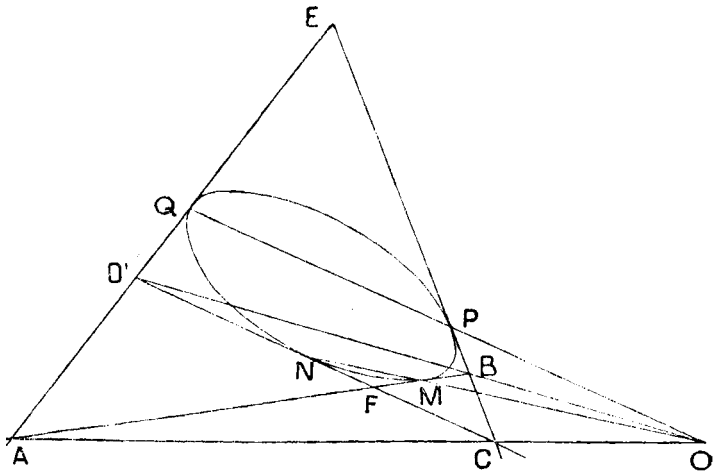
2-го порядка, хорды прикосновения противоположных сторон проходят через точку пересечения диагоналей.

Здесь через одну точку проходит четыре прямых, а не три, как это было в предыдущих случаях: мы можем принять, что по две стороны слились или в AB и CD, и тогда получим хорду прикосновения MN, или в AD и BC, и тогда хордою прикосновения будет PQ.

Заметим, что здесь, как и в предыдущих случаях, под многоугольником разумеется не часть плоскости, ограниченная ломаною, а сама ломаная. Например, фигура $ABCD$ (черт. 175), также представляет четыреугольник, описанный около кривой 2-го порядка. Его диагонали AC и BD и хорды прикосновения MN и PQ сходятся в одной точке O.

Наконец, если в шестиугольнике сливаются три пары сторон, то шестиугольник обращается в треугольник, и мы будем

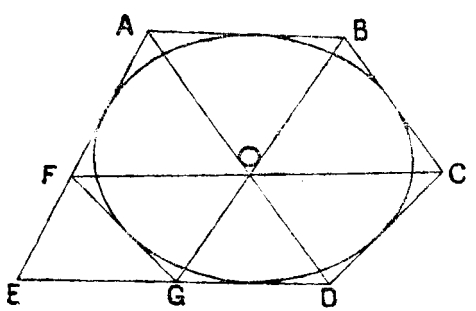
иметь, что во всяком треугольнике, описанном около кривой 2-го порядка, три прямые, соединяющие



Черт. 175.

его вершины с точками прикосновения противоположных сторон, сходятся в одной точке.

174. Приложения теоремы Брианшона. Пользуясь теоремой Брианшона, мы можем, имея пять касательных к кривой 2-го порядка, построить при помощи только одной линейки сколько угодно новых касательных к той же кривой. Положим, что нам даны пять касательных EA, AB, BC, CD, DE (черт. 176). Возьмем на AE произвольную точку F и примем F, A, B, C, D за пять вершин описанного шестиугольника. Чтобы найти шестую вершину, проводим диагонали FC и AD и находим их точку пересечения O; по теореме Брианшона, прямая BO будет третьею диагональю шестиугольника, а точка G ее пересечения со стороною DE—шестою вершиною. Соединив G с F, мы получим новую касательную к искомой кривой. Меняя положение точки F,



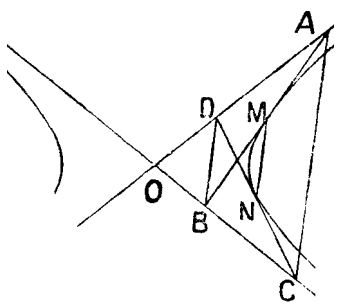
Черт. 176.

мы можем получить таким образом неограниченное число касательных к кривой 2-го порядка.

Точно также, пользуясь соответствующими предельными случаями теоремы Брианшона, мы могли бы построить касательные к кривой 2-го порядка, если бы были даны не пять касательных, а четыре касательных и точки прикосновения одной из них или три касательных и точки прикосновения двух из них.

Далее, мы можем, имея пять касательных к кривой 2-го порядка, найти их точки прикосновения. Чтобы получить точку прикосновения стороны AE описанного пятиугольника $ABCDE$ (черт. 175) проводим диагонали AD, BE и соединяем их точку пересечения O с противоположною вершиною C. Точка H, в которой прямая CO встретит AE, будет искомою точкою прикосновения.

175. Частные случаи теорем Паскаля и Брианшона. Многие свойства кривых 2-го порядка могут быть получены, как частные случаи теорем Паскаля и Брианшона, если мы некоторые из вершин вписанного многоугольника или точек прикосновения описанного возьмем в бесконечно-удаленных точках кривой. Применим, например, теорему Брианшона к описанному четыреугольнику, у которого точками прикосновения двух противоположных сторон служат бесконечно-удаленные точки кривой. Здесь двумя противоположными сторонами будут асимптоты (черт. 177). По теореме Брианшона, в четыреугольнике $ABCD$ диагонали и хорды прикосновения противоположных сторон пересекаются в одной точке. Диагоналями четыреугольника $ABCD$ служат прямые AC и BD. Далее, так как одна пара противоположных сторон состоит из асимптот, то для нее хордою прикосновения будет бесконечно-удаленная прямая; хордою прикосновения двух остальных сторон AB и CD будет прямая MN. По теореме Брианшона, прямые AC, BD, MN пересекаются с бесконечно-удаленною прямою в одной точке; отсюда следует, что эти три прямых параллельны между собою.



Черт. 177

Так как в треугольниках ABD и CBD вершины A и C лежат на прямой параллельной основанию BD, то эти треугольники равновелики. Прибавив к обоим треугольникам треугольник OBD, мы найдем, что треугольник OAB равновелик OCD, т.-е. что касательные к гиперболе отсекают от асимптотического угла равновеликие треугольники. Таким образом, это свойство гиперболы, уже доказанное нами в § 130, может быть получено, как частный случай теоремы Брианшона.

УКАЗАТЕЛЬ

Числа обозначают нумера параграфов

Абсцисса 17, 18
Азимут 22
Алгебраическая линия 39
Амплитуда 22
Аналитическая геометрия 1
Ангармоническое отношение точек 11.
Ангармоническое отношение лучей 64.
Аполлоний 78, 124, 138, 144
Асимптота 90, 102
Аффинное преобразование 71

Бернульи 22.
Бесконечно-большой корень уравнения 78.
Бесконечно-удаленная прямая 53
Бесконечно-удаленная точка прямой 9
Бесконечно удаленные точки кривой 2-го порядка 78
Брианшон 172

Вершина кривой 2-го порядка 119
Взаимность точек и прямых 67
Взаимные поляры 94
Внутреннее и внешнее деление отрезка 8.

Гармонические лучи 66
Гармонические точки 12
Гипербола 78, 138
Гиперболы сопряженные 117
Главное направление 91
Главная ось 91

Данделен 29
Двойственность 67
Декарт 1
Декартовы координаты 17, 19.
Детерминант коллинеарного преобразования 70
Директриса 117
Дискриминант уравнения кривой 2-го порядка 82.
Дискриминант старших членов уравнения кривой 2-го порядка 78
Диаметр 88
Дополнительныя хорды 161

Жергонн 67

Знак отрезка 2;—угла 22, 30;—площади 60;—расстояния точки от прямой 59

Измерения геометрической формы 24.
Инвариант 140
Иоахимстал 73

Каноническое уравнение 117
Касательная 80
Класс алгебраической кривой 67
Коллинеарное соответствие 70
Конфокальные линии 151, 152
Коническое сечение 78, 157
Координата 1
Координаты на прямой линии 5, 16

Координаты декартовы 17, 19; — косоугольные 19; — криволинейные 24; — однородные 68;—полярные 22; — прямолинейные 24; — прямоугольные 17; — тангенциальные 67;—текущие 34;—трилинейные 68;—эллиптические 151
Координатная линия 24
Координатный угол 17
Коэффициент угловой 48
Кривая см. линия
Круг направляющий 153
Круг описанный 153
Круглый конус 157
Круговая точка 106

Линия алгебраическая 39;—координатная 24;—мнимая 117;—огибающая 67; — распадающаяся 43; — трансцендентная 39;—центральная 89
Линии конфокальные 151;—ортогональные 108, 151; — подобные и подобно-расположенные 115, 133;—софокусные 151

Мебиус 2
Метод координат 1
Мнимая кривая 2-го порядка 117
Мнимая прямая 85 — точка 87
Множитель нормирующий 50

Направление главное 91;—отрезка 2
Направление сопряженное 89
Направляющий круг 153
Направляющая прямая 147
Начало взаимности, или двойственности 67
Начало координат 5, 17
Нормаль 122
Нормальное уравнение прямой 49
Нормальный угол 17
Нормирующий множитель 50

Обозначение сокращенное 64, 161
Огибающая линия 67
Однозначное соответствие 5, 70
координаты 68
Окружность 103
Ордината 17
Основание ряда 2
Основная точка ряда 64
Основной луч пучка 64
Ось абсцисс 17;—главная 91; — координат 17; — ординат 17; — полярная 22;— проекций 25;—радикальная 108; — фокальная 142;—большая 119;—малая 119;—действительная 120;—мнимая 120.

Папп 165
Парабола 78, 138
Параметр 16;—уравнения 44;—линии 45; — кривой 2-го порядка 139, 146;—параболы 131
Параметрические уравнения кривой 46
Паскаль 169
Перспективные элементы 67
Перспективные формы 65
Плюккер 67
Подобные линии 115, 133.
Полюс 92;—полярной системы координат 22
Поляра 92
Поляры взаимные 94
Полярная ось 22
Полярные координаты 22
Полярная сопряженность точек и прямых 94
Полярный угол 22
Понселе 10, 67
Порядок алгебраической кривой 42, 51
Порядок прикосновения кривых 162
Преобразование координат 27, 33
Преобразование коллинеарное 70
Проективные формы 65
Проекция на ось 25;—на плоскости 126
Производные 74;—частные 76
Прямая бесконечно-удаленная 53;—мнимая 85;—направляющая 147, 148
Прямые сопряженные 94

Прямолинейный ряд 2
Прямолинейные координаты 24
Прямоугольные координаты 17
Пучек кривых 44; — окружностей 107;—прямых 56

Равносторонняя гипербола 125
Радикальная ось 108
Радикальный центр 108
Радиус-вектор 22;—фокальный кривой 2-го порядка 142, 144
Распадающаяся кривая 43

Симметричныя точки 153
Система координат 17
Сложное отношение 11, 64
Сокращенное обозначение 64, 161
Соответствие коллинеарное 70; — однозначное 5, 70;—перспективное 65;—проективное 65
Сопряженность полярная 94
Сопряженные диаметры 89;—направления 89;—гиперболы 117
Софокусные кривые 151
Сечение коническое 78, 157
Субнормаль 136
Субтангес 135

Тангенциальныя координаты 67
Точка бесконечно-удаленная прямой 9;—кривой 2-го порядка 78
Точка внутренняя,—внешняя 96 98;—круговая 106;—мнимая 37;—основная 64;—прикосновения 80 173.
Точки гармонические 12; — симметричные 153;—сопряженные 94
Траектория 46
Трансцендентная линия 39
Трилинейные координаты

Угловой коэффициент 48
Угол координатный 17;—нормальный 17;—полярный 22
Уравнение линии 34, — каноническое 117;—параметрическое 46;—характеристическое 163

Фокальная ось 142
Фокус 142, 144

Характеристическое уравнение 163
Хорда прикосновения 96, 162
Хорда дополнительная 161

Центр кривой 2-го порядка 87
Центр радикальный 108; — пучка кривых 44
Центральная линия 87

Частная производимая 76
Четыреугольник 66, 164
Число измерений геометрической формы 24

Шаль 11, 166
Шестиугольник 169
Штейнер 166

Эйлер 76.
Эксцентрицитет 142, 146
Элемент геометричес формы 24
Эллипс 78, 138.
Эллиптические координаты 151

СПИСОК ОПЕЧАТОК

НАПЕЧАТАНО:	ДОЛЖНО БЫТЬ:
$MM' = PQ\,(x - x)$	$MM' = PQ\,(x' - x)$
MM	M_1M
$\overline{M\bar{M}_2} = \lambda$.	$\overline{MM_2} = \lambda$.
$M_1\bar{M}$	M_1M'
$\overline{M'M_2} = \lambda$	$\overline{M'M_2} = \lambda$
$M,\ M'$	$M,\ M'$
$M_1,\ M_2,\ M,\ M$	$M_1,\ M_2,\ M,$
$M,$	$M_1,$
$x + px + \cdots$	$x^2 + px + \cdots$
обыкновенною осью x-ов, или осью X; вертикалвная	обыкновенно осью x-ов, или осью X; вертикальная
MO	MQ
$(-2, -3)$	$(-3, \quad 2)$
$MP = \cdots \quad MQ = \cdots$	$MP' = \cdots,\ MQ' = \cdots$
ϱ опишет данным радиусом	опишет данным радиусом
на прямой OM, будут	на прямой OM, составляюще полярной осью угол φ
на 0, а	не 0, а
$M\,(\varrho', \varphi')$	$M'\,(\varrho', \varphi')$
Черт. 16	Черт. 17
Черт. 17	Черт. 18
$\cdots = A'E$	$\cdots = A'E'$
A	A'
$F[\ldots, B'\,(x', y')] = 0$	$F'[\ldots, B'(x', y')] = 0$
δ^2, получим	ϱ^2, получим
$\sin\varphi = \frac{y}{\varrho}$	$\sin\varphi = \frac{y \sin\omega}{\varrho}$
$F'M = \sqrt{(x + c^2) + y^2}$.	$F'M = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$
(пропущен № формулы)	(2)
$FG = F'G$	$FG = F'G'$
$k = \frac{m}{n}$	$k = \frac{n}{m}$
$\frac{\sin\vartheta}{\cos(\omega - \vartheta)}$	$\frac{\sin\vartheta}{\sin(\omega - \vartheta)}$
$4R^2 \sin\omega = \cdots$	$4R^2 \sin^2\omega =$
$\cdots \sqrt{A + B^2} -$	$\cdots \sqrt{A^2 + B^2}$
$\cdots \sqrt{A + B} -$	$\cdots \sqrt{A^2 + B^2}$
$\cdots \sqrt{A + B^2}$	$\cdots \sqrt{A^2 + B^2}$
$\cdots \sqrt{A^2 + B} -$	$\cdots \sqrt{A^2 + B^2} \cdots$
$(K - K')\sin\omega = 0$	$(k - k')\sin\omega = 0$
(x', y)	(x', y')

НОРМАЛЬНЫЕ РУКОВОДСТВА
ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Б. К. МЛОДЗЕЕВСКИЙ

ОСНОВЫ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
В ПРОСТРАНСТВЕ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ

Научно-Технической Секцией Государственного Ученого Совета
рекомендовано в качестве руководства
для физико-математических факультетов Высших Учебных заведений
и в качестве пособия для Высших Технических Учебных заведений

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА

Гиз № 5051. Главлит № 20878. Тираж 5000.
Типогр. „Искра Революции“ Мосполиграф

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ.

„Основы аналитической геометрии в пространстве“ первоначально составлены мною, как пособие для слушателей курса, читавшегося мною в Московском Университете, и изданы на правах рукописи. Настоящее, четвертое издание было предпринято, как и предыдущее, Московским Студенческим Издательством и перешло в Государственное Издательство только во время печатания. Продолжая смотреть на эту книгу лишь как на пособие для моих слушателей, я не внес тогда в новое издание существенных изменений и ограничился почти исключительно редакционными поправками. Чертежи, при всем их несовершенстве, остались также прежние. Только в конце книги некоторые изображения поверхностей второго порядка заменены более правильными аксонометрическими.

Б. Млодзеевский.

К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ.

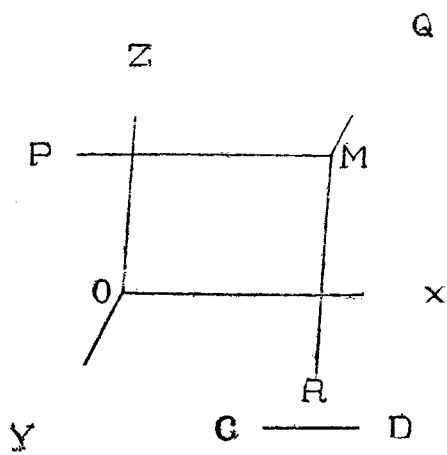
Выпуская в свет настоящее, пятое издание книги: „Основы аналитической геометрии в пространстве“ после смерти проф. *Б. К. Млодзеевского*, Государственное Издательство ограничилось исправлением опечаток и некоторых чертежей предыдущего издания.

ГЛАВА I.

Метод координат.

1. Прямолинейные координаты.

Положение точки в пространстве определяется таким образом. Вообразим в пространстве три прямые OX, OY, OZ—оси координат, пересекающиеся в данной точке O—начале координат (черт. 1). Эти три прямые образуют трехгранный угол, гранями которого служат плоскости XOY, YOZ, ZOX—плоскости координат. Пусть теперь дана в пространстве какая нибудь точка M. Проведем из этой точки прямую MP, параллельную оси X, до точки пересечения ее с плоскостью YOZ; тогда, взяв отношение длины линии PM к длине какого-нибудь отрезка, принятой за единицу, получим одну из координат точки M, которую назовем координатой x, так как она откладывалась на линии, параллельной оси X. Далее,

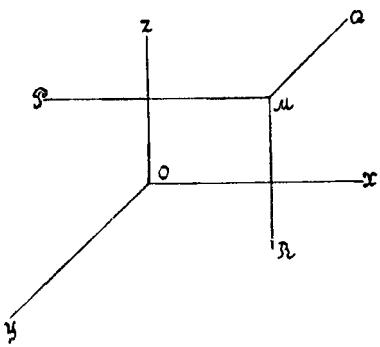


Черт 1.

проведем из этой же точки M прямую MQ, параллельную оси Y, до пересечения в точке Q с плоскостью ZOX; тогда длина линии QM даст вторую координату точки M, которую назовем координатой y. Наконец, если проведем через M прямую MR, параллельную оси Z, до пересечения в точке R с плоскостью XOY,

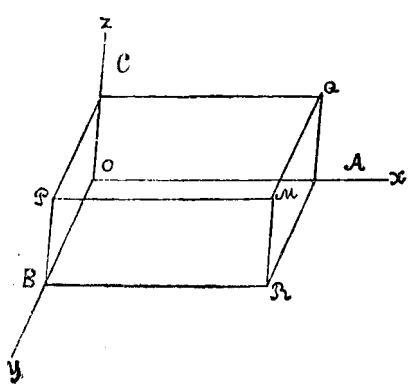
то длина линии RM даст третью координату точки M; эту координату назовем z.

В частности, углы между осями могут быть прямые, и тогда прямые MR, MP, MQ будут перпендикулярами к плоскостям XY, YZ, ZX, так как в этом случае каждая ось перпендикулярна к плоскости двух других осей (черт. 2). Такая система координат называется прямоугольной. Следовательно, в случае прямоугольной системы координат, координаты точки можно построить, опуская перпендикуляры на три плоскости координат.



Черт. 2.

Легко видеть, что тремя координатами положение точки определяется вполне. В самом деле, пусть дана только одна координата $x = a$; тогда ясно, что существует бесчисленное множество точек, для которых координата x имеет данную величину; именно, все эти точки расположены в плоскости, параллельной плоскости YZ и проходящей на расстоянии a от нее; если дадим две координаты $x = a$, $y = b$, то точки, обладающие этими координатами, будут, очевидно, лежать на линии пересечения двух плоскостей, из которых одна параллельна плоскости YZ и проходит на расстоянии a от нее, а другая параллельна плоскости ZX и отстоит от нее на расстоянии b; наконец, если дадим три координаты $x = a$, $y = b$, $z = c$, то точки, обладающие этими координатами, должны одновременно лежать на трех плоскостях, из которых одна проведена параллельно плоскости YZ на расстоянии a от нее, другая проведена параллельно плоскости ZX на расстоянии b от нее и третья—



Черт. 3.

параллельно плоскости XY на расстоянии c, и таких точек будет только одна, так как три плоскости пересекаются в одной точке. Таким образом, для определения положения точки в пространстве надо иметь три ее координаты.

На чертеже (1) у нас построены шесть прямых линий, —три оси, выходящие из точки O, и три параллельные им прямые, выходящие из точки M. Проведем через последние три линии три плоскости (черт. 3): одну плоскость через MP и MQ, другую через MQ и MR и третью через MR и MP; ясно, что эти новые плоскости будут соответственно параллельны плоскостям XY, YZ, ZX, потому что они проходят через линии, параллельные осям. Таким образом, у нас будет шесть плоскостей, и легко видеть, что эти шесть плоскостей образуют параллелепипед. Мы знаем, что все параллельные ребра параллелепипеда равны между собой; значит, не только

$$PM = x, \text{ но и } CQ = x;\ OA = x;\ BR = x;$$

точно так же:

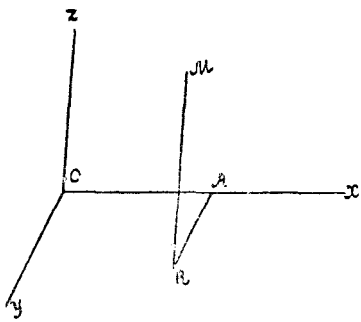
$$QM = y;\ AR = y;\ OB = y;\ CP = y;$$
$$RM = z;\ AQ = z;\ OC = z;\ BP = z.$$

То же самое будет и в прямоугольных координатах, с тою лишь разницею, что параллелепипед будет прямоугольный, потому что в нем каждая пара ребер взаимно перпендикулярна.

Теперь можно решить задачу: построить точку по данным ее координатам x, y, z. Пусть дана, например, точка $M(3, 1, 2)$. Из сказанного выше очевидно, что это можно сделать, проводя три плоскости, параллельные плоскостям координат: одну параллельно плоскости YZ на расстоянии 3 единиц, другую параллельно ZX на расстоянии 1 и третью параллельно XY на расстоянии 2. Но предыдущее замечание позволяет сделать это также

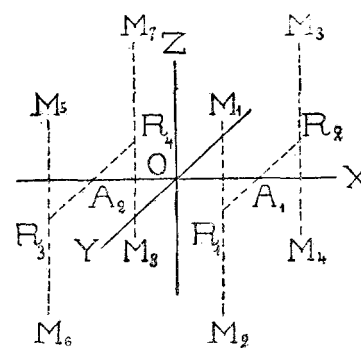
На оси X откладываем отрезок $OA = 3$ единицам; затем в плоскости XY через точку A проводим линию, параллельную оси Y, и на ней откладываем отрезок $AR = 1$; наконец, из точки R линию параллельно оси Z и на ней откладываем $MR = 2$; таким образом искомую точку M. Можно, конечно, координаты и в другом порядке, но, в каком бы порядке

мы ни откладывали, точка M всегда будет концом трехзвенной ломаной линии, звенья которой параллельны осям координат, при чем первое звено откладывается на оси координат, второе—в плоскости координат и третье—в пространстве.



Черт. 4.

Когда мы строили точку $M(x, y, z)$, то по оси X откладывали отрезок $OA = x$ вправо; но мы можем откладывать его и влево, так что на оси X мы получим не одну точку, а две: A_1 и A_2 (черт. 5); затем, на прямой, проведенной через A параллельно оси Y, мы откладывали отрезок $AR = y$ вперед; но этот отрезок можно откладывать и назад, и если мы через A_1 и A_2 проведем линии, параллельные оси Y, и на них отложим отрезки, равные y, вперед и назад, то получим четыре точки: R_1, R_2, R_3, R_4. Наконец, на линии, проведенной через точку R, мы откладывали отрезок $RM = z$; но этот отрезок можно откладывать не только вверх, но и вниз; применяя это построение ко всем четырем точкам R_1, R_2, R_3, R_4, мы получим 8 точек: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8. Таким образом оказывается, что координатами (x, y, z) обладает не одна точка, а восемь. Чтобы каждой совокупности значений координат x, y, z соответствовала только одна точка, необходимо рассматривать координаты, как величины относительные т.-е. считать их положительными или отрицательными. Принято считать направление по оси X положительным вправо и отрицательным влево, направление по оси Y—положительным вперед и отрицательным назад и направление по оси Z—положительным вверх и отрицательным вниз. Если условиться в этом, то координаты упомянутых восьми точек будут следующие:



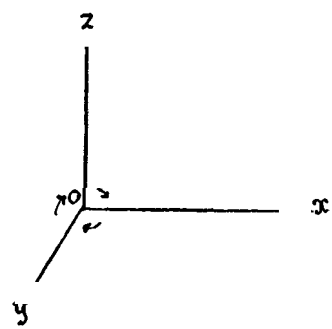
Черт. 5.

$M_1(+a, +b, +c)$, $M_5(-a, +b, +c)$,
$M_2(+a, +b, -c)$, $M_6(-a, +b, -c)$,
$M_3(+a, -b, +c)$, $M_7(-a, -b, +c)$,
$M_4(+a, -b, -c)$, $M_8(-a, -b, -c)$.

Легко видеть, что координатные плоскости делят пространство на 8 частей, в которых координаты обладают разными знаками; тот угол, где все три координаты положительны, называется нормальным.

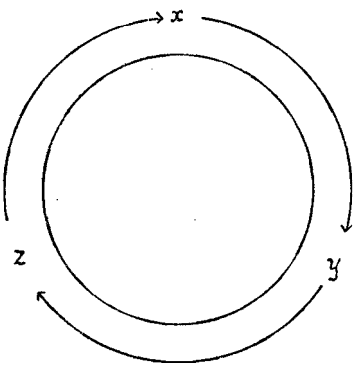
Рассмотренная система координат называется Декартовой, хотя она собственно не принадлежит Декарту; она есть обобщение пространства Декартовой системы координат на плоскости. Кроме того, эта система называется прямолинейной, так как величины координат измеряются по трем прямым линиям, проведенным параллельно осям. Далее, в случае прямоугольной системы координат не только оси взаимно перпендикулярны, но и двугранные углы между координатными плоскостями также прямые, потому что, если в трехгранном углу плоские углы равны, то и противоположные им двугранные углы также равны.

В пространстве является осложнение, которого мы не имели на плоскости. Представим себе систему координат в пространстве; тогда у каждой координатной плоскости будет две стороны, например, у плоскости XY будет верхняя и нижняя стороны. Мы будем называть положительной стороной координатной плоскости ту, которая направлена в сторону возрастающей третьей координаты. Таким образом, для плоскости XZ передняя сторона положительна, а задняя отрицательна. Далее, в каждой плоскости мы будем рассматривать известное вращение На плоскости мы считали направление вращения положительным, если оно совершается от положительного направления оси X к положительному направлению оси Y, т.-е. против стрелки часов. Если мы в плоскости XY будем вращать некоторый луч (черт. 6) и будем считать положительным



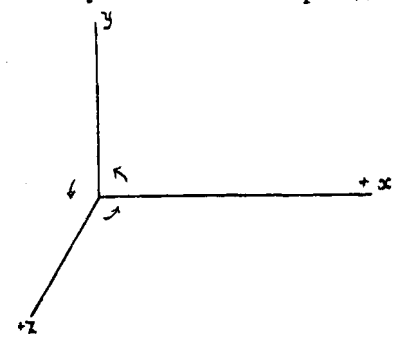
Черт. 6.

влением направление от оси X к оси Y, то на положительной стороне плоскости (верхней) это вращение будет направлено по стрелке часов; на положительной стороне плоскости YZ положительное вращение, т.-е. вращение по стрелке часов будет от оси Y к оси Z, и на положительной стороне плоскости ZX—от оси Z к оси X, так что переход от одной оси к другой совершается в круговом порядке (черт. 7). Обратим внимание на следующее обстоятельство: в плоскости XY движение положительного вращения совершается по стрелке часов, между тем как в геометрии на плоскости оно совершается против стрелки; следовательно, чтобы в пространстве положительное вращение совершалось так, как и на плоскости, надо оси обозначать так, как показано на чертеже 8; хотя это обозначение постепенно входит в науку, но мы будем придерживаться прежнего обозначения, как уже установившегося и до сих пор у нас более распространенного.



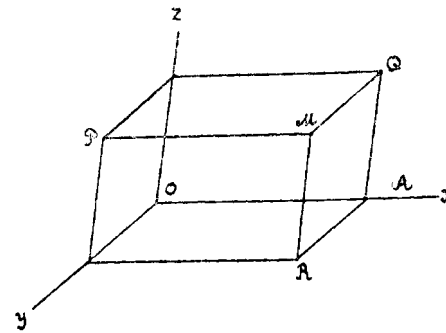
Черт. 7

Для построения координат какой нибудь точки M мы проводили из M три прямые, параллельные осям координат, до пересечения с соответствующими координатными плоскостями; затем через каждые две прямые мы проводили плоскости, которые вместе с координатными плоскостями определяли некоторый параллелепипед, параллельные ребра которого и давали координаты. Теперь посмотрим, как, не строя параллелепипеда, мы можем получить на осях координаты данной точки M. Легко видеть, что плоскость $MQAR$ (черт. 9) параллельна плоскости YZ, так как обе эти плоскости заключают по паре параллельных прямых. Отсюда следует, что для получения коор-



Черт. 8.

динаты x точки M можно через M провести плоскость параллельно плоскости YZ, которая встретит ось X в точке A; тогда отрезок OA и будет координатой x, и т. д. Вообще, для получения координат данной точки M можно провести через эту точку плоскости, параллельные плоскостям координат, и искать их точки пересечения с осями; расстояния этих точек от начала координат, считая по осям, и будут координаты данной точки.

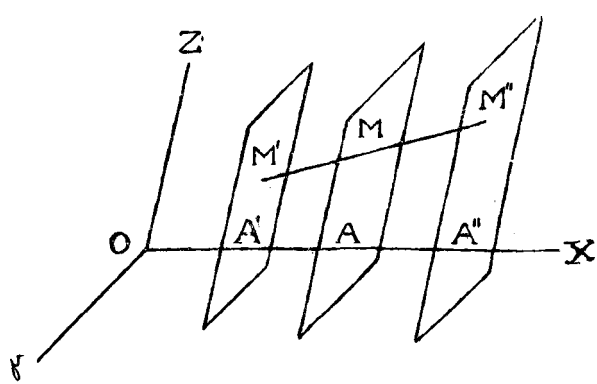


Черт. 9.

Это замечание позволяет нам просто решить следующую задачу:

Задача. Разделить данный отрезок в данном отношении.

Пусть даны две точки $M'(x', y', z')$ и $M''(x'', y'', z'')$ (черт. 10), и требуется на прямой, соединяющей эти точки, найти такую точку



Черт. 10.

M (x,y,z), которая делила бы отрезок $M'M''$ в данном отношении, т.-е.

$$\frac{M'M}{MM''} = \frac{m}{n}.$$

Проведем через точки M', M, M'' три плоскости, параллельные YZ, которые встретят ось X в точках A', A, A''; тогда, на основании предыдущего замечания, $OA' = x'$, $OA = x$, $OA'' = x''$

Известно, что если три параллельные плоскости мы пересечем двумя прямыми, то отрезки этих двух прямых между тремя параллельными плоскостями пропорциональны; следовательно,

$$\frac{A'A}{AA''} = \frac{M'M}{MM''}$$

Но $$A'A = x - x',\ AA'' = x'' - x,\ \frac{M'M}{MM''} = \frac{m}{n};$$

следовательно,
$$\frac{x - x'}{x'' - x} = \frac{m}{n}; \qquad (1)$$

отсюда,
$$x = \frac{mx'' + nx'}{m + n}$$

То, что мы сделали для координаты x, можно сделать и для двух остальных координат; стоит только проводить плоскости, параллельные двум остальным плоскостям координат; таким образом найдем:

$$y = \frac{my'' + ny'}{m + n},\ z = \frac{mz'' + nz'}{m + n}$$

Если отношение $\frac{m}{n}$ обозначим через λ, то

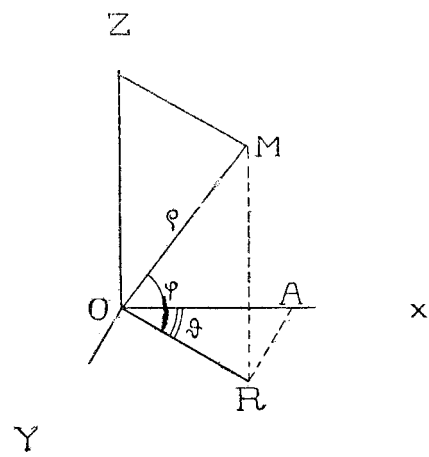
$$x = \frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda};\ y = \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda};\ z = \frac{z' + \lambda z''}{1 + \lambda}$$

Мы получили, таким образом, формулы, совершенно аналогичные тем, которые имели в геометрии на плоскости. Мы уже видели в геометрии на плоскости, что если отношение $\frac{m}{n}$ отрицательно, то отрезок будет делиться не внутренним образом, а внешним: если две точки делят отрезок в отношениях $\frac{m}{n}$ и $-\frac{m}{n}$, то они суть гармонические, и, наконец, если точка делит отрезок в отношении $\frac{m}{n} = -1$,

то эта точка бесконечно удалена, и так как точка удаляется в бесконечность при одном только значении $\lambda = -1$, то на каждой прямой надо принимать только одну бесконечно-удаленную точку.

2. Полярные координаты

Возьмем прямоугольную систему координат. Пусть дана какая-точка M (черт. 11); соединив ее с началом координат, получим радиус-вектор точки M, который назовем через ρ. На плоскости положение точки определялось радиусом вектором и одним углом; так как в пространстве надо иметь три координаты, то, кроме радиуса-вектора, надо еще два угла. Эти два угла мы определим следующим образом. Проведем плоскость через M и ось Z; ясно, что весь радиус-вектор будет лежать в этой плоскости. Пусть эта плоскость пересекается с плоскостью XY по линии OR; тогда за первый угол мы примем тот угол φ, который радиус-вектор образует с OR, $\angle ROM = \varphi$. Эта координата называется широтой. Если из M опустим перпендикуляр MR на плоскость XY, то легко видеть, что MR лежит в той плоскости, которую мы провели через M и ось Z, потому что, если линия MR параллельна оси Z и проходит через точку, лежащую в плоскости MOZ, то она сама лежит в этой плоскости. Таким образом, проекция линии OM на плоскость XY совпадает с OR, и поэтому широта есть угол между радиусом-вектором и его проекцией на плоскость XY, или, что то же, угол между радиусом-вектором и плоскостью XY. Третья координата должна установить положение плоскости MOZ; это будет угол между OR и осью X $\angle XOR = \vartheta$. Этот угол называется долготой. Очевидно, что долгота есть также линейный



Черт. 11.

угол двугранного угла между плоскостью XZ и плоскостью ZMR. Ясно, что эти три координаты вполне определяют положение точки. В самом деле, если дан только радиус-вектор точки, то точка лежит на поверхности сферы, описанной из начала координат радиусом, равным радиусу-вектору; если бы был известен только угол φ, точка лежала бы на поверхности конуса, имеющего осью ось Z, образующая которого наклонена к оси Z под углом $\frac{\pi}{2} - \varphi$; если бы дан был только угол ϑ, то точка лежала бы в плоскости, которая проходит через ось Z и к которой ось X наклонена под углом ϑ. Следовательно, если даны три координаты, то точка явится пересечением упомянутой сферы, конуса и плоскости, так что она будет вполне определена.

Радиус-вектор мы будем считать, вообще, существенно положительным, так что он будет меняться от 0 до $+\infty$; широта φ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, и долгота ϑ от 0 до 2π.

Посмотрим, как перейти от прямоугольных Декартовых координат к полярным. Опустим из R перпендикуляр на OX; тогда $AO = x$, $AR = y$, $MR = z$.

Из прямоугольных треугольников OMR и OAR следует:

$$z = \varrho \sin\varphi;\ OR = \varrho\cos\varphi;\ x = OR\cos\vartheta;\ y = OR\sin\vartheta.$$

Отсюда имеем формулы перехода от прямоугольных координат к полярным:

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= \varrho\cos\varphi\sin\vartheta, \\ z &= \varrho\sin\varphi. \end{aligned} \qquad (1)$$

Выведем формулы для обратного перехода. Складывая квадраты выражений (1), получаем:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (2)$$

Деля 2-е выражение на 1-е, имеем:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{y}{x}. \qquad (3)$$

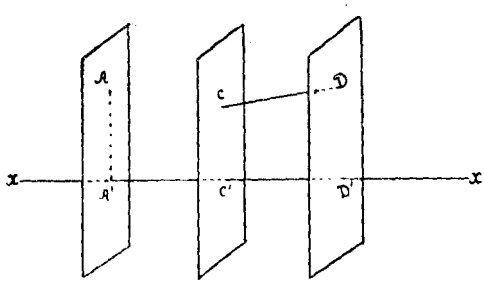
Наконец, деля 3-е выражение на корень квадратный из суммы квадратов первых двух, получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

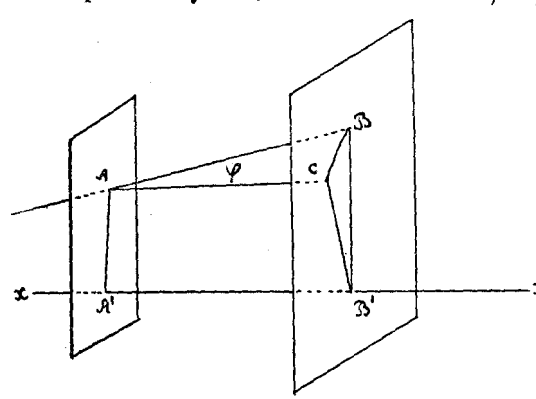
Формулы (2), (3) и (4) могут быть выведены и непосредственно из чертежа.

3. Проекции.

Возьмем в пространстве произвольную прямую XX (черт. 12), которую будем называть осью проекций. Пусть где-нибудь в пространстве дана точка A; чтобы построить проекцию этой точки на ось, проведем через эту точку плоскость, перпендикулярную к оси; она встретит ось в точке A'. Точка A' называется ортогональною проекцией точки A на ось XX. Вместо того, чтобы через точку A проводить плоскость, перпендикулярную к оси, мы могли бы из точки A опустить перпендикуляр на ось. Проекцией прямолинейного отрезка CD будет отрезок $C'D'$, заключенный между проекциями его концов. Докажем, что длина проекции отрезка равна длине проектируемого отрезка, умноженной на косинус угла между ними. Под углом между двумя непере-



Черт. 12.



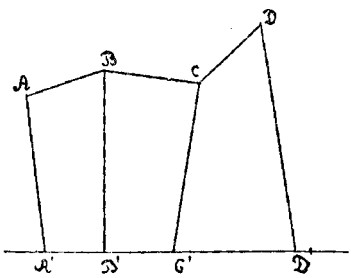
Черт. 13.

секающимися прямыми в пространстве разумеют угол, образованный двумя прямыми, проведенными из произвольной точки O параллельно данным прямым, при чем, как известно из элементарной математики, величина этого угла не зависит от выбора точки O. Возьмем отрезок AB, ось проекций XX и будем проектировать точки A и B на ось (черт. 13). Хотя прямые AA' и BB' перпендикулярны к оси XX, но они могут быть непараллельны, так как они могут не лежать в одной плоскости. Проведем через A линию, параллельную оси проекций, до ее пересечения с плоскостью, проходящею через точку B; тогда $AC = A'B'$, так как AC и $A'B'$ суть отрезки двух прямых параллельных линий между двумя параллельными плоскостями. Соединив точки B и C, получим треугольник ABC, в котором угол A есть угол между отрезком AB и осью проекций, который мы назовем φ; кроме того, угол C — прямой, потому что плоскость, содержащая сторону BC, перпендикулярна к оси проекций, а линия AC параллельна оси проекций; следовательно, $AC = AB\cos\varphi$, и так как $AC = A'B'$, то $A'B' = AB\cos\varphi$, что и требовалось доказать.

Как и в геометрии на плоскости, мы можем говорить не только о величине проекции, но и об ее знаке, если условимся принимать за угол φ угол между положительным направлением той прямой, на которой взят отрезок, и положительным направлением оси проекций; в таком случае предыдущая формула определит не только величину проекции, но и знак ее.

Рассмотрим проекцию ломаной линии $ABCD$ (черт. 14); так как здесь все проекции, $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, положительны, то очевидно, что проекция всей ломаной, т.-е. $A'D'$, равна сумме проекций ее звеньев:

$$A'B' + B'C' + C'D'.$$

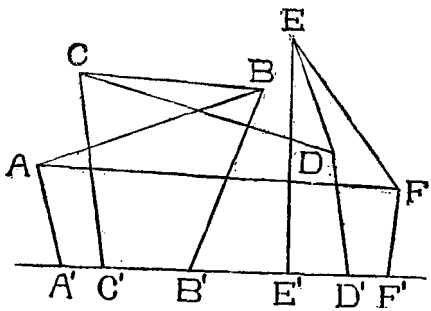


Черт. 14.

Условимся распространять это свойство и на тот случай, когда проекции звеньев имеют разные знаки, и будем называть проекцией ломаной алгебраическую сумму проекций ее

звеньев. Тогда не трудно доказать следующее предложение: **проекция всякой ломаной не зависит от ее формы и равна проекции прямолинейного отрезка, замыкающего эту ломаную.**

В самом деле, пусть будет $ABCDEF$ ломаная, $A'B'C'D'E'F'$ — ее проекция. По определению имеем: пр. $(ABCDEF) =$ пр. $(AB) +$ $+$ пр. $(BC) +$ пр. $(CD) +$ пр. $(DE) +$ пр. $(EF) = A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F'$. Но так как сумма отрезков берется алгебраическая, т.-е. вместе с их знаками, то здесь, каково бы ни было относительное положение точек A', B', C', во всяком случае будем иметь:



Черт. 15.

$$A'B' + B'C' = A'C'.$$

Продолжая таким образом далее, получим:

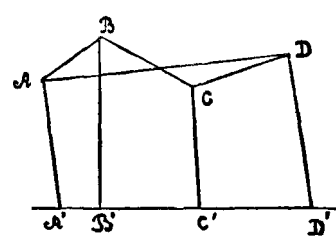
$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' = A'F' = \text{пр. } (AF);$$

таким образом,

$$\text{пр. } (ABCDEF) = \text{пр. } (AF),$$

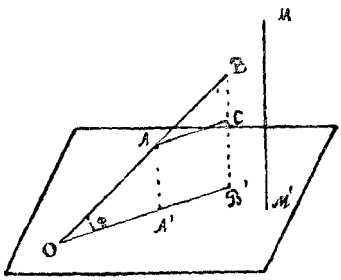
и теорема доказана.

В частном случае, когда мы имеем замкнутую ломаную, ее начальные и конечные точки совпадают, и замыкающий отрезок обращается в точку. Отсюда следует, что **проекция замкнутой ломаной на каждую ось равна нулю. Так как всякая кривая есть предел ломаной, то доказанные теоремы справедливы в пределе и для кривых. Следовательно, проекция кривой не зависит от формы кривой и равна проекции прямолинейного отрезка, соединяющего концы кривой. Проекция замкнутой кривой равна нулю.**



Черт. 16.

Кроме проекций на ось, существуют еще проекции на плоскость. Пусть имеем в пространстве плоскость проекций (черт. 17). Если имеем точку M и опустим из нее перпендикуляр на плоскость проекций, то точка пересечения его с плоскостью M' называется проекцией точки M на плоскость. Если имеем отрезок AB и из концов его A и B опустим перпендикуляры AA' и BB' на плоскость, то отрезок $A'B'$ будет проекцией отрезка AB. Докажем, что длина проекции равна длине проектируемого отрезка, умноженной на косинус угла между проектируемой линией и плоскостью. Так как AA' и BB' параллельны между собой и лежат в одной плоскости, то AB и $A'B'$ также лежат в одной плоскости. Заметив это, продолжим линию AB до пересечения ее с плоскостью проекций в точке O; тогда линия $A'B'$, будучи продолжена, также пройдет через эту точку, так как AB и $A'B'$ лежат в одной плоскости; угол между OB и OB' будет углом между данным отрезком AB и плоскостью проекций, который мы назовем через φ; если через точку A мы проведем линию AC параллельно $A'B'$, то угол при A будет равен φ; поэтому,



Черт. 17.

$$AC = AB \cos \varphi.$$

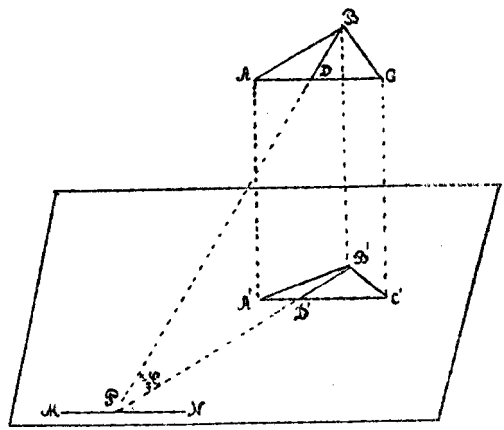
Но $AC = A'B'$. Следовательно, $A'B' = AB \cos \varphi$.

Так как в плоскости через каждую точку проходит не два противоположных направления, а бесчисленное множество, то о знаке проекций здесь говорить нельзя.

Мы можем также проектировать площади на плоскость проекций. Если мы имеем многоугольник, то, опуская перпендикуляры из вершин этого многоугольника на плоскость проекций, получим на ней проекцию многоугольника. Посмотрим, как найти связь между проектируемой фигурой и ее проекцией.

Рассмотрим предварительно случай треугольника, одна из сторон которого параллельна плоскости проекций (черт. 18); построим

его проекцию и построим высоты данного треугольника и его проекции (очевидно, высота будет проектироваться высотою, потому что линия $A'C'$, как параллельная линии AC, перпендикулярна к наклонной BD, а, следовательно, и к ее проекции $B'D'$).



Черт. 18.

Очевидно,

$$A'C' = AC. \qquad (1)$$

Далее, если продолжим BD и $B'D'$ до взаимного пересечения в точке P, и полученный таким образом угол назовем через φ, то

$$B'D' = BD\cos\varphi. \qquad (2)$$

Легко видеть, что угол φ есть линейный угол того двугранного, который образован плоскостью проекций с плоскостью треугольника. В самом деле, линия AC параллельна $A'C'$, а если две плоскости проходят через две параллельные линии AC, $A'C'$, то линия пересечения их сама будет им параллельна. Таким образом, линия пересечения MN плоскостей ABC и $A'B'C'$ параллельна AC и $A'C'$, и поэтому BD, будучи перпендикулярна к AC, перпендикулярна и к ребру MN; точно так же $B'D'$, будучи перпендикулярна к $A'C'$, перпендикулярна и к MN, и, следовательно, угол φ есть линейный угол двугранного угла между плоскостями ABC и $A'B'C'$. Заметив это, мы найдем зависимость между площадью треугольника ABC и площадью проекции $A'B'C'$:

$$\text{площ.}(A'B'C') = \frac{1}{2} A'C' \cdot B'D',$$

или, в силу соотношений (1) и (2),

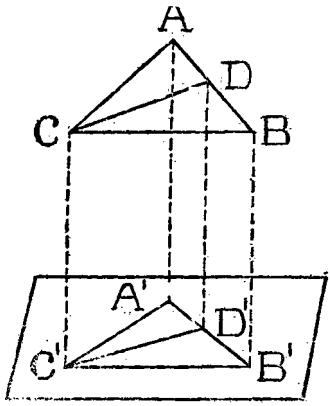
$$\text{площ.}(A'B'C') = \frac{1}{2} AC \cdot BD\cos\varphi;$$

с другой стороны,

$$\text{площ. } (ABC) = \frac{1}{2} AC.BD.$$

Следовательно, площ. $(A'B'C') =$ площ. $(ABC) \cos \varphi$, т.-е. в нашем случае площадь проекции равна проектируемой площади, умноженной на косинус угла между ними.

Положим теперь, что стороны треугольника расположены как-нибудь относительно плоскости проекций (черт. 19) Проведем в данном треугольнике ACD линию CB параллельно плоскости проекций; в проекции ей будет соответствовать линия $C'B'$, параллельная CB. Мы получим два треугольника, ACB и BCD, в которых одна сторона CB параллельна плоскости проекций; применяя к каждому треугольнику доказанную теорему, получим:



Черт. 19.

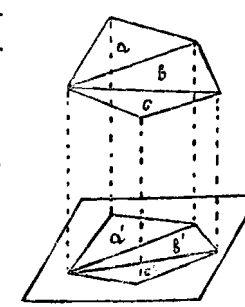
площ. $(A'C'B') =$ площ. $(ACB) \cos \varphi$.
площ. $(B'C'D') =$ площ. $(BCD) \cos \varphi$.

Угол φ один и тот же для обоих треугольников, так как оба эти треугольника лежат в одной плоскости; поэтому, вычитая предыдущие равенства, получим:

площ. $(A'C'D') =$ площ. $(ACD) \cos \varphi$.

Таким образом, предыдущая теорема справедлива для всякого треугольника.

Если, наконец, у нас есть какой-нибудь плоский многоугольник, то разбиваем его на треугольники (черт. 20), площади которых пусть будут a, b, c; в проекции мы будем иметь многоугольник, также разбитый на треугольники, площади которых пусть будут a', b', c'. На основании предыдущего имеем:



Черт. 20.

$$a' = a \cos \varphi,$$
$$b' = b \cos \varphi,$$
$$c' = c \cos \varphi.$$

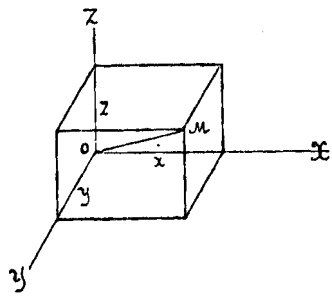
Угол φ один и тот же во всех трех равенствах, так как многоугольник, по предположению, плоский; поэтому, складывая эти равенства, получим

$$a' + b' + c' = (a + b + c)\cos\varphi,$$

т.-е. и в этом случае площадь проекции равна площади проектируемой фигуры, умноженной на косинус угла между ними.

4. Расстояние между двумя точками в пространстве и зависимость между тригонометрическими величинами углов прямой с осями координат.

Задачу об определении расстояния между двумя точками в пространстве мы решим сначала в прямоугольных координатах. Пусть имеем прямоугольную систему координат (черт. 21) и точку M; найдем ее расстояние от начала. Построим тот прямоугольный параллелепипед, из которого получаются координаты; тогда искомое расстояние будет его диагональю MO. Известно, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений; значит,

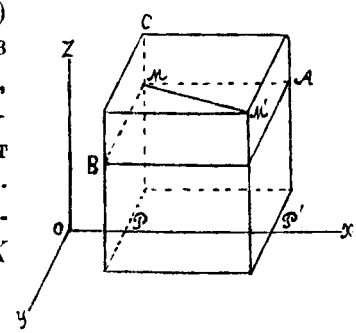


Черт. 21.

$$MO^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Отсюда найдем и расстояние между какими-нибудь точками. Пусть даны точки $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ (черт. 22). Проведем через каждую из этих точек линии, параллельные осям, так что они вместе образуют прямоугольный параллелепипед. MM' будет представлять диагональ этого параллелепипеда. Если продолжим грани, параллельные YZ, то они встретят ось X в точках P и P', и тогда

$$MA = PP' = x - x'$$



Черт. 22.

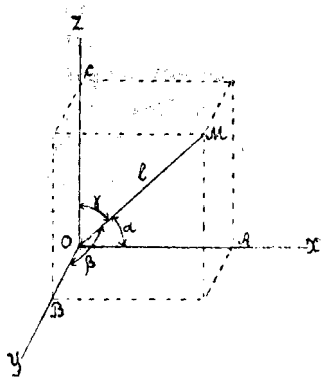
найдем:

$$MB = y - y'; \; MC = z - z';$$

следовательно, искомое расстояние будет определяться из формулы:

$$MM'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Возьмем прямоугольную систему координат (черт. 23) и проведем через начало произвольную прямую; эта прямая имеет два противоположных направления; рассмотрим одно из этих направлений от O к M, считая его положительным; назовем углы между положительным направлением прямой и положительным направлением каждой из осей X, Y, Z соответственно через α, β, γ. Легко убедиться, что эти три угла не независимы между собой, и если два угла даны, то третий до известной степени определяется. В самом деле, пусть дан один угол, напр., α; в таком случае прямая OM должна лежать на поверхности некоторого конуса, имеющего осью ось X и образующая которого наклонена к оси под углом α; точно так же, если дан угол β, то прямая OM должна лежать на поверхности конуса, осью которого служит ось Y и образующая которого наклонена к оси под углом β. Эти два конуса пересекаются вообще по двум образующим; значит, есть только две прямые, которые образуют с осью X угол α, а с осью Y — угол β; очевидно, эти две прямые наклонены к оси Z под определенными углами, и поэтому угол γ уже не может быть произвольным.



Черт. 23.

Найдем теперь зависимость между тригонометрическими величинами углов α, β, γ. Возьмем на нашей прямой какую-нибудь точку $M(x, y, z)$; пусть расстояние ее от начала координат есть l; квадрат этого расстояния выражается так:

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (1)$$

Построим параллелепипед, который определяет координаты данной точки, и обозначим через A, B, C те его вершины, которые лежат на осях; тогда

$$OA = x,\ OB = y,\ OC = z.$$

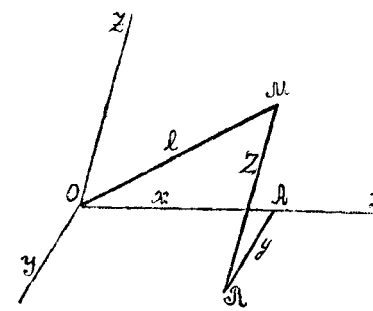
Нетрудно видеть, что OA, OB и OC суть проекции отрезка OM на оси X, Y, Z; поэтому,

$$x = l\cos\alpha,\ y = l\cos\beta,\ z = l\cos\gamma.$$

Вставляя эти выражения в формулу (1) и сокращая на l^2, имеем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2)$$

Вот формула, дающая зависимость между косинусами углов прямой с тремя прямоугольными осями координат. Соотношение это справедливо и для того случая, когда прямая не проходит через начало координат, потому что, по самому определению угла двух прямых в пространстве, за углы α, β, γ можно считать тогда углы между прямой, проходящей через начало координат параллельно данной прямой, и осями координат.



Черт. 24.

Положим теперь, что мы имеем косоугольную систему координат (черт. 24). Для краткости будем обозначать углы между осями двумя буквами, так что (xy) будет обозначать угол между осями X и Y и т. д. Проведем через начало координат какую-нибудь прямую и возьмем на ней точку M (x, y, z) на расстоянии l от начала. Обозначим через α, β, γ углы прямой с осями и построим координаты точки M, проведя через M линию, параллельную оси Z, до встречи с плоскостью XY в точке R и через R линию, параллельную оси Y, до встречи с осью X. Проектируя ломаную $OARM$ и замыкающую OM на три оси X, Y, Z и на линию OM, будем иметь:

$$\begin{aligned}
&x + y\cos(xy) + z\cos(zx) = l\cos\alpha,\\
&x\cos(xy) + y + z\cos(yz) = l\cos\beta,\\
&x\cos(zx) + y\cos(zy) + z = l\cos\gamma,\\
&x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l
\end{aligned} \qquad (3)$$

четыре соотношения дают возможность решить обе наши задачи. Чтобы найти связь между косинусами углов прямой с осями, надо исключить из уравнений (3) координаты x, y, z и длину l; так как уравнения эти однородны, то для того, чтобы они имели решения отличные от нуля, детерминант системы должен равняться нулю; значит, между косинусами углов прямой с осями координат должна существовать следующая связь:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(xy) & \cos(xz) & \cos\alpha \\ \cos(yx) & 1 & \cos(yz) & \cos\beta \\ \cos(zx) & \cos(zy) & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Итак, не только в прямоугольной системе, но и в косоугольной углы α, β, γ не могут быть выбраны произвольно.

Найдем теперь выражение расстояния точки M от начала координат, т.-е. найдем длину l. Для этого надо исключить из уравнении (3) углы α, β, γ, так как мы хотим найти выражение расстояния в зависимости от координат x, y, z. Для этого умножаем первое равенство из группы (3) на x, второе на y, третье на z и складываем:

$$lx\cos\alpha + ly\cos\beta + lz\cos\gamma = x^2 + xy\cos(xy) + zx\cos(xz) +$$
$$+ xy\cos(xy) + y^2 + yz\cos(yz) + zx\cos(zx) + yz\cos(yz) + z^2.$$

Но последнее уравнение группы (3), будучи умножено на l, дает

$$lx\cos\alpha + ly\cos\beta + lz\cos\gamma = l^2,$$

следовательно,

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,yz\cos(yz) + 2\,zx\cos(zx) + 2\,xy\cos(xy). \qquad (5)$$

Вот формула, дающая расстояние точки от начала в косоугольных координатах. Если оси координат прямоугольны, то углы (yz), (zx), (xy) будут прямые, их косинусы равны нулю, и мы получим прежнюю формулу

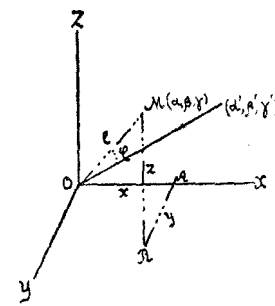
$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Отсюда обычным способом получается формула расстояния между двумя какими-нибудь точками:

$$d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + 2\,(y - y')(z - z')\cos(yz) +$$
$$+ 2\,(z - z')(x - x')\cos(zx) + 2\,(x - x')(y - y')\cos(xy). \qquad (6)$$

5. Определение угла между двумя прямыми в прямоугольных координатах.

Пусть даны две прямые, проходящие через начало координат, углы которых с осями суть α, β, γ и α', β', γ' (черт. 25). Посмотрим, как найти угол между этими прямыми. Возьмем на одной из этих прямых точку $M(x, y, z)$, построим ее координаты и будем проектировать ломаную $OARM$ и замыкающую OM на вторую прямую; обозначив длину замыкающей OM через l, получим:



Черт. 25.

$$l\cos\varphi = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'. \quad (1)$$

Внося вместо x, y, z их выражения через l:

$$x = l\cos\alpha;\ y = l\cos\beta;\ z = l\cos\gamma \quad (2)$$

и, сократив на l, получим искомое выражение:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'. \quad (3)$$

Отсюда получается условие перпендикулярности двух прямых: в этом случае $\cos\varphi = 0$, и условие перпендикулярности есть:

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0. \quad (4)$$

Предыдущая формула для $\cos\varphi$ относится и к прямым, не проходящим через начало координат, ибо и тогда за угол между этими прямыми может считаться угол между двумя прямыми, проходящими через начало координат и параллельными данным прямым.

Иногда бывает нужно иметь синус угла между двумя прямыми, поэтому на основании предыдущей формулы составим выражение для $\sin^2\varphi$:

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - (\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')^2.$$

Мы знаем, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1;$$

поэтому во второй части вместо единицы мы можем написать:

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma');$$
$$\sin^2\varphi = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') -$$
$$- (\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')^2$$

скроем скобки:

$$\sin^2\varphi = \cos^2\alpha\cos^2\alpha' + \cos^2\alpha\cos^2\beta' + \cos^2\alpha\cos^2\gamma' +$$
$$+ \cos^2\beta\cos^2\alpha' + \cos^2\beta\cos^2\beta' + \cos^2\beta\cos^2\gamma' +$$
$$+ \cos^2\gamma\cos^2\alpha' + \cos^2\gamma\cos^2\beta' + \cos^2\gamma\cos^2\gamma' -$$
$$- \cos^2\alpha\cos^2\alpha' - \cos^2\beta\cos^2\beta' - \cos^2\gamma\cos^2\gamma' -$$
$$- 2\cos\beta\cos\beta'\cos\gamma\cos\gamma' - 2\cos\gamma\cos\gamma'\cos\alpha\cos\alpha' -$$
$$- 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\beta\cos\beta'$$

После приведения получим:

$$\sin^2\varphi = \cos^2\beta\cos^2\gamma' + \cos^2\gamma\cos^2\beta' - 2\cos\beta\cos\beta'\cos\gamma\cos\gamma' +$$
$$+ \cos^2\gamma\cos^2\alpha' + \cos^2\alpha\cos^2\gamma' - 2\cos\gamma\cos\gamma'\cos\alpha\cos\alpha' +$$
$$+ \cos^2\alpha\cos^2\beta' + \cos^2\beta\cos^2\alpha' - 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\beta\cos\beta',$$

или

$$\sin^2\varphi = (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2 +$$
$$+ (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')^2 + (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2$$

Эту формулу можно представить в ином виде, заметив, что каждый из квадратов, входящих в формулу, есть детерминант:

$$\sin^2\varphi = \begin{vmatrix}\cos\beta & \cos\gamma\\ \cos\beta' & \cos\gamma'\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\cos\gamma & \cos\alpha\\ \cos\gamma' & \cos\alpha'\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \cos\alpha' & \cos\beta'\end{vmatrix}^2 \qquad (6)$$

Выполненное нами преобразование представляет частный случай одного общего преобразования детерминантов, часто встречающегося в геометрии. Рассмотрим выражение:

$$\begin{vmatrix}b, & c\\ b', & c'\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}n, & p\\ n', & p'\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}c, & a\\ c', & a'\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}p, & m\\ p', & m'\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}m, & n\\ m', & n'\end{vmatrix}$$

Раскрывая детерминанты, найдем:

$$(bc' - cb')(np' - pn') + (ca' - ac')(pm' - mp') + (ab' - ba')$$
$$(mn' - nm') = bc'np' + cb'pn' + ca'pm' + ac'mp' + ab'mn' +$$
$$+ ba'nm' - bc'pn' - cb'np' - ca'mp' - ac'pm' - ab'nm' - ba'mn'$$

Прибавим и вычтем из этого выражения по

$$aa'mm' + bb'nn' + cc'pp'$$

Тогда легко убедиться, что сумма всех положительных членов вместе с тремя прибавленными равна произведению

$$(am + bn + cp)(a'm' + b'n' + c'p'),$$

а сумма отрицательных членов вместе с тремя прибавленными составит

$$-(am' + bn' + cp')(a'm + b'n + c'p)$$

Таким образом имеем:

$$(bc' - cb')(np' - pn') + (ca' - ac')(pm' - mp') + (ab' - ba')(mn' - nm') = (am + bn + cp)(a'm' + b'n' + c'p') - (am' + bn' + cp')(a'm + b'n + c'p),$$

или

$$\begin{vmatrix} b, & c \\ b', & c' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n, & p \\ n', & p' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c, & a \\ c', & a' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p, & m \\ p', & m' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m, & n \\ m', & n' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} am + bn + cp, & am' + bn' + cp' \\ a'm + b'n + c'p, & a'm' + b'n' + c'p' \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Вот соотношение, которое мы хотели получить. Его можно формулировать так: возьмем две системы из 6 элементов, расположенных в две строки и три столбца,

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & \quad & m, & n, & p \\ a', & b', & c', & \quad & m', & n', & p' \end{matrix}$$

Такие системы, похожие на детерминанты, называются матрицами (matrix). Если мы будем множить такие матрицы по правилу умножения детерминантов, то полученный детерминант будет равен сумме произведений трех пар детерминантов, получающихся из обеих матриц удалением одноименных столбцов.

В частном случае, когда элементы второй матрицы равны соответствующим элементом первой, соотношение (7) принимает вид:

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (aa' + bb' + cc')^2.$$

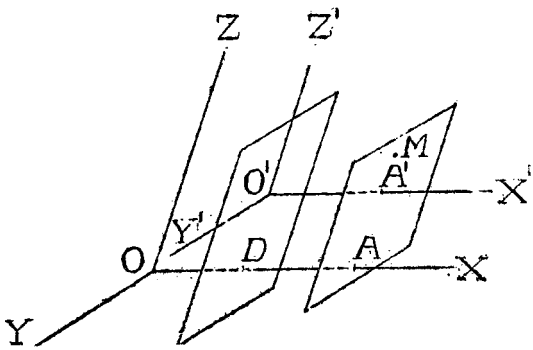
Полагая в этом равенстве $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$, $c = \cos\gamma$, и, соответственно, $a' = \cos\alpha'$, $b' = \cos\beta'$, $c' = \cos\gamma'$, мы получим соотношения, выведенные для угла между двумя прямыми.

6. Преобразование координат.

Как и в геометрии на плоскости, преобразование декартовых координат можно разбить на преобразование начала и на преобразование направления осей.

Пусть требуется преобразовать начало, т.-е. требуется перейти от осей X, Y, Z с началом O к осям X', Y', Z' с началом O', при чем направления осей у обеих систем одни и те же (черт. 26).

Рассмотрим точку M, координаты которой в старой системе суть x, y, z. Чтобы преобразование было возможно, надо знать положение нового начала относительно старой системы; пусть координаты нового начала относительно старой системы будут a, b, c. Проведем плоскости через точки M и O' параллельно плоскости YZ; пусть первая плоскость встречает ось X' в точке A', ось X — в точке A, а вторая плоскость встречает ось X в точке D; тогда



Черт. 26.

$$OA = x,\quad O'A' = x',\quad OD = a.$$

Очевидно, что $OA = DA + OD$; но $DA = O'A'$, так как DA и $O'A'$ суть отрезки двух параллельных прямых между двумя параллельными плоскостями. Следовательно,

$$OA = O'A' + OD$$

или

$$x = x' + a. \tag{1}$$

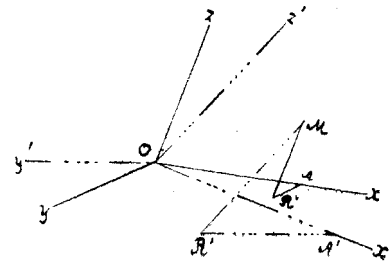
Таким же образом найдем

$$y = y' + b, \tag{2}$$

$$z = z' + c. \tag{3}$$

Итак, старая координата точки равна новой, сложенной с координатой нового начала в старой системе.

Посмотрим, какой вид будут иметь формулы преобразования направления. Покажем общее решение этой задачи для косоугольной системы и приложим его к прямоугольной системе. Пусть даны две косоугольные системы координат XYZ и $X'Y'Z'$, имеющие одно начало O (черт. 27). Возьмем какую-нибудь точку M и построим ее координаты по старой и по новой системе. Введем обозначения, которых впоследствии всегда будем держаться, именно, углы между старыми и новыми осями будем обозначать так, как показано в следующей таблице:



Черт. 27.

	X	Y	Z
X'	α	β	γ
Y'	α'	β'	γ'
Z'	α''	β''	γ''

Здесь буква, стоящая на пересечении двух рядов, горизонтального и вертикального, обозначает угол между двумя осями, наименование которых поставлено в начале каждой строчки и вверху каждого столбца так, что α есть угол между осями X и X', β — угол между осями Y и X' и т. д. На нашем чертеже мы имеем две ломаные $OARM$ и $OA'R'M$, имеющие общее начало и общий конец; поэтому их проекции на любую ось равны между собою. Проектируя обе ломаные на ось X, будем иметь:

$$\text{Пр. } OARM = x + y\cos(xy) + z\cos(zx),$$
$$\text{Пр. } OA'R'M = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha''$$

и так как эти проекции равны, то:

$$x + y\cos(xy) + z\cos(zx) = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha''.$$

Спроектировав те же ломаные на две другие оси Y и Z, получим еще два уравнения. Таким образом, у нас будет три уравнения:

$$\begin{aligned} x + y\cos(xy) + z\cos(zx) &= x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha'', \\ x\cos(xy) + y + z\cos(zy) &= x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'', \\ x\cos(zx) + y\cos(yz) + z &= x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma''. \end{aligned} \quad (4)$$

Решая эти три уравнения с тремя неизвестными x, y, z, мы выразим старые координаты через новые. Решениями будут служить многочлены первой степени относительно x', y', z'; заметим при этом, что углы, напр., α, β, γ, связаны между собой условием (4) стр. 20, так что девять углов, входящих в предидущие уравнения, связаны тремя условиями.

Перейдем к случаю, когда старая система — прямоугольная; тогда косинусы углов между старыми осями будут нули, и решать систему (4) не придется, так как она будет решена; именно:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha'', \\ y &= x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'', \\ z &= x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma''. \end{aligned} \quad (5)$$

Но углы α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' суть углы осей X', Y', Z' с осями X, Y, Z, поэтому они связаны условиями:

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1, \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' &= 1, \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Положим теперь, что не только старая, но и новая система прямоугольна; в таком случае оси X', Y', Z' перпендикулярны между собой и потому

$$\begin{aligned} \cos(y'z') &= \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = 0, \\ \cos(z'x') &= \cos\alpha''\cos\alpha + \cos\beta''\cos\beta + \cos\gamma''\cos\gamma = 0, \\ \cos(x'y') &= \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Три условия (6) выражают, что старая система прямоугольна, три условия (7) — что новая система прямоугольна: значит, если

обе системы прямоугольны, то девять количеств, $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, ... , $\cos\gamma''$, связаны шестью условиями, так что из них произвольны только три, а остальные определяются из формул (6) и (7).

Заметим теперь следующее обстоятельство: мы могли бы обратить задачу, переменив роли старой и новой системы.

Значит, рядом с шестью соотношениями (6) и (7) существует шесть других соотношений. Действительно, так как система $X'Y'Z'$, которую мы теперь принимаем за старую, прямоугольна, то

$$\begin{array}{lll} \text{для углов оси } X \text{ с осями } X, Y, Z: & \cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1, & \\ \text{„ „ „ } Y \text{ „ „ „} & \cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' = 1, & (8) \\ \text{„ „ „ } Z \text{ „ „ „} & \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1. & \end{array}$$

Далее, так как оси X, Y, Z, которые мы теперь принимаем за новые, перпендикулярны между собой, то мы будем иметь еще три условия:

$$\begin{array}{l} \cos(yz) = \cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'' = 0, \\ \cos(zx) = \cos\gamma\cos\alpha + \cos\gamma'\cos\alpha' + \cos\gamma''\cos\alpha'' = 0, \\ \cos(xy) = \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' = 0. \end{array} \qquad (9$$

Очевидно, уравнения (8) и (9) должны представлять следствия уравнений (6) и (7), так что из первых шести уравнений, помощью алгебраических преобразований, могут быть получены шесть последних.

Рассмотрим следующий детерминант, составленный из всех девяти косинусов нашей таблицы:

$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \cos\alpha', & \cos\beta', & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'', & \cos\beta'', & \cos\gamma'' \end{vmatrix}$$

и найдем его числовую величину. Для этого напишем квадрат этого детерминанта. Элементами квадрата этого детерминанта будут служить суммы вида:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

и

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

которые мы будем обозначать соответственно $\Sigma\cos^2\alpha$ и $\Sigma\cos\alpha\cos\alpha'$

Таким образом,

$$D^2 = \begin{matrix} \Sigma\cos^2\alpha & , \Sigma\cos\alpha\cos\alpha' & , \Sigma\cos\alpha\cos\alpha'' \\ \Sigma\cos\alpha'\cos\alpha, & \Sigma\cos^2\alpha' & , \Sigma\cos\alpha'\cos\alpha'' \\ \Sigma\cos\alpha''\cos\alpha, & \Sigma\cos\alpha'\cos\alpha'', & \Sigma\cos^2\alpha'' \end{matrix}$$

На основании равенств (6) и (7) имеем:

$$\Sigma\cos^2\alpha = \Sigma\cos^2\alpha' = \Sigma\cos^2\alpha'' = 1.$$

$$\Sigma\cos\alpha\cos\alpha' = \Sigma\cos\alpha'\cos\alpha'' = \Sigma\cos\alpha''\cos\alpha = 0.$$

Поэтому

$$D^2 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

и

$$D = \pm 1.$$

Посмотрим, когда детерминант D равен $+1$ и когда -1. Пусть старые оси X, Y, Z неподвижны; будем непрерывно изменять положение новых осей относительно старых; тогда, если при первоначальном положении новых осей детерминант был равен $+1$, то он будет равен $+1$ во все время перемещения новых осей, потому что перемещение это совершается непрерывно, значит, углы α, α', ... меняются непрерывно, и поэтому детерминант от $+1$ к -1 перейти не может. Итак, при непрерывном изменении положения новых осей относительно старых детерминант D не меняет своей величины. Заметив это, приведем оси X', Y', Z' в такое положение, чтобы положительное направление оси X' совпало с положительным направлением оси X, и положительное направление оси Y'—с положительным направлением оси Y; тогда положительное направление оси Z' совпадает или с положительным, или с отрицательным направлением оси Z. Оказывается, что этим двум различным предположениям и соответствуют случаи, когда $D = +1$ и $D = -1$. В самом деле, положим, что новые оси пришли в полное совпадение со старыми, тогда:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha' = \frac{\pi}{2}, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha'' = \frac{\pi}{2}, \quad \beta'' = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma'' = 0$$

и поэтому

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=+1.$$

Следовательно, если две системы координат могут быть совмещены так, что положительные направления их осей совпадают, то детерминант равен $+1$. Если же они не могут быть так совмещены, и положительное направление оси Z' совпадает с отрицательным направлением оси Z, то $\gamma''=\pi$, $\cos\gamma''=-1$; поэтому в предыдущем детерминанте последним элементом будет -1, а следовательно, в этом случае

$$D=-1.$$

Выберем теперь из уравнений (6) и (7) такие три, в которые входят три одних и тех же косинуса, наприм., $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; такими уравнениями будут 1-е уравнение группы (6) и два последних уравнения группы (7); эти уравнения мы перепишем в виде:

$$\begin{aligned}\cos\alpha\ \cos\alpha+\cos\beta\ \cos\beta+\cos\gamma\ \cos\gamma&=1,\\ \cos\alpha'\cos\alpha+\cos\beta'\cos\beta+\cos\gamma'\cos\gamma&=0,\\ \cos\alpha''\cos\alpha+\cos\beta''\cos\beta+\cos\gamma''\cos\gamma&=0.\end{aligned}$$

Если в этих уравнениях первые множители будем рассматривать, как коэффициенты, а вторые—как неизвестные, то эта система представит систему трех уравнений 1-й степени с тремя неизвестными $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Определим из этих трех уравнений $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. В выражении для $\cos\alpha$ в знаменателе будет детерминант из коэффициентов при неизвестном, т.-е. D; в числителе же будет тот же детерминант D, в котором вместо $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, $\cos\alpha''$ будут числа 1, 0, 0, т.-е. в числителе будет минор, сопряженный элементу $\cos\alpha$. Значит,

$$\cos\alpha=\frac{\cos\beta'\ \cos\gamma''-\cos\gamma'\ \cos\beta''}{D},$$

и так как $D=\pm1$, то $\cos\alpha=\pm(\cos\beta'\ \cos\gamma''-\cos\gamma'\ \cos\beta'')$. Переставляя в этом выражении буквы в круговом порядке, найдем выражения для $\cos\beta$ и $\cos\gamma$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \pm(\cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\gamma'\cos\beta''),\\ \cos\beta &= \pm(\cos\gamma'\cos\alpha'' - \cos\alpha'\cos\gamma''),\\ \cos\gamma &= \pm(\cos\alpha'\cos\beta'' - \cos\beta'\cos\alpha'').\end{aligned} \tag{10}$$

То, что мы сделали относительно $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ можно сделать относительно $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ и $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$; каждый из этих косинусов будет равен сопряженному ему минору детерминанта D, взятому с $+$ или с $-$.

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha' &= \pm(\cos\beta''\cos\gamma - \cos\gamma''\cos\beta),\\ \cos\beta' &= \pm(\cos\gamma''\cos\alpha - \cos\alpha''\cos\gamma),\\ \cos\gamma' &= \pm(\cos\alpha''\cos\beta - \cos\beta''\cos\alpha);\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha'' &= \pm(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'),\\ \cos\beta'' &= \pm(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'),\\ \cos\gamma'' &= \pm(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha').\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Этот результат имеет следующее значение. Положим, что в пространстве даны две перпендикулярные прямые и требуется провести третью прямую, перпендикулярную к обеим данным. Примем косинусы углов одной из данных прямых с осями за $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ и другой за $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$; тогда направление искомой прямой определится из равенств (10).

Посмотрим теперь, как из равенств (6) и (7) получить равенства (8) и (9). Возьмем левую часть первого равенства (8):

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'',$$

представим ее в виде

$$\cos\alpha\cos\alpha + \cos\alpha'\cos\alpha' + \cos\alpha''\cos\alpha''$$

и в каждом члене вместо вторых косинусов вставим сопряженные им миноры; миноры, соответствующие $\cos\alpha'$ и $\cos\alpha''$, получим из первого равенства (10), переставляя значки в круговом порядке. Таким образом:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = \pm\cos\alpha(\cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\gamma'\cos\beta'') \pm$$
$$\pm\cos\alpha'(\cos\beta''\cos\gamma - \cos\gamma''\cos\beta) \pm \cos\alpha''(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta').$$

Очевидно, правая часть этого равенства представляет разложение детерминанта $\pm D$ по элементам первого столбца; значит, она равна $\pm D$, и так как $\pm D = 1$, то

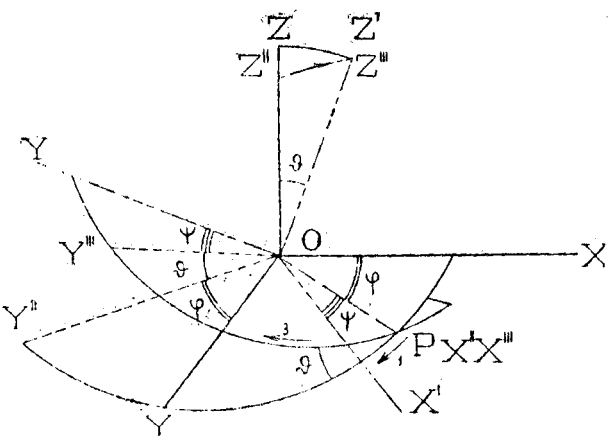
$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1.$$

Точно так же можно получить и первое равенство группы (9):

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' = 0;$$

стоит только $\cos\beta$, $\cos\beta'$, $\cos\beta''$ заменить их минорами, и тогда получится разложение детерминанта с двумя равными столбцами, а такой детерминант равен нулю.

В формулы (5) преобразования координат входят девять углов; но эти девять углов связаны между собою шестью уравнениями; значит, независимых между ними только три, а остальные введены только для симметрии. Такое введение шести лишних углов удобно с теоретической стороны; на практике же присутствие этих углов осложняет дело, и поэтому необходимо иметь такие формулы, в которые лишние углы не входят. Такие формулы и были даны Эйлером. Они получаются следующим образом.



Черт. 28.

Возьмем старые оси X, Y, Z и новые X', Y', Z' (черт. 28). Проведем плоскости XY и $X'Y'$; пусть они пересекаются по прямой OP. Восставим в точке O перпендикуляры к OP в плоскостях XY и $X'Y'$; пусть они будут OY'' и OY'''. Чтобы систему XYZ привести в положение $X'Y'Z'$, нам придется сделать три поворота около трех различных направлений:

1) Поворачиваем систему XYZ около оси Z так, чтобы ось X совпала с линией пересечения плоскостей XY и $X'Y'$, т.-е. с линией OP; тогда система примет положение $X''Y''Z$; угол этого поворота, т.-е. угол между осью X и линией пересечения плоскостей XY и $X'Y'$, назовем через φ; заметим, что положительное направление этого вращения есть направление от оси X к оси Y

2) Поворачиваем плоскость XY и ось Z около прямой OP так, чтобы ось Z совпала с осью Z' и плоскость XY—с плоскостью $X'Y'$; тогда система из положения $X''Y''Z$ перейдет в положение $X''Y'''Z'$; угол этого поворота, т.-е. угол между осями Z и Z', назовем через ϑ, очевидно, ϑ будет также двугранный угол между плоскостями XY и $X'Y'$. Положительное направление этого вращения есть направление от оси Z'' к оси X''.

3) Наконец, поворачиваем систему $X''Y'''Z'$ около оси Z' так, чтобы ось X'' совпала с осью X'; тогда ось Y''' совпадает с осью Y' и система примет положение $X'Y'Z'$; угол этого вращения, т.-е. угол между осями X'' и X', назовем через ψ; направление этого вращения будет положительным, если оно совершается от оси X''' к оси Y'''. Итак, тремя поворотами около трех осей мы привели систему XYZ в совпадение с системой $X'Y'Z'$.

Приступим теперь к выводу формул преобразования. Прежде всего мы от системы XYZ перейдем к системе $X''Y''Z''$, которая получится после первого поворота. Так как первый поворот совершается около оси Z, то ось Z, а следовательно, и плоскость XY остаются на месте; поэтому координата z не изменится, и преобразованию подвергнутся только x и y, так что преобразование сводится к преобразованию координат на плоскости XY; выражения для x и y напишутся по формулам преобразования координат на плоскости:

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos\varphi - y'' \sin\varphi, \\ y &= x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi, \\ z &= z''. \end{aligned} \tag{13}$$

Мы пишем $z = z''$, так как в обеих системах координата z будет одна и та же. Теперь от системы $X''Y''Z''$ мы перейдем к системе $X'''Y'''Z'''$, которая получается из предыдущей после второго поворота. Этот поворот совершается около оси OP, поэтому ось X'' остается на месте, и преобразованию подвергнутся только y'' и z'':

$$\begin{aligned} x'' &= x''', \\ y'' &= y''' \cos\vartheta - z''' \sin\vartheta, \\ z'' &= y''' \sin\vartheta + z''' \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{14}$$

от системы $X'''Y'''Z'''$ мы переходим к системе $X'Y'Z'$, которая получится из предыдущей после третьего вращения; вращение это производится около оси Z''', и поэтому

$$\begin{aligned} x''' &= x' \cos\psi - y' \sin\psi, \\ y''' &= x' \sin\psi + y' \cos\psi, \\ z''' &= z'. \end{aligned} \qquad (15)$$

Чтобы теперь получить окончательные формулы, надо только исключить из формулы (13), (14), (15) координаты x'', y'', z'' и x''', y''', z'''. в равенства (14) на место x''', y''', z''' их значения из равенств (15):

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos\psi - y' \sin\psi, \\ y'' &= x' \sin\psi \cos\vartheta + y' \cos\psi \cos\vartheta - z' \sin\vartheta, \\ z'' &= x' \sin\psi \sin\vartheta + y' \cos\psi \sin\vartheta + z' \cos\vartheta \end{aligned}$$

образом, x''', y''', z'''. Чтобы исключить теперь x'', y'', z'', вставим полученные их значения в формулы (13):

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi \cos\psi - y' \cos\varphi \sin\psi - x' \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta - \\ &\quad - y' \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta + z' \sin\varphi \sin\vartheta, \\ y &= x' \cos\psi \sin\varphi - y' \sin\varphi \sin\psi + x' \cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta + \\ &\quad + y' \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta - z' \cos\varphi \sin\vartheta, \\ z &= x' \sin\psi \sin\vartheta + y' \cos\psi \sin\vartheta + z' \cos\vartheta \end{aligned}$$

координаты x', y', z', получим окончательно:

$$\begin{aligned} x &= x' (\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta) - \\ &\quad - y (\cos\varphi \sin\psi + \\ &\quad + \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta) + z' \sin\varphi \sin\vartheta, \\ y &= x' (\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta) + \\ &\quad + y' (-\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta) - z' \cos\varphi \sin\vartheta, \\ z &= x' \sin\psi \sin\vartheta + y' \cos\psi \sin\vartheta + z' \cos\vartheta. \end{aligned}$$

формулы преобразования, в которые входят только три независимых угла ψ, ϑ, φ; эти формулы называются формулами Эйлера также получены при помощи сферической тригоно-

метрии, если из начала координат O опишем сферу радиусом, равным единице. Из сравнения этих формул с формулами (5) вытекает, что коэффициенты при x', y', z' равны $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$ и т. д.

Самый общий случай преобразования координат будет тот, когда меняются и начало координат, и направление осей. Из геометрии на плоскости известно, что такое преобразование может быть разложено на два: на преобразование начала и преобразование направления осей; формулы преобразования будут линейны но не однородные.

ГЛАВА II

Поверхности

1. Геометрическое значение уравнений между координатами.

Пусть у нас есть уравнение между тремя координатами:

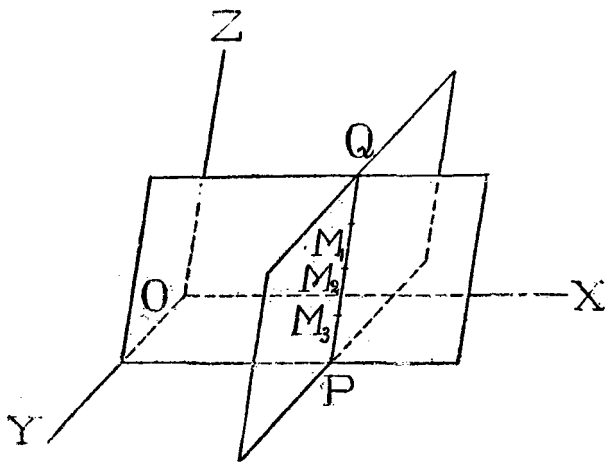
$$f(x, y, z) = 0$$

Это уравнение определяет одну из координат, напр., z, как неявную функцию двух остальных, так что если мы положим $x = a$, $y = b$, то координата z определяется из данного уравнения, и для нее получим значения:

$$z = c_1, \ c_2, \ c_3 \ldots$$

Посмотрим, как построить эти точки. Точки, для которых $x = a$, лежат в плоскости, параллельной YZ и проходящей от нее на расстоянии a; точки, для которых $y = b$, лежат в плоскости, параллельной плоскости ZX и отстоящей от нее на расстоянии b; точки для которых одновременно $x = a$ и $y = b$, должны лежать и на первой, и на второй плоскости, следовательно – это точки их пересечения, т.-е. эти точки лежат на линии, параллельной оси Z. Поэтому, чтобы построить эти точки, берем на плоскости XY точку $P(a, b)$ (черт. 29), проводим через P линию PQ параллельно оси Z и на этой линии откладываем отрезки $PM_1 = c_1$, $PM_2 = c_2$, $PM_3 = c_3$, ... ; тогда и получим искомые точки M_1, M_2, M_3, ... Будем теперь непрерывно менять координаты x и y, тогда, очевидно, прямая PQ будет непрерывно перемещаться, оставаясь параллельной оси Z; вместе с тем значения z, определяемые из уравнения $f(x, y, z) = 0$, будут также непрерывно меняться. Таким образом, если мы будем непрерывно менять координаты x, y, z так, чтобы они не переставали удовле-

творять данному уравнению, то точки M_1, M_2, M_3, ... будут непрерывно перемещаться по прямой PQ, которая в свою очередь будет двигаться, опираясь на плоскость XY и оставаясь сама себе параллельной. Ясно, что при этом точки $M_1, M_2, M_3, \ldots$. опишут некоторое геометрическое место, и так как каждой точке плоскости XY соответствует одна или несколько точек на прямой PQ, то это геометрическое место будет также непрерывно простираться, как и плоскость XY, т.-е. геометрическое место будет поверхность. Таким образом, одно уравнение между тремя координатами в пространстве изображает поверхность. Это справедливо не только для Декартовых координат, но и для всяких других, напр., для полярных.



Черт. 29.

Пусть теперь даны два уравнения:

$$f(x, y, z) = 0; \qquad F(x, y, z) = 0.$$

Посмотрим, где лежат точки, координаты которых удовлетворяют совместно обоим этим уравнениям. Точки, координаты которых удовлетворяют первому уравнению, лежат на некоторой поверхности; точки, координаты которых удовлетворяют второму уравнению, лежат на некоторой другой поверхности; значит, те точки, координаты которых удовлетворяют обоим уравнениям, должны лежать на обеих поверхностях, т.-е. на линии их пересечения. Значит, два уравнения между тремя координатами представляют собою линию.

Пусть даны три уравнения между тремя координатами. Каждое из этих уравнений изображает поверхность; следовательно, точки, координаты которых удовлетворяют этим трем уравнениям, суть точки пересечения трех поверхностей, и это будут отдельные точки, так как первые две поверхности пересекаются по некоторой линии, а эта линия с третьей поверхностью пересекается в одной или нескольких точках. Итак, три уравнения между тремя координатами изображают одну или несколько точек. Исключение представляет тот случай, когда третье уравнение есть следствие первых двух; тогда, как увидим впоследствии, эти три уравнения изображают не отдельные точки, а целую линию.

Если точка дается своими координатами $x = a$, $y = b$, $z = c$, то и в этом случае можно сказать, что она дается уравнениями, но уже решенными. Действительно, $x = a$ есть одно уравнение и, следовательно, должно изображать поверхность; очевидно, эта поверхность есть плоскость, параллельная плоскости YZ, так как координаты всех точек такой плоскости удовлетворяют условию $x = a$. Если даны два уравнения $x = a$, $y = b$, то они будут изображать линию пересечения плоскостей, параллельных плоскостям YZ и ZX, т.-е. прямую, параллельную оси Z

2. Классификация поверхностей

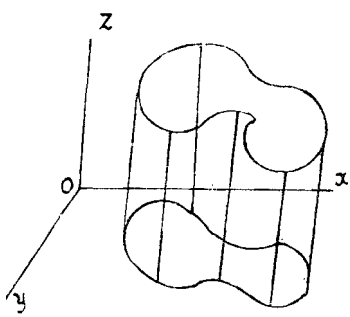
В геометрии трех измерений неудобно классифицировать непосредственно линии, так как в ней линии изображаются двумя уравнениями. Что же касается поверхностей, то поверхности делятся по их уравнениям в Декартовых координатах, как и линии в геометрии на плоскости, на алгебраические и трансцендентные. Затем, если поверхность изображена алгебраическим уравнением, то мы освобождаем его от радикалов и дробей и получаем первую часть уравнения в виде многочлена. По степени этих многочленов алгебраические поверхности делятся на поверхности различных порядков, при чем степенью многочлена называется измерение высшего члена по отношению ко всем трем координатам вместе. Классификацию поверхностей мы делаем только по отношению к Декартовым координатам, так как только в этих координатах характер и порядок поверхности не меняется от преобразования координат,

потому что формулы преобразования Декартовых координат в Декаровы суть линейные целые многочлены.

Посмотрим, что представляет уравнение, не содержащее какой-нибудь координаты. Положим, что в уравнение не входит z, т.-е. рассмотрим уравнение:

$$f(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Пусть это уравнение удовлетворяется при $x = a$, $y = b$. Мы видели, что точки, удовлетворяющие условиям $x = a$, $y = b$, лежат на пересечении плоскостей, параллельных плоскостям YZ и ZX и проходящих на расстояниях a и b от этих плоскостей; значит, эти точки лежат на прямой, параллельной оси Z. Но наше уравнение содержит только x и y, следовательно, если мы выберем x и y так, чтобы уравнение наше удовлетворялось, то у соответствующей точки координата z может быть какая угодно. Заметив это, возьмем оси координат X, Y, Z (черт. 30) и рассмотрим уравнение $f(x, y) = 0$, как уравнение кривой на плоскости XY, т.-е. положим $z = 0$. Начертим в плоскости XY эту кривую. Ясно, что если через какую-нибудь точку этой кривой мы проведем прямую, параллельную оси Z, то все точки этой прямой будут удовлетворять нашему уравнению; в самом деле, для всех точек этой прямой координаты x и y одни и те же, и разница между ними будет заключаться только в координате z, и так как координата z не входит в наше уравнение, то она может остаться произвольной. Если мы сделаем то же самое для всех точек нашей кривой, то получим некоторую цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Z и направляющую которой получим, рассматривая уравнение $f(x, y) = 0$, как уравнение кривой на плоскости. Итак, если уравнение поверхности не содержит одной из координат, то поверхность есть цилиндр, образующая которого параллельна соответствующей оси координат и уравнение направляю-



Черт. 30.

щей которого в плоскости XY совпадает с уравнением данной поверхности. Например, уравнение $x^2+y^2=a^2$ в плоскости изображает окружность, в пространстве же это уравнение представляет круглый цилиндр; при этом цилиндр будет прямой, если ось Z перпендикулярна к плоскости XY; если же ось Z наклонна к XY, то цилиндр будет косой.

Если в уравнение входит только одна координата, то уравнение представляет одну или несколько плоскостей. Действительно, если в уравнение входит, например, только координата x, то это уравнение показывает, что координата x должна иметь определенное значение, так как она определяется из данного уравнения с одним неизвестным; координаты же y и z могут иметь какое угодно значение; очевидно, что все точки, удовлетворяющие этому условию, расположены в плоскости, параллельной плоскости YZ.

Положим, что в уравнение поверхности координаты входят только в виде отношений двух из них к третьей:

$$f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0. \tag{2}$$

Легко видеть, что если этому уравнению можно удовлетворить, положив $x=a$, $y=b$, $z=c$, так что

$$\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)=0, \tag{3}$$

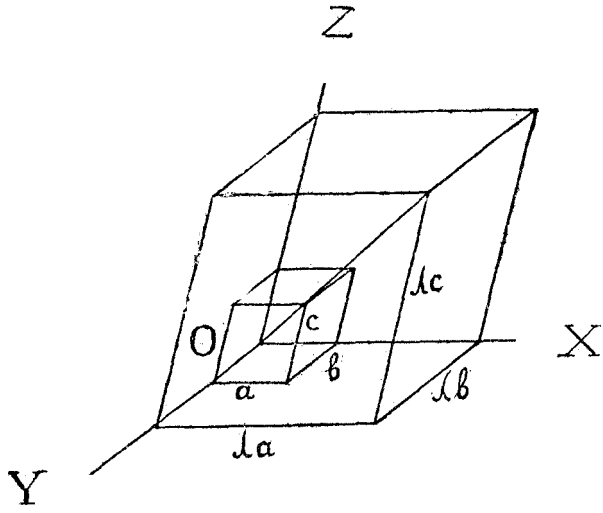
то ему можно удовлетворить, положив

$$x=\lambda a,\ y=\lambda b,\ z=\lambda c,$$

где λ есть произвольный множитель.

Действительно, вставив эти значения в уравнение (2) и сократив на λ, получим тождество (3). Посмотрим, где будут лежать точки с координатами λa, λb, λc. Построим параллелепипед, из которого получаются координаты a, b, c (черт. 31). Чтобы построить координаты λa, λb, λc, нам надо построить такой же параллелепипед, но размеры которого в λ раз более размеров прежнего параллелепипеда. Все такие параллелепипеды будут подобны между собою, и, следовательно, их диагонали будут лежать на одной прямой линии.

Из этого следует, что если имеем какую-нибудь точку, удовлетворяющую своими координатами данному уравнению, и если эту точку соединим с началом координат, то все точки полученной прямой также будут удовлетворять данному уравнению. Значит, если мы возьмем на данной поверхности какую-нибудь точку и соединим ее с началом координат, то полученная прямая всеми своими точками будет лежать на данной поверхности. Таким образом, поверхность будет покрыта прямыми линиями, проходящими через одну точку — начало координат, и, следовательно, это будет коническая поверхность. Итак, уравнение, содержащее только отношения между координатами, представляет коническую поверхность, вершина которой находится в начале координат.



Черт. 31.

Отсюда, как частный случай, вытекает следующее предложение об алгебраических поверхностях. Пусть у нас есть уравнение алгебраической поверхности:

$$\sum A_{p,q,r}\, x^p y^q z^r = 0.$$

Пусть это уравнение однородно, т.-е. сумма показателей при x, y, z в каждом члене одинакова; докажем, что это уравнение также представляет конус. Разделим данное уравнение на x^n, где $n = p + q + r$

$$\Sigma A_{p,q,r}\frac{x^p y^q z^r}{x^n}=\Sigma A_{p,q,r}\frac{x^p}{x^p}\cdot\frac{y^q}{x^q}\cdot\frac{z^r}{x^r}=\Sigma A_{p,q,r}\left(\frac{y}{x}\right)^q\left(\frac{z}{x}\right)^r$$

Мы видим, что наше уравнение преобразовалось в такое, где входят только отношения между координатами, и, следовательно, оно представляет коническую поверхность.

Таким образом, всякое однородное уравнение между тремя координатами представляет конус с вершиной в начале координат.

Положим, что первая часть уравнения поверхности $f(x, y, z)=0$ тождественно разлагается на два множителя:

$$f(x, y, z)=\varphi(x, y, z).\psi(x, y, z). \tag{4}$$

Тогда уравнение поверхности перепишется в виде:

$$\varphi(x, y, z).\psi(x, y, z)=0. \tag{5}$$

Этому уравнению мы удовлетворим, если удовлетворим одному из двух уравнений:

$$\varphi(x, y, z)=0, \tag{6}$$

$$\psi(x, y, z)=0. \tag{7}$$

Следовательно, как точки, лежащие на поверхности (6), так и точки, лежащие на поверхности (7), удовлетворяют первоначальному уравнению; отсюда следует, что наша поверхность распадается на две: (6) и (7). Итак, если первая часть уравнения поверхности разлагается на несколько множителей, то и самая поверхность распадается на простейшие поверхности, уравнения которых получим, приравнивая нулю каждый множитель отдельно.

Пусть у нас есть два уравнения:

$$M=0,\ N=0, \tag{8}$$

где M и N суть функции x, y, z. Рассмотрим уравнение

$$M-kN=0, \tag{9}$$

где k есть произвольный параметр. Ясно, что это уравнение изображает бесчисленное множество поверхностей, потому что, давая k различные значения, мы будем получать различные поверхности; такая совокупность поверхностей, в уравнение которой входит произвольный параметр в первой степени, называется пучком поверхностей. Легко показать, что через каждую точку пространства проходит только одна поверхность пучка. В самом деле, пусть какая-нибудь поверхность пучка проходит через точку (x', y', z'); вставив координаты x', y', z' в уравнение (9), мы получим тождество:

$$M' - kN' = 0,$$

откуда

$$k = \frac{M'}{N'}.$$

Таким образом, k имеет единственное определенное значение, и, следовательно, через каждую точку пространства проходит только одна поверхность пучка (9). Посмотрим, какое относительное положение имеют поверхности пучка при неопределенном параметре k. Если мы выберем координаты x, y, z так, чтобы они удовлетворяли обоим уравнениям (8), то уравнение (9) удовлетворится при всяком значении k; значит, если точка (x, y, z) удовлетворяет уравнениям (8), то она лежит на всех поверхностях пучка. Но точки, для которых $M = 0$ и $N = 0$, лежат на линии пересечения поверхностей (8); отсюда следует, что все поверхности пучка проходят через одну и ту же линию, именно, через линию пересечения поверхностей (8).

Перейдем теперь к уравнениям линий. Каждая линия определяется двумя уравнениями:

$$M = 0, \; N = 0. \tag{10}$$

Легко видеть, что та же линия может изображаться не только этими уравнениями, но и бесчисленным множеством других пар уравнений. В самом деле, если возьмем уравнение пучка

$$M - kN = 0,$$

то все поверхности этого пучка проходят через нашу линию; значит, из этого пучка мы можем взять любые две поверхности:

$$M - aN = 0, \quad M - bN = 0, \tag{11}$$

и эти поверхности непременно пройдут через нашу линию (10), а следовательно, эта линия может быть представлена уравнениями (11). И в самом деле, все точки нашей линии удовлетворяют уравнениям $M = 0$ и $N = 0$; значит, они удовлетворяют и уравнениям (11); обратно — так как a не равно b, то, вычитая одно из уравнений (11) из другого, получим:

$$M = 0, \quad N = 0, \tag{10}$$

и следовательно, если линия изображается системой уравнений (11), то и уравнения (10) изображают ту же линию. Пусть, например, дана прямая

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Очевидно, эта прямая есть линия пересечения плоскостей YZ и ZX, т.-е. ось Z; но ясно, что та же ось Z может быть также представлена уравнениями

$$x - y = 0, \quad x + y = 0.$$

Таким образом, если две линии изображены двумя различными системами уравнений, то из этого еще не следует, что эти линии различны.

Что касается точек, то мы знаем, что три уравнения определяют одну или несколько точек; но в частных случаях три уравнения могут и не определять отдельных точек. В самом деле, пусть у нас есть три уравнения:

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0. \tag{12}$$

Мы знаем, что есть случаи, когда три уравнения с тремя неизвестными имеют неопределенные решения; это будет в том случае, когда одно уравнение есть следствие двух других, потому что тогда, если два уравнения удовлетворены, то и третье будет удовлетворено, и поэтому оно является как бы лишним. Значит, в этом случае система трех уравнений будет определять не точки, а линии.

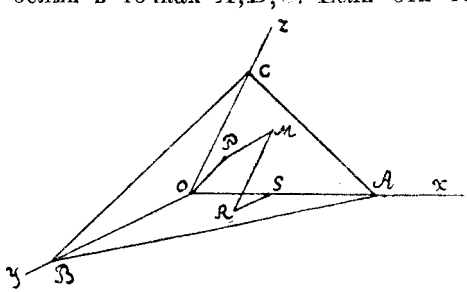
ГЛАВА III.

Плоскость.

1. Уравнение плоскости.

Чтобы доказать, что каждая поверхность первого порядка есть плоскость, мы сначала выведем уравнение плоскости и потом докажем, что, какое бы уравнение первой степени ни было дано, оно может быть приведено к тому виду, который мы получим для уравнения плоскости, и, следовательно, изображает плоскость.

Пусть дана какая-нибудь плоскость (черт. 32), встречающаяся с осями в точках A, B, C. Если эти точки соединим прямыми, то получим треугольник, по которому наша плоскость пересекается с плоскостями координат. Посмотрим, как определить положение этой плоскости в пространстве. Опустим из начала координат перпендикуляр OP на нашу плоскость и назовем длину его через p; дадим, кроме того, те три угла α, β, γ, которые OP образует с тремя осями. Будем теперь выводить уравнение нашей плоскости; для этого возьмем в плоскости какую-нибудь точку M, построим ее координаты и соединим M с P; тогда у нас получится ломаная $OSRMP$ и замыкающая OP; проекция этой ломаной на ось OP равна проекции замыкающей:



Черт. 32.

$$OS\cos\alpha + SR\cos\beta + RM\cos\gamma + MP\cos\frac{\pi}{2} = p,$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (1)$$

Так как это соотношение связывает координаты любой точки нашей плоскости и справедливо только для точек этой плоскости, то оно и есть уравнение этой плоскости. Уравнение это называется нормальным уравнением плоскости.

Чтобы доказать обратную теорему, т.-е. что всякое уравнение 1-й степени изображает плоскость, мы должны доказать, что всякое уравнение первой степени может быть приведено к виду (1). Для этого достаточно показать, что всегда можно найти множитель M, по умножении на который общее уравнение 1-й степени

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$

принимает нормальный вид: этот множитель мы будем называть нормирующим множителем.

Рассмотрим сначала тот случай, когда система координат прямоугольная. Уравнение (2) после умножения на M дает

$$MAx + MBy + MCz + MD = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения должны быть тождественны с коэффициентами уравнения (1); значит

$$MA = \cos\alpha,\ MB = \cos\beta,\ MC = \cos\gamma,\ MD = -p. \qquad (3)$$

Так как оси прямоугольны, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (4)$$

Внося сюда вместо косинусов их выражения из равенств (3), получим:

$$M^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1.$$

Отсюда

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (5)$$

Таким образом, для M мы нашли два значения, положительное и отрицательное; так как произведение MD равно $-p$, существенно отрицательной величине, то из двух знаков для M мы должны взять тот, который даст для MD отрицательное значение, и, следовательно, знак нормирующего множителя должен быть противоположен знаку постоянного члена. Итак, мы доказали, что всякое уравнение 1-й степени относительно прямоугольной системы координат изображает плоскость.

В косоугольных координатах вся разница будет заключаться в том, что соотношение (4) между косинусами углов заменится соотношением (4) стр. 20:

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos(xy), & \cos(xz), & \cos\alpha \\ \cos(yx), & 1, & \cos(yz), & \cos\beta \\ \cos(zx), & \cos(zy), & 1, & \cos\gamma \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Вставив сюда по форм. (3) вместо $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ величины MA, MB, MC, получим для определения M следующее квадратное уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos(xy), & \cos(xz), & MA \\ \cos(yx), & 1, & \cos(yz), & MB \\ \cos(zx), & \cos(zy), & 1, & MC \\ MA, & MB, & MC, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Прибавив к элементам последнего столбца по нулю, мы можем представить этот детерминант в виде суммы двух детерминантов:

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos(xy), & \cos(xz), & MA \\ \cos(yx), & 1, & \cos(yz), & MB \\ \cos(zx), & \cos(zy), & 1, & MC \\ MA, & MB, & MC, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & \cos(xy), & \cos(xz), & 0 \\ \cos(yx), & 1, & \cos(yz), & 0 \\ \cos(zx), & \cos(zy), & 1, & 0 \\ MA, & MB, & MC, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

В первом детерминанте последняя строка и последний столбец делятся на M; поэтому M^2 можно вынести множителем. Второй детерминант мы можем разложить по элементам последнего столбца, и тогда от него останется только минор, соответствующий последнему элементу 1. Таким образом, мы будем иметь:

$$M^2\begin{vmatrix} 1 & \cos(xy) & \cos(xz) & A \\ \cos(yx) & 1 & \cos(yz) & B \\ \cos(zx) & \cos(zy) & 1 & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos(yx) & 1 & \cos(yz) \\ \cos(zx) & \cos(zy) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

Из этого уравнения найдем M. Следовательно, как для случая прямоугольных координат, так и для случая косоугольных всякое уравнение первой степени представляет плоскость.

Выведем уравнение плоскости относительно отрезков, отсекаемых плоскостью на осях. Пусть плоскость образует на осях X, Y, Z отрезки a, b, c (черт. 32). Проведем перпендикуляр p на нашу плоскость; пусть углы его с осями будут α, β, γ. Легко видеть, что проекция отрезка a на перпендикуляр OP есть длина этого перпендикуляра:

$$p = a\cos\alpha.$$

Точно так же

$$p = b\cos\beta,$$

$$p = c\cos\gamma$$

сюда

$$\cos\alpha = \frac{p}{a}, \cos\beta = \frac{p}{b}, \cos\gamma = \frac{p}{c}$$

получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (8)$$

относительно отрезков

Посмотрим, как выражаются отрезки на осях через коэффициенты общего уравнения плоскости. Перенося в общем уравнении плоскости D во вторую часть и деля все уравнение на $-D$, получим

$$-\frac{Ax}{D} - \frac{By}{D} - \frac{Cz}{D} = 1$$

Сравнивая это уравнение с уравнением относительно отрезков, находим

$$a = -\frac{D}{A}; \; b = -\frac{D}{B}; \; c = -\frac{D}{C} \quad (9)$$

Иногда бывает необходимо иметь уравнение плоскости относительно одной из координат. Мы решим его относительно z:

$$z = mx + ny + c. \tag{10}$$

Легко видеть, что здесь c, как и в уравнении (8), есть отрезок, отсекаемый плоскостью на оси Z; в самом деле, чтобы найти точку пересечения плоскости с осью Z, мы должны в предыдущем уравнении положить $x = 0$, $y = 0$ и тогда получим $z = c$.

2. Исследование уравнения плоскости.

Посмотрим, какие особенности мы будем иметь в положении если некоторые из коэффициентов в ее уравнении обращаются в нуль.

1) Пусть в общем уравнении плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{11}$$

коэффициент D равен нулю. Тогда у нас получится однородное уравнение, которому можно удовлетворить, положив $x = 0$, $y = 0$. $z = 0$, а это значит, что соответствующая плоскость проходит через начало координат. Итак, однородное уравнение первой степени представляет плоскость, проходящую через начало координат.

2) Пусть теперь один из коэффициентов при координатах в нуль, напр. $C = 0$; тогда у нас будет уравнение:

$$Ax + By + D = 0, \tag{12}$$

не содержащее координаты z; значит, оно представляет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Z; направляющую этого цилиндра получим, рассматривая уравнение (5) на плоскости; но на плоскости это уравнение представляет прямую следовательно, уравнение (5) в пространстве будет представлять параллельную оси Z. Это видно и из другого соображения; именно, при $C = 0$, $c = \left|\frac{D}{C}\right| = \infty$, т.-е. плоскость встречается с осью Z на бесконечно большом расстоянии, и, следовательно, она параллельна оси Z. Итак, если уравнение не содер-

жит одной из координат, то плоскость параллельна соответствующей оси.

3) Пусть два коэффициента равны нулю; пусть, напр., $D=0$ и $C=0$. Первое условие показывает, что плоскость проходит через начало координат, а второе — что плоскость параллельна оси Z; очевидно, такая плоскость содержит в себе ось Z. Значит, если уравнение плоскости не содержит известного члена и какой-нибудь координаты, то плоскость проходит через соответствующую ось. Это видно также и из того, что в этом случае $c=-\frac{D}{C}=\frac{0}{0}$, и следовательно, плоскость на оси Z образует отрезок произвольной длины, т.-е. проходит через ось Z.

4) Пусть теперь два коэффициента при координатах, напр., A и B, обращаются в нуль, и, следовательно, уравнение принимает вид:

$$Cz+D=0. \tag{13}$$

Мы видели, что условие $A=0$ показывает, что плоскость параллельна оси X; условие $B=0$ показывает, что плоскость параллельна оси Y; если оба условия удовлетворены, то плоскость будет параллельна обеим осям X и Y, а следовательно, и плоскости XY. Это видно также из следующего соображения: при $A=0$ и $B=0$ уравнение принимает вид $z=-\frac{D}{C}$ и показывает, что все точки плоскости находятся на одинаковом расстоянии от плоскости XY; значит, это будет плоскость, параллельная плоскости XY и проведенная на расстоянии $-\frac{D}{C}$ от нее. Таким образом, если уравнение не содержит двух координат, то плоскость параллельна соответствующей плоскости координат.

5) Пусть три коэффициента обращаются в нуль: известный член и два коэффициента при координатах:

$$A=0, \qquad B=0, \qquad D=0.$$

Тогда уравнение плоскости будет $Cz=0$, или $z=0$.

Первые два условия показывают, что плоскость наша параллельна плоскости XY, а третье — что она проходит через начало координат; очевидно, что такая плоскость есть сама плоскость XY. Это и понятно, так как $z=0$ только для точек плоскости XY. Значит, если какую-нибудь координату приравняем нулю, то получим уравнение соответствующей координатной плоскости.

6) Пусть, наконец, исчезают три коэффициента при координатах:

$$A=0, \qquad B=0, \qquad C=0;$$

тогда уравнение плоскости будет $D=0$, или, по сокращении на D, $1=0$. Уравнение это, очевидно, не имеет смысла; но если бы мы выделили этот случай, то, имея уравнение с буквенными коэффициентами, мы должны были бы сказать, что уравнение это представляет плоскость только в том случае, если A, B, C не суть нули. Чтобы не делать такого исключения, придают условный смысл и этому случаю. Посмотрим, что делается с плоскостью по мере того, как коэффициенты A, B, C стремятся к нулю. Когда A, B, C стремятся к нулю, то отрезки a, b, c все увеличиваются, как видно из формул (9), и в пределе обращаются в бесконечность, так что наша плоскость образует на осях бесконечно большие отрезки; кроме того, в этом случае

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\pm\infty, \qquad \text{и след., } p=-MD=\mp\infty,$$

т.-е. перпендикуляр из начала координат на нашу плоскость также имеет бесконечно большую длину. Отсюда видно, что наша плоскость всеми своими точками уходит в бесконечность, так что уравнение $D=0$, или $1=0$ есть уравнение бесконечно удаленной плоскости. Это выражение имеет, конечно, только условный смысл, так как всякая плоскость, которую мы можем себе вообразить, представляется нам удаленною на конечное расстояние. Говоря, что уравнение $1=0$ представляет бесконечно удаленную плоскость, мы выражаем только, что по мере того, как уравнение стремится к виду $1=0$, расстояние плоскости от начала увеличивается беспредельно. Можно доказать, что бесконечно удаленная плоскость имеет неопределенное направление. В самом деле,

косинусы углов перпендикуляра к плоскости с осями выражаются по формулам (3) так:

$$\cos\alpha = MA = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta = MB = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = MC = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

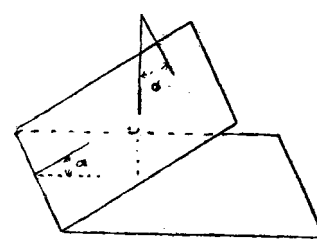
и при $A=0$, $B=0$, $C=0$:

$$\cos\alpha = \frac{0}{0},\quad \cos\beta = \frac{0}{0},\quad \cos\gamma = \frac{0}{0},$$

т.-е. перпендикуляр к плоскости имеет любое направление, и, значит, бесконечно удаленная плоскость параллельна любой плоскости пространства. Это и понятно, так как мы можем удалять плоскость в бесконечность, сохраняя за ней любое направление. Таким образом, как на плоскости есть одна бесконечно удаленная прямая, так в пространстве есть одна бесконечно удаленная плоскость. Как увидим ниже, все бесконечно удаленные прямые пространства лежат в бесконечно удаленной плоскости.

3. Угол между двумя плоскостями.

Известно, что если из точки O, лежащей внутри двугранного угла, опустить перпендикуляры на его стороны, то получится угол, дополняющий линейный угол двугранного до 2-х прямых. Но если мы опустим перпендикуляры на стороны двугранного угла из точки, лежащей вне этого угла (черт. 33), т.-е. лежащей в смежном двугранном углу, то угол между этими перпендикулярами будет равен линейному углу двугранного. Таким образом, угол между двумя плоскостями равен углу между нормалями к ним, проведенными из точки, лежащей вне данного двугранного угла.



Черт. 33.

Заметив это, решим в прямоугольных координатах задачу об определении угла между двумя плоскостями. Пусть плоскости даны уравнениями:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \qquad (2)$$

Назовем искомый угол через φ. Опустим перпендикуляр из начала координат на данные плоскости; пусть углы первого с осями будут α, β, γ и второго α', β', γ'; тогда угол между данными плоскостями равен углу между этими перпендикулярами; угол же между этими перпендикулярами, как угол между двумя прямыми, мы можем найти, именно: для косинуса и синуса этого угла мы имеем (стр. 21):

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma', \qquad (3)$$

$$\sin^2\varphi = (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2 + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')^2 + (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2. \qquad (4)$$

Чтобы найти $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, ... , надо уравнения (1) и (2) привести к нормальному виду; тогда коэффициенты при координатах дадут искомые косинусы:

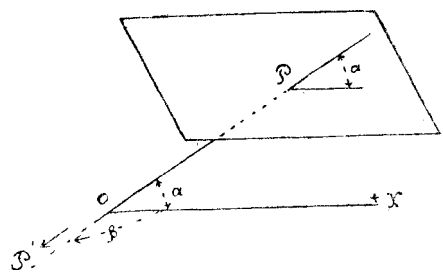
$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\alpha' = \pm\frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$
$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta' = \pm\frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \qquad (5)$$
$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma' = \pm\frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Заметим, что каждый из этих косинусов имеет один какой-нибудь знак: + или —, и знак этот зависит от знака нормирующего множителя. Вставив последние выражения в равенство (3), получим:

$$\cos\varphi = \pm\frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}. \qquad (6)$$

Если мы в нормальном уравнении будем p считать существенно положительной величиной, то этим мы будем определять положительное направление нормали; если же мы оставим у p знак неопределенный, то это будет означать, что мы различаем два направления у нормали. Такая двойственность представляет в пространстве больше выгод, чем на плоскости, так как в пространстве важно

две стороны плоскости—положительную и отрицательную, если p положительно, то мы говорим о той стороне плоскости, котора обращена в сторону, противоположную той, где находится координат, так что в этом случае углом α будет угол XOP (черт. 34); если же p отрицательно, то мы имеем в виду другую сторону плоскости обращена к началу координат, и в этом случае углом α будет угол XOP' между осью X и отрицательным направлением нормали. Так как углы XOP и XOP' дополняют друг друга до 180^0, то косинусы их равны по абсолютной величине и отличаются только знаками, и поэтому в формулах (5) и (6) мы будем иметь два знака. Легко уяснить себе геометрический смысл этой двузначности: наши две плоскости образуют четыре угла попарно смежных; значит, косинус какого-нибудь угла равен косинусу угла смежного, взятому с обратным знаком, так что для двух из этих углов косинус будет положителен, а для двух других углов—отрицателен



Черт 34.

Вставив выражение (5) в формулу (4), найдем:

$$\sin^2\varphi = \frac{(BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)} \qquad (7)$$

Из формул (6) и (7) находим условие перпендикулярности двух плоскостей и условие их параллельности. Если две плоскости перпендикулярны, то угол между ними прямой, и косинус его есть нуль; значит, условие перпендикулярности есть

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Если плоскости параллельны, то синус угла между ними равен нулю, и поэтому числитель в формуле (7) должен быть нулем; но этот числитель представляет сумму квадратов, а сумма квадратов действительных чисел равна нулю только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю, следовательно, условия параллельности плоскостей будут:

$$BC' - CB' = 0, \quad CA' - AC' = 0, \quad AB' - BA' = 0$$

условия могут быть переписаны в виде:

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}, \qquad \frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}, \qquad \frac{C}{C'}=\frac{A}{A'}. \tag{8}$$

Значит, две плоскости параллельны, если коэффициенты при координатах пропорциональны. Легко видеть, что это условие параллельности справедливо не только для прямоугольных осей, но и для косоугольных. В самом деле, чтобы плоскости были параллельны, надо, чтобы перпендикуляр из начала координат был общим для обеих плоскостей, т.-е.:

$$\cos\alpha=\pm\cos\alpha', \qquad \cos\beta=\pm\cos\beta', \qquad \cos\gamma=\pm\cos\gamma',$$

но так как $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ пропорциональны коэффициентам A, B, C и $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ пропорциональны A', B', C', то последние условия будут выполнены, если

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}, \qquad \frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}, \qquad \frac{C}{C'}=\frac{A}{A'},$$

или

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}. \tag{9}$$

Условия (8), вообще, не независимы между собой, так как каждое из них есть следствие двух других.

4. Определение точки пересечения трех плоскостей.

Пусть даны три плоскости:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3&=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Требуется найти точку их пересечения, т.-е. такую точку, координаты которой удовлетворяют всем трем уравнениям. Мы получим координаты этой точки, решая совместно эти три уравнения с тремя неизвестными x, y, z. Обозначим через Δ детерминант

$$\Delta=\begin{matrix} A_1, & B_1, & C_1\\ A_2, & B_2, & C_2\\ A_3, & B_3, & C_3 \end{matrix}$$

Δ_x, Δ_y, Δ_z детерминанты, полученные из детерминанта Δ замене в нем соответствующих столбцов известными членами:

$$\Delta_x = \begin{matrix} D_1, B_1, C_1 \\ D_2, B_2, C_2 \\ D_3, B_3, C_3 \end{matrix} \quad \Delta_y = \begin{matrix} A_1, D_1, C_1 \\ A_2, D_2, C_2 \\ A_3, D_3, C_3 \end{matrix} \quad \Delta_z = \begin{matrix} A_1, B_1, D_1 \\ A_2, B_2, D_2 \\ A_3, B_3, D_3 \end{matrix}$$

Тогда, как известно из теории детерминантов, решение данных уравнений будет следующее:

$$x = -\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = -\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = -\frac{\Delta_z}{\Delta} \tag{2}$$

Полученные решения показывают, что если детерминант Δ не равен нулю, то три плоскости всегда пересекаются в одной точке.

Положим, что знаменатель Δ равен нулю, а числители не нули; это будет значить, что наши три плоскости пересекаются в бесконечности. Две из этих плоскостей пересекаются по некоторой прямой; чтобы три плоскости пересекались в бесконечности, надо, чтобы третья плоскость встречала линию пересечения первых двух в бесконечности, т.-е. была ей параллельна, другими словами, чтобы три плоскости были параллельны одной и той же прямой; такие три плоскости представляют, напр., три грани призмы.

Положим теперь, что знаменатель и все числители обращаются в нули:

$$\Delta = 0, \ \Delta_x = 0, \ \Delta_y = 0, \ \Delta_z = 0. \tag{3}$$

Это будет значить, что наши три плоскости имеют неопределенную точку пересечения, и, следовательно, у них не одна точка пересечения, а бесчисленное множество, т.-е. все три плоскости пересекаются по прямой. В самом деле, мы знаем, что если детерминант обращается в нуль, то элементы одного из его рядов представляют линейные сочетания элементов остальных рядов; поэтому из равенства нулю детерминанта Δ следует:

$$\begin{aligned} A_3 &= \lambda A_1 + \mu A_2, \\ B_3 &= \lambda B_1 + \mu B_2, \\ C_3 &= \lambda C_1 + \mu C_2, \end{aligned} \tag{4}$$

а из равенства нулю детерминанта Δ_x

$$D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2. \tag{5}$$

Тогда остальные два детерминанта Δ_y и Δ_x будут нулями сами собой, ибо на основании написанных формул в них элементы последних строк будут линейными комбинациями элементов первых двух строк. В силу соотношений (4) и (5) уравнение третьей плоскости примет вид:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{6}$$

Легко видеть, что эта третья плоскость принадлежит пучку, определяемому первыми двумя плоскостями, так как, полагая $\frac{\mu}{\lambda} = k$, это уравнение мы можем представить в виде:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{6'}$$

а это есть уравнение пучка плоскостей, определяемого первыми двумя плоскостями. Это можно видеть и непосредственно, потому что всякий раз, когда удовлетворяются уравнения первых двух плоскостей удовлетворяется и уравнение (6).

Мы нашли, что для того, чтобы три плоскости проходили через одну прямую, надо, чтобы удовлетворялись четыре условия, именно— чтобы четыре детерминанта Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z обращались в нуль. Но для обращения в нуль детерминанта Δ надо, чтобы удовлетворялись соотношения (4); чтобы, кроме того, Δ_z обращался в нуль, надо, чтобы удовлетворялось соотношение (5); но, как было замечено выше, тогда остальные два условия $\Delta_y = 0$ и $\Delta_z = 0$ будут удовлетворены сами собой. Таким образом, из четырех условий (3) независимы, вообще, только два, остальные же два суть следствия двух первых.

Три плоскости могут пересекаться не только по прямой, но и по целой плоскости, т.-е. могут сливаться между собою, и тогда точки пересечения тоже будут неопределенными. В этом случае все три уравнения представляют, очевидно, одну и ту же плоскость; чтобы первые два уравнения представляли одну и ту же плоскость, необходимо, чтобы коэффициенты этих уравнений были пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \tag{7}$$

Чтобы, кроме того, 1-е и 3-е уравнения изображали одну и ту же плоскость, надо, чтобы

$$\frac{A_1}{A_3}=\frac{B_1}{B_3}=\frac{C_1}{C_3}=\frac{D_1}{D_3} \tag{8}$$

Наконец, чтобы 2-е и 3-е уравнения изображали одну плоскость, надо, чтобы

$$\frac{A_2}{A_3}=\frac{B_2}{B_3}=\frac{C_2}{C_3}=\frac{D_2}{D_3}. \tag{9}$$

Таким образом, три плоскости сливаются между собой, если удовлетворяются девять условий (7), (8) и (9). Но из этих девяти условий независимы только шесть, потому что условия (9) могут быть получены от деления условий (7) на (8), и, следовательно, требование, чтобы три плоскости сливались между собой, соответствует шести условиям.

5. Уравнение плоскости, проходящей через данные точки.

Возьмем общее уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

Уравнение это имеет четыре коэффициента; так как вид уравнения определяется не его коэффициентами, а отношениями между ними, а таких отношений в нашем случае будет три, то плоскость определяется тремя условиями. Пусть плоскость проходит через точку (x_1, y_1, z_1); в таком случае координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (1), и поэтому должно иметь место тождество:

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \tag{2}$$

Вычитая его из уравнения (1), получим:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{3}$$

Вот общее уравнение плоскости, проходящей через данную точку. Отсюда, между прочим, получается уравнение плоскости, проходящей через данную точку по данному направлению. Направление

плоскости определяется направлением нормали к этой плоскости, проведенной из какой-нибудь точки; поэтому дать направление плоскости значит дать направление нормали этой плоскости; значит, у нас углы α, β, γ нормали, проведенной к плоскости из начала координат, известны, и так как косинусы этих углов пропорциональны коэффициентам уравнения плоскости, то искомое уравнение напишется в виде:

$$\cos\alpha\,(x - x_1) + \cos\beta\,(y - y_1) + \cos\gamma\,(z - z_1) = 0 \qquad (4)$$

Посмотрим, как провести плоскость через три данные точки. Пусть даны точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3); так как плоскость должна проходить через эти три точки, то координаты этих точек должны удовлетворять уравнению плоскости (1), и поэтому должны иметь место следующие тождества:

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Пусть x, y, z есть одна из точек нашей плоскости; тогда

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Исключив из этих четырех однородных уравнений четыре неизвестные коэффициента A, B, C, D, получим:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Это и есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Действительно, это — уравнение 1-й степени и, следовательно, изображает плоскость; далее, координаты всех данных точек удовлетворяют этому уравнению, потому что, вставив в него на место текущих координат координаты любой данной точки, получим детерминант с двумя равными строками, а такой детерминант тождественно равен нулю.

Отсюда, между прочим, получается условие, при котором четыре данные точки лежат в одной плоскости. Пусть, кроме прежних трех

точек, дана четвертая (x_4, y_4, z_4). Если эта точка лежит в плоскости, проходящей через первые три точки, то координаты ее должны удовлетворять уравнению (6), а следовательно, искомое условие напишется в виде

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Заметим, что уравнение (6) может иногда обращаться в тождество. Это будет всякий раз, когда три данные точки лежат на одной прямой. Тогда через эти точки проходит не одна плоскость, а бесчисленное множество. В этом случае все коэффициенты уравнения (6) будут нулями, так что уравнение обратится в тождество.

6. Расстояние точки от плоскости.

Пусть дана плоскость и точка M (x', y', z') относительно каких-нибудь осей координат. Найдем расстояние этой точки от плоскости. Пусть уравнение плоскости дано в нормальном виде:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (1)$$

Проведем через M плоскость параллельно данной и опустим на обе плоскости перпендикуляры из начала координат; так как обе плоскости параллельны, то перпендикуляры на ту и на другую плоскость будут иметь одинаковое направление. Если назовем длину перпендикуляра от начала координат до второй плоскости через p', то уравнение второй плоскости будет:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p' = 0 \qquad (2)$$

Ясно, что искомое расстояние δ точки M от данной плоскости будет:

$$\delta = p' - p, \qquad (3)$$

так что для определения δ надо найти величину p'. Так как новая плоскость проходит через точку (x', y', z'), то мы должны иметь:

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p' = 0$$

Отсюда:

$$p' = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma. \tag{5}$$

Вставляя это в выражение (3), имеем:

$$\delta = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma - p. \tag{6}$$

Отсюда вывод совершенно такой же, как и на плоскости: если уравнение плоскости дано в нормальном виде, то расстояние точки от этой плоскости получим, вставив в первую часть уравнения плоскости вместо текущих координат координаты данной точки.

Пусть уравнение плоскости дано в общем виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{7}$$

Чтобы найти расстояние точки (x', y', z') от этой плоскости, надо первую часть этого уравнения привести к нормальному виду и вставить после этого в первую часть уравнения координаты x', y', z'. Таким образом получим:

$$\delta = \mp \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{8}$$

7. Задачи.

1. Провести через данную точку плоскость, параллельную другой данной плоскости.

Пусть дана плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

и точка (x', y', z'); требуется через эту точку провести плоскость параллельно данной плоскости. Если две плоскости параллельны, то коэффициенты при координатах в уравнениях этих плоскостей пропорциональны, и так как мы всегда можем множить и делить уравнение на постоянное число, то можем предполагать, что в искомом уравнении коэффициенты при координатах те же, что и в данном, так что вся разница между данным и искомым уравнением будет заключаться в известном члене. Таким образом, новое уравнение, наверное, может быть приведено к виду:

$$Ax + By + Cz + D' = 0. \tag{2}$$

Координаты x', y', z' должны удовлетворять этому уравнению; значит,

$$Ax' + By' + Cz' + D' = 0 \qquad (3)$$

На основании этого условия мы можем исключить коэффициент D' в уравнении (2), и тогда получим искомое уравнение в виде

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0 \qquad (4)$$

II. Через две данные точки провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости.

Задачу эту мы решим только в прямоугольных координатах Пусть уравнение данной плоскости будет:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (5)$$

и пусть координаты двух данных точек суть x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. Напишем уравнение искомой плоскости:

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \qquad (6)$$

точка (x, y, z) есть одна из точек этой плоскости; тогда координаты ее должны удовлетворять последнему уравнению. Далее, так как точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) должны лежать в нашей плоскости, то должны существовать условия:

$$\begin{aligned} A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D' &= 0, \\ A'x_2 + B'y_2 + C'z_2 + D' &= 0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Наконец, условие перпендикулярности между данной плоскостью и искомой в прямоугольных координатах напишется так (стр. 53):

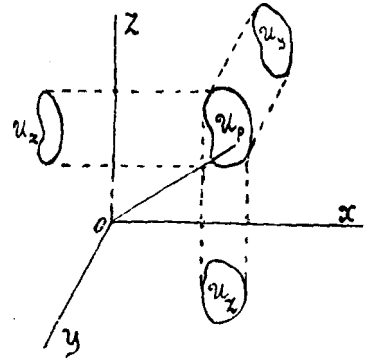
$$AA' + BB' + CC' = 0. \qquad (8)$$

Получим таким образом 4 однородных уравнения с 4-мя неизвестными A', B', C', D'; чтобы уравнения эти были совместимы, детерминант системы должен быть нулем, и мы получим искомое уравнение в виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

8. Определение объема тетраэдра по координатам его вершин.

Задачу эту мы решим только в прямоугольных координатах. Предварительно мы выведем теорему, дающую зависимость между площадью плоской фигуры и площадями ее проекций на три плоскости прямоугольных координат. Возьмем прямоугольные оси координат и рассмотрим в пространстве некоторую плоскую фигуру (черт. 35). Опустим на эту фигуру из начала координат перпендикуляр OP, углы которого с осями обозначим через α, β, γ; обозначим площадь нашей фигуры через U и построим ее проекции на три плоскости координат YZ, ZX, XY; площади этих проекций обозначим соответственно через U_x, U_y, U_z. Тогда площадь проекции на плоскость YZ равна площади U, умноженной на косинус угла между этими площадями (см. выше стр. 15); но угол между этими площадями измеряется углом между нормалями к ним, т. е. между осью X и перпендикуляром OP; поэтому



Черт. 35.

$$U_x = U\cos\alpha.$$

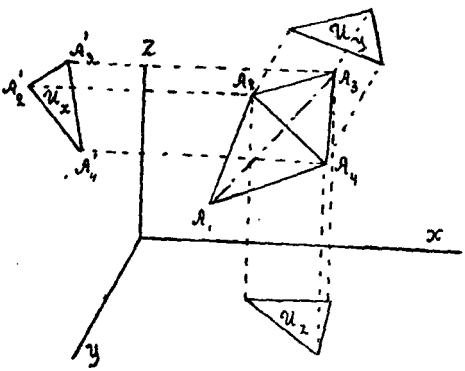
Точно так же найдем:

$$U_y = U\cos\beta, \quad U_z = U\cos\gamma.$$

Возведем эти равенства в квадрат и сложим; тогда, заметив, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, получим:

$$U^2_x + U^2_y + U^2_z = U^2. \quad (1)$$

Таким образом, квадрат площади плоской фигуры равен сумме квадратов площадей ее проекций на три взаимно перпендикулярные плоскости.



Черт. 36.

Обратимся теперь к нашей задаче. Пусть даны прямоугольные оси координат и относительно их четыре вершины тетраэдра A_1, A_2, A_3, A_4 (черт. 36). Координаты их назовем соответственно через (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4). Как известно, объем тетраэдра равен $^1/_3$ произведения площади его основания на высоту; следовательно, если объем нашего тетраэдра обозначим через V, высоту через h и площадь основания через U, то

$$V = \frac{1}{3} Uh. \tag{2}$$

Таким образом, вопрос сводится к вычислению площади U и высоты h. Если проекции основания на три плоскости координат YZ, ZX, XY обозначим соответственно через U_x, U_y, U_z, то, по доказанному, будем иметь:

$$U = \sqrt{U^2_x + U^2_y + U^2_z}. \tag{3}$$

Построим проекцию основания на плоскость YZ; проекция эта будет треугольник, вершины которого обозначим через A'_2, A'_3, A'_4. Найдем координаты этих вершин. Координата x для всех вершин будет, очевидно, равна нулю, так как вершины эти лежат в плоскости YZ, координаты же y и z будут для этих вершин такие же, как и для вершин A_2, A_3, A_4, потому что линии A_2A_2', A_3A_3', A_4A_4' параллельны плоскостям ZX и XY и поэтому расстояния точек A_2', A_3', A_4' от плоскостей ZX и XY равны расстояниям от тех же плоскостей точек A_2, A_3, A_4. Таким образом, координаты точек A_2', A_3', A_4' будут:

	x	y	z
A_2'	0	y_2	z_2
A_3'	0	y_3	z_3
A_4'	0	y_4	z_4

и потому площадь треугольника $A_2'A_3'A_4'$, как известно из геометрии на плоскости, выразится так:

$$U_x = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Точно так же, построив проекцию основания на плоскость ZX убедимся, что для всех вершин этой проекции координата y будет нуль, а координаты x и z будут такие же, как и для вершин основания; поэтому площадь этой проекции будет

$$U_y = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{5}$$

Наконец, площадь проекции основания на плоскость XY будет:

$$U_z = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

Найдем теперь высоту тетраэдра; так как эта высота представляет расстояние вершины A_1 от основания, то, чтобы найти ее, надо, как известно, привести уравнение плоскости основания к нормальному виду и вставить в него координаты вершины A_1. Уравнение плоскости основания, как плоскости, проходящей через три данные точки A_2, A_3, A_4, напишется в виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Чтобы привести это уравнение к нормальному виду, надо разделить его на корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при x, y, z; чтобы найти эти коэффициенты, разложим детерминант, находящийся в левой части уравнения (7), по элементам первой строки:

$$x\begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

(Минор при y должен быть взят с знаком —; но, переменив в нем места первых двух столбцов, мы берем его с знаком +). Сравнивая коэффициенты при координатах этого уравнения с выражениями (4), (5), (6), замечаем, что эти коэффициенты суть $2U_x$, $2U_y$, $2U_z$

Чтобы получить теперь выражение высоты тетраэдра, мы должны разделить первую часть уравнения (7) на сумму квадратов найденных коэффициентов и вставить вместо текущих координат координаты вершины A_1; таким образом получим:

$$h = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}}{2\sqrt{U_{2x} + U_{2y} + U_2}} \tag{9}$$

Вставив в равенство (2) вместо U и h найденные выражения (3) и (9), получим искомое выражение объема тетраэдра:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{10}$$

ГЛАВА IV.

Прямая линия.

1. Уравнения прямой.

Мы знаем, что в пространстве прямая линия определяется пересечением двух плоскостей: значит, в пространстве прямая линия изображается совокупностью двух уравнений 1-й степени:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Для краткости мы будем изображать эти уравнения через

$$U = 0, \qquad U' = 0. \qquad (2)$$

Та же прямая, как мы уже видели (стр. 42), может представляться не только этими уравнениями, но и бесчисленным множеством других пар уравнений; именно, всякая пара плоскостей пучка

$$U - kU' = 0 \qquad (3)$$

представляет ту же прямую. Так как у нас есть такой произвол в выборе уравнений прямой линии, то мы можем воспользоваться им для того, чтобы представить уравнения прямой в наиболее простом виде. Простоты этой мы можем достигнуть, составив такие уравнения, в одно из которых не входила бы одна из координат, например y, а в другое не входила бы другая координата, например, x. Для этого первое из уравнений (1) умножим на B', второе на B и вычтем одно из другого; тогда y исключится, и у нас получится

уравнение, содержащее только x, z; если решим это уравнение относительно x, то у нас получится уравнение вида:

$$x = mz + a.$$

Умножаем теперь первое уравнение на A', а второе на A и вычитаем; тогда получится уравнение вида

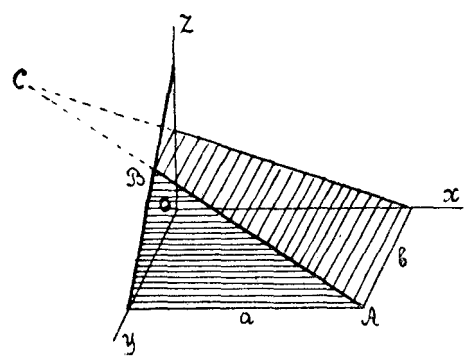
$$y = nz + b.$$

На основании сказанного выше, уравнения:

$$\begin{aligned} x &= mz + a, \\ y &= nz + b \end{aligned} \qquad (4)$$

представляют ту же прямую, что и первоначальные уравнения.

Посмотрим, какой геометрический смысл имеют эти уравнения Возьмем оси координат и нашу прямую AB (черт. 37); пусть она пересекает плоскости: XY в точке A, YZ — в точке B и ZX — в точке C (на чертеже точка C находится по левую сторону плоскости YZ). Так как уравнение 1-й плоскости не содержит координаты y, то она параллельна оси Y; уравнение 2-й плоскости не содержит координаты x; значит, эта плоскость параллельна оси X. Пусть оси координат будут прямоугольны; тогда, очевидно, первая плоскость будет перпендикулярна к плоскости ZX, а вторая — к плоскости YZ. Так как первая плоскость проходит через нашу прямую и перпендикулярна к плоскости ZX, то мы можем сказать, что эта плоскость есть плоскость, проектирующая нашу прямую на плоскость ZX; вторая же плоскость есть плоскость, проектирующая нашу прямую на плоскость YZ, потому что эта плоскость проходит через нашу прямую и перпендикулярна к плоскости YZ. Присоединим теперь к первому из уравнений (4) уравнение $y = 0$, т.-е. будем рассматривать



Черт. 37.

это уравнение не в пространстве, а на плоскости ZX; так как оно представляет первую проектирующую плоскость, а уравнение $y = 0$ плоскость ZX, то первое из уравнений (4), рассматриваемое на плоскости ZX, представляет проекцию прямой ABC на плоскость ZX. Второе из уравнений (4) с присоединением к нему уравнения $x = 0$, т.-е. рассматриваемое не в пространстве, а на плоскости YZ, представит проекцию той же прямой на плоскость YZ. Таким образом, представляя уравнения прямой в виде (4), мы определяем эту прямую двумя ее проекциями на плоскости ZX и YZ совершенно так же, как и в начертательной геометрии.

Посмотрим, какое геометрическое значение имеют коэффициенты m, n, a, b. Полагая в уравнениях (4) $z = 0$, находим:

$$x = a, \qquad y = b.$$

Таким образом, a и b суть координаты точки пересечения нашей прямой с плоскостью XY, координаты так называемого следа A нашей прямой на плоскости XY. Далее, если будем рассматривать уравнения (4) не в пространстве, а в плоскостях ZX, YZ, то m и n будут угловые коэффициенты проекции нашей прямой на плоскости ZX и YZ; значит, m и n зависят от направления этих проекций, а следовательно, от направления проектирующих плоскостей; но если прямые в пространстве параллельны между собой, то и проекции их параллельны; значит, коэффициенты при координатах в уравнениях (4) зависят только от направления прямой в пространстве.

Уравнения прямой в виде (4) представляют то неудобство, что в них нет симметрии: уравнения эти решены относительно x и y; z является в них независимым переменным, а x и y — его функциями; поэтому желательно иметь такой вид уравнений, в которых это неудобство было бы устранено. Посмотрим, как это можно сделать.

Пусть относительно каких-нибудь осей координат даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, через которые надо провести прямую (черт. 38). Пусть точка $M(x, y, z)$ — одна из точек этой прямой. Проведем через эти точки плоскости параллельно плоскости YZ; они пересекут ось X в точках A_1, A, A_2, тогда:

$$OA_1 = x_1, \; OA = x, \; OA_2 = x_2.$$

Мы можем написать такую пропорцию:

$$\frac{M_1M}{M_2M_1} = \frac{A_1A}{A_2A_1};$$

но

$$\frac{A_1A}{A_2A_1} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2},$$

следовательно:

$$\frac{M_1M}{M_2M_1} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}.$$

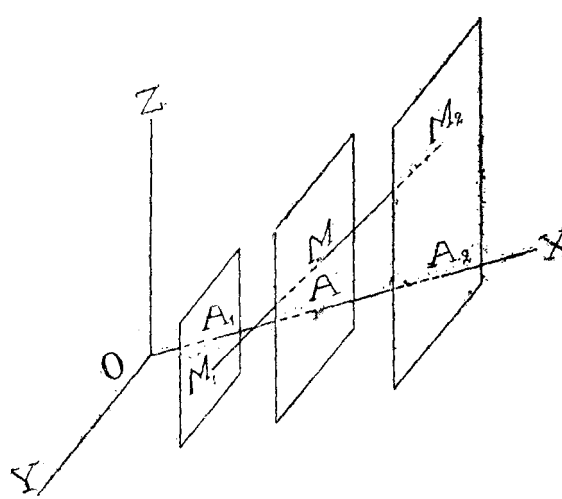
Если проведем плоскости, параллельные плоскостям ZX и XY, то найдем:

$$\frac{M_1M}{M_2M_1} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}, \qquad \frac{M_1M}{M_2M_1} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2},$$

следовательно,

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}. \qquad (5)$$

Таким образом, координаты какой-нибудь точки нашей прямой удовлетворяют трем уравнениям (5), которые равносильны двум, и, значит, мы получили два уравнения, представляющие прямую, проходящую через две данные точки. Легко видеть, что эти два уравнения действительно представляют прямую, проходящую через данные точки; в самом деле, они 1-й степени; значит, каждое из них представляет плоскость, и, следовательно, в совокупности они представляют прямую; что пря-



Черт. 38.

мая эта проходит через данные точки, видно из того, что, положив $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ или $x = x_2$, $y = y_2$, $z = z_2$, мы уравнения обратим в тождества. Обозначив для краткости разности в знаменателе через m, n, p и положив $x_1 = a$, $y_1 = b$, $z_1 = c$, мы можем переписать предыдущие уравнения в виде

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \tag{6}$$

Так как решенная нами задача вполне общая, потому что всякая прямая проходит через две точки, то эти уравнения и представляют общие уравнения прямой линии. В этих уравнениях роли всех трех координат x, y, z совершенно одинаковы.

Важно заметить, что в этой форме уравнений прямой заключается прежняя форма (4), как частный случай. Если мы положим в уравнениях (6) $c = 0$ и $p = 1$, то получим:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = z \quad \text{или} \quad \frac{x-a}{m} = z, \quad \frac{y-b}{n} = z,$$

т.-е. получим прежние уравнения (4), так что прежний вид уравнений прямой заключается в новом, как частный, именно при $c = 0$, $p = 1$.

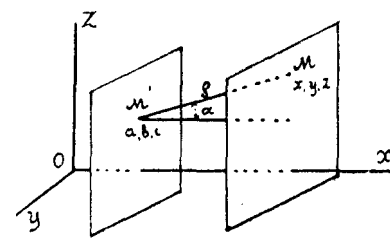
Посмотрим, какое геометрическое значение имеют коэффициенты a, b, c и m, n, p. Легко видеть, что коэффициенты a, b, c суть координаты одной из точек нашей прямой, потому что если положим $x = a$, $y = b$, $z = c$, то уравнения прямой будут удовлетворены. Что касается коэффициентов m, n, p, то они своими отношениями определяют направления прямой. В самом деле, если мы решим уравнения (6) относительно x и y, то получим:

$$\begin{aligned} x &= \frac{m}{p} z + \left(a - \frac{m}{p} c\right) \\ y &= \frac{n}{p} z + \left(b - \frac{n}{p} c\right) \end{aligned} \tag{6'}$$

Мы видим, что отношения $\frac{m}{p}$ и $\frac{n}{p}$ суть те самые количества, которые в уравнениях (4) обозначены через m и n; значит, эти отношения определяют направление прямой, так что коэффициенты

m, n, p могут быть названы угловыми коэффициентами прямой. Таким образом, уравнения (6) решают такую задачу: провести через данную точку прямую по данному направлению.

Особенно замечательное значение имеют коэффициенты m, n, p в случае прямоугольных координат. Пусть нам даны уравнения прямой (6) в прямоугольных координатах. Пусть M' (черт. 39) будет точка (a, b, c), а M — одна из точек (x, y, z) нашей прямой. Пусть прямая образует с осями углы α, β, γ. Обозначим расстояние $M'M$ через ϱ. Так как проекция отрезка на какую-нибудь ось координат равна разности соответствующих координат концов этого отрезка, то



Черт. 39.

$$\varrho\cos\alpha = x - a, \quad \varrho\cos\beta = y - b, \quad \varrho\cos\gamma = z - c.$$

Отсюда:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \varrho, \quad \frac{y-b}{\cos\beta} = \varrho, \quad \frac{z-c}{\cos\gamma} = \varrho,$$

и следовательно,

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma} \tag{7}$$

Таким образом, в случае прямоугольной системы координат мы можем написать уравнения прямой так, что делителями будут косинусы углов этой прямой с осями координат; кроме того, отношения, входящие в уравнения прямой, в этом случае имеют простой геометрический смысл, с которым нам часто придется иметь дело: эти отношения равны расстоянию ϱ точки (a, b, c) от точки (x, y, z).

Чтобы из уравнений вида (7) получить уравнения (6), надо, очевидно, умножить $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ на произвольный множитель k, и тогда получим m, n, p, ибо мы видели, что отношения между коэффициентами m, n, p определяют направление прямой; таким образом,

$$m = k\cos\alpha, \quad n = k\cos\beta, \quad p = k\cos\gamma.$$

Отсюда, по данным m, n, p мы можем найти косинусы углов прямой с осями координат. В самом деле, возведя последние равенства в квадрат и сложив, получим:

$$m^2 + n^2 + p^2 = k^2,$$

откуда:

$$k = \pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2},$$

следовательно:

$$\cos\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \tag{8}$$

Выбор знака + или — зависит от того, какое направление на прямой мы считаем положительным и какое отрицательным.

2. Задачи.

I. Провести прямую через две данные точки.

Пусть даны точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Требуется составить уравнения прямой, проходящей через эти две точки. Очевидно, что одну из этих точек мы можем принять за (a, b, c), так как (a, b, c) представляет любую точку, принадлежащую прямой; получим:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \tag{1}$$

Эта прямая проходит через одну из данных точек (x_1, y_1, z_1), так как, вставляя в (1) вместо текущих ее координаты, получим тождество. Но наша прямая должна проходить через другую точку (x_2, y_2, z_2). Вставляя в (1) вместо текущих координат ее координаты, получим:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p} \tag{2}$$

Отсюда определяются отношения величин m, n, p. Для исключения этих отношений из уравнений (1) уравнения прямой (1) разделим на соотношения (2); тогда мы получим окончательно:

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2}. \tag{3}$$

Легко убедиться, что прямая, выражаемая уравнениями (3), действительно проходит через данные точки: вставляя вместо текущих координат координаты одной или другой точки, в обоих случаях получим тождества.

II. Найти пересечение прямой линии с плоскостью.

Пусть нам дана прямая

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{4}$$

и плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{5}$$

Найти точку пересечения прямой с плоскостью в аналитической геометрии значит найти координаты этой точки пересечения прямой с плоскостью. Здесь мы имеем три уравнения с тремя неизвестными; исключив два каких-нибудь, мы нашли бы третье. Но так как все неизвестные равноправны, и при исключении мы нарушили бы симметрию, то поступим следующим образом. Введем новое неизвестное, обозначив отношения в уравнениях (4) через ϱ; тогда старые неизвестные выразятся через новое так:

$$\begin{aligned} x&=m\varrho+a,\\ y&=n\varrho+b,\\ z&=p\varrho+c. \end{aligned} \tag{6}$$

Вставим величины (6) в уравнение плоскости и соберем члены с ϱ и свободные от ϱ:

$$(Am+Bn+Cp)\varrho+(Aa+Bb+Cc+D)=0,$$

откуда:

$$\varrho=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp} \tag{7}$$

После того как ϱ найдено, сейчас же найдутся из ур-ий (6) три координаты точки пересечения прямой и плоскости, именно:

$$x = -\frac{Aa + Bb + Cc + D}{Am + Bn + Cp} m + a,$$

$$y = -\frac{Aa + Bb + Cc + D}{Am + Bn + Cp} n + b,$$

$$z = -\frac{Aa + Bb + Cc + D}{Am + Bn + Cp} p + c.$$

Теперь приступим к исследованию задачи. Спросим себя, что будет, если знаменатель формулы (7) окажется равным нулю, т.-е.

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (8)$$

Тогда ϱ будет бесконечно велико, а вместе с ϱ и координаты точки пересечения. Следовательно, точка пересечения прямой и плоскости бесконечно далека; а это значит, что прямая и плоскость параллельны. Таким образом, соотношение (8) есть условие параллельности плоскости и прямой. Это условие похоже на условие перпендикулярности двух плоскостей в случае прямоугольных координат (стр. 53)

Посмотрим, что значит, если числитель равен нулю, т.-е.

$$Aa + Bb + Cc + D = 0 \qquad (9)$$

Тогда, очевидно,

$$\varrho = 0$$

Следовательно,

$$x = a,\ y = b,\ z = c$$

Это значит, что искомая точка пересечения есть точка (a, b, c); это прямо видно по смыслу уравнения (9), так как это уравнение показывает, что точка (a, b, c), через которую проходит прямая (4), лежит в плоскости (5). Спросим себя, что будет, если оба соотношения (8) и (9) удовлетворяются одновременно, т.-е. числитель и знаменатель выражения (7) равны нулю. Выражение для ϱ становится неопределенным, а также становятся неопределенными x, y, z. Это значит, что любая точка прямой служит точкой пересечения прямой и плоскости. Это может быть только тогда, когда прямая всеми своими точками лежит в плоскости. Итак, система двух равенств (8) и (9) есть условие того, чтобы прямая лежала в плоскости всеми своими точками.

Теперь переходим к исследованию угловых соотношений между прямыми и плоскостями. Задачи эти будем решать исключительно в прямоугольных координатах.

III. Найти угол между двумя прямыми в пространстве.

Пусть прямые даны уравнениями:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}, \tag{10}$$

$$\frac{x-a'}{\cos\alpha'}=\frac{y-b'}{\cos\beta'}=\frac{z-c'}{\cos\gamma'}. \tag{11}$$

Мы предположили, что оси прямоугольны. Поэтому, как мы знаем, в предыдущих уравнениях α, β, γ и α', β', γ' суть углы прямых с осями координат. В этом случае угол между прямыми определяется из формулы (стр. 21):

$$\cos\varphi=\cos\alpha\ \cos\alpha'+\cos\beta\ \cos\beta'+\cos\gamma\ \cos\gamma' \tag{12}$$

Положим теперь, что прямые даны уравнениями в общем виде:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},\quad \frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'} \tag{13}$$

Тогда, как мы знаем,

$$\cos\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\quad \cos\alpha'=\pm\frac{m'}{\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}},$$

$$\cos\beta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\quad \cos\beta'=\pm\frac{n'}{\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}},$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\quad \cos\gamma'=\pm\frac{p'}{\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}}.$$

Вставляя эти значения в формулу (12), находим:

$$\cos\varphi=\pm\frac{mm'+nn'+pp'}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\ \sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}}$$

Вот формула, определяющая косинусы угла между двумя прямыми, выраженными уравнениями общего вида в прямоугольных координатах.

Условие перпендикулярности двух прямых, выраженных общими уравнениями, будет:

$$mm' + nn' + pp' = 0 \tag{14}$$

Мы знаем, что m, n, p и m', n', p' суть угловые коэффициенты, определяющие направление прямых. Значит, если прямые параллельны, то условия параллельности выразятся так:

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'}, \tag{15}$$

и они заключаются в пропорциональности угловых коэффициентов. Условия (15) справедливы и для косоугольных координат; в самом деле, направление прямой зависит только от отношений между коэффициентами m, n, p; значит, если две прямые параллельны, т.-е. направления их одинаковы, то и отношения между коэффициентами m, n, p в уравнениях одной прямой и соответствующими коэффициентами в уравнениях другой прямой должны быть равны между собой. Найдем также выражение синуса угла между двумя прямыми:

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = \frac{(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2) - (mm'+nn'+pp')^2}{(m^2+n^2+p^2)\ (m'^2+n'^2+p'^2)} \tag{16}$$

То выражение, которое стоит в числителе (16) и подобное которому мы уже встречали (стр. 23), после известного ряда преобразований принимает вид:

$$\sin^2\varphi = \frac{(np'-pn')^2 + (pm'-mp')^2 + (mn'-nm')^2}{(m^2+n^2+p^2)\ (m'^2+n'^2+p'^2)} \tag{17}$$

В частности, если угловые коэффициенты суть косинусы углов прямых линий с осями, то формула (17) примет такой вид:

$$\sin^2\varphi = (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2 + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')^2 + \\ + (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2 \tag{18}$$

Знаменатель будет равен 1, так как сумма квадратов косинусов равна единице.

Отсюда вытекает решение двух следующих задач

IV. Найти угловые коэффициенты прямой, перпендикулярной к двум данным прямым.

Пусть данные прямые представлены следующими уравнениями в нормальном виде:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}, \tag{10}$$

$$\frac{x-a'}{\cos\alpha'}=\frac{y-b'}{\cos\beta'}=\frac{z-c'}{\cos\gamma'}. \tag{11}$$

Пусть третья прямая, перпендикулярная к первым двум, имеет угловые коэффициенты m, n, p. Тогда имеют место следующие равенства:

$$m\cos\alpha+n\cos\beta+p\cos\gamma=0, \tag{19}$$

$$m\cos\alpha'+n\cos\beta'+p\cos\gamma'=0. \tag{20}$$

Мы видим, что величины m, n, p связаны двумя однородными уравнениями; но мы знаем, что если три неизвестные связаны двумя однородными уравнениями, то хотя самых неизвестных определить не можем, но можем найти их отношения. Именно, неизвестные относятся, как миноры, соответствующие коэффициентам какого-нибудь уравнения. Поэтому имеем:

$$m:n:p=(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta'):(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma'):$$
$$:(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'). \tag{21}$$

Пусть теперь эта новая прямая образует с осями координат углы α'', β'', γ''. Посмотрим, как они выразятся. Косинус этой прямой с осью X выразится так:

$$\cos\alpha''=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{22}$$

Вставив в эту формулу вместо m, n, p величины им пропорциональные из равенства (21) и сравнивая с формулой (18), мы замечаем (стр. 22), что подкоренная величина есть квадрат синуса угла между двумя прямыми. Поэтому имеем:

$$\cos\alpha''=\frac{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta'}{\sin\varphi} \tag{23}$$

Таким же образом найдем:

$$\cos\beta'' = \frac{\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'}{\sin\varphi}, \tag{24}$$

$$\cos\gamma'' = \frac{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}{\sin\varphi}. \tag{25}$$

Эти формулы определяют углы, которые образует с осями координат прямая, перпендикулярная к двум данным прямым.

V. Найти условие, при котором три данные прямые перпендикулярны к одной и той же четвертой.

Пусть угловые коэффициенты первых трех прямых будут:

$$m,\ n,\ p;\quad m',\ n',\ p';\quad m'',\ n'',\ p''.$$

Пусть эти три прямые перпендикулярны к четвертой, угловые коэффициенты которой обозначим через M, N, P. Напишем условия перпендикулярности:

$$\begin{aligned} Mm + Nn + Pp &= 0,\\ Mm' + Nn' + Pp' &= 0,\\ Mm'' + Nn'' + Pp'' &= 0. \end{aligned}$$

Неизвестные величины M, N и P связаны тремя однородными уравнениями; но, как мы знаем, чтобы три однородные уравнения с тремя неизвестными были совместимы, необходимо, чтобы детерминант системы был равен нулю; следовательно,

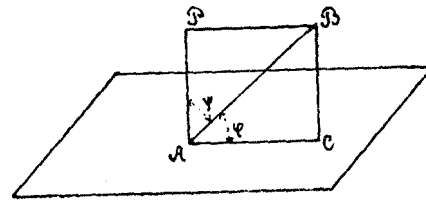
$$\begin{vmatrix} m, & n, & p\\ m', & n', & p'\\ m'', & n'', & p'' \end{vmatrix} = 0.$$

Вот условие, при котором три прямые в прямоугольных координатах имеют общий перпендикуляр.

3. Угол между прямою и плоскостью.

Пусть у нас дана плоскость и какая-нибудь прямая, которая пересекает плоскость в некоторой точке A (черт. 40). Тогда под углом между прямой и плоскостью понимается угол между прямой и ее ортогональной проекцией на рассматриваемую плоскость. Угол φ

между прямой AB и ее проекцией AC и будет углом прямой с плоскостью. Восставим в точке A перпендикуляр к плоскости, т. е. проведем так называемую нормаль к плоскости. Тогда этот перпендикуляр AP и проектирующая прямая BC, будучи перпендикулярны к одной плоскости, параллельны между собою и, следовательно, лежат в одной плоскости; а так как AB пересекается с AP и BC, то все три прямые лежат в одной плоскости, и, следовательно, фигура $APBC$ плоская. Следовательно, искомый угол φ дополняет до прямого угла угол, который данная прямая образует с нормалью к данной плоскости и который мы обозначим через ψ. Найдя этот угол, мы найдем угол между прямой и плоскостью, так как



Черт. 40.

$$\sin\varphi = \cos\psi, \quad \cos\varphi = \sin\psi$$

уравнения данной прямой будут:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}, \tag{1}$$

уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{2}$$

Обозначим углы, которые прямая образует с осями, через α, β, γ; а углы нормали к плоскости с осями через α', β', γ'. Тогда имеем:

$$\cos\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Для того, чтобы определить косинусы углов нормали, нужно уравнение плоскости (2) привести к нормальному виду:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$$

Тогда:

$$\cos\alpha' = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta' = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma' = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Косинус угла между двумя прямыми выразится так:

$$\cos\psi = \sin\varphi = \pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{3}$$

Таким образом, мы определили угол между прямою и плоскостью. Но, тогда как, определяя угол между двумя плоскостями или двумя прямыми, мы получили выражение для косинуса искомого угла (стр. 52, 75), здесь мы получаем выражение для синуса. Причина такого различия состоит в том, что, определяя угол между прямою и плоскостью, мы вместо этого определяем угол между прямою и нормалью к плоскости. Из формулы (3) легко получить условие параллельности прямой и плоскости. Чтобы прямая была параллельна плоскости, необходимо, чтобы синус угла между прямой и плоскостью был нулем.

$$Am+Bn+Cp=0 \tag{4}$$

есть условие параллельности прямой и плоскости; то же самое условие мы получили и раньше (стр. 74), когда решали вопрос о пересечении прямой с плоскостью. Когда прямая перпендикулярна к плоскости, то она параллельна нормали к плоскости; следовательно, угловые коэффициенты должны быть пропорциональны:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \tag{5}$$

Отсюда вытекает решение двух следующих задач:

Задача 1. Из данной точки опустить перпендикуляр на данную плоскость.

Пусть дана точка (x', y', z') и плоскость:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Требуется через эту точку провести прямую, которая была бы перпендикулярна к данной плоскости. Обозначим угловые коэффициенты этой прямой через m, n, p. Так как прямая проходит через точку (x', y', z'), то ее уравнения представятся в виде:

$$\frac{x-x'}{m}=\frac{y-y'}{n}=\frac{z-z'}{p}$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \tag{5}$$

показывает, что угловые коэффициенты искомой прямой пропорциональны соответствующим коэффициентам данной плоскости. Так как направление прямой зависит не от самих угловых коэффициентов, а от их отношений, то мы можем положить угловые коэффициенты уравнений прямой равными угловым коэффициентам плоскости. Тогда уравнения прямой будут:

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C} \tag{6}$$

Задача 2. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

Пусть дана точка (x', y', z') и прямая:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}. \tag{1}$$

Требуется через эту точку провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, выразится так:

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0. \tag{7}$$

Так как плоскость и прямая должны быть перпендикулярны между собой, то угловые коэффициенты в уравнениях прямой и плоскости пропорциональны, и, по предыдущему, мы можем положить их равными. Тогда уравнение плоскости примет вид:

$$m(x-x')+n(y-y')+p(z-z')=0. \tag{8}$$

4. Условие пересечения двух прямых в пространстве.

Вообще, две прямые в пространстве находятся в косом положении, т.-е. не имеют общей точки и не лежат в одной плоскости. Выведем условия, при которых две прямые, данные своими уравнениями, пересекаются и, следовательно, лежат в одной плоскости.

Пусть первая из наших прямых представляется уравнениями:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}, \tag{1}$$

и вторая—

$$\frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'}. \tag{2}$$

Очевидно, что найти точку пересечения в общем случае невозможно, так как уравнений первой прямой два и уравнений второй прямой также два; всего уравнений четыре, а между тем им должны удовлетворять только три неизвестные величины—координаты точки пересечения прямых. Значит, в общем случае они удовлетворяться не могут; они будут удовлетворяться только при существовании известного соотношения между коэффициентами уравнений этих прямых. Найдем это соотношение.

Предположим, что наши прямые пересекаются. Если прямые пересекаются, то они лежат в одной плоскости. Положим, что уравнение этой плоскости есть:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{3}$$

Условия совпадения первой прямой с плоскостью будут (стр. 74):

$$Aa+Bb+Cc+D=0, \tag{4}$$

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{5}$$

Точно также условия совпадения второй прямой с плоскостью будут:

$$Aa'+Bb'+Cc'+D=0, \tag{6}$$

$$Am'+Bn'+Cp'=0. \tag{7}$$

Мы получили четыре однородных уравнения с четырьмя неизвестными A, B, C, D; одно неизвестное D мы можем исключить, вычтя уравнение (6) из (4), и тогда получим три уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} A(a-a') + B(b-b') + C(c-c') &= 0, \\ Am + Bn + Cp &= 0, \\ Am' + Bn' + Cp' &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Для того, чтобы эти уравнения были совместимы, необходимо, чтобы детерминант системы был нулем:

$$\begin{vmatrix} a-a', & b-b', & c-c' \\ m, & n, & p \\ m', & n', & p' \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Вот условие, необходимое для того, чтобы две прямые в пространстве пересекались.

Легко видеть, что две параллельные прямые также удовлетворяют условию (9). Действительно, если две прямые параллельны, то их угловые коэффициенты m, n, p и m', n', p' пропорциональны, а при этом детерминант (9) обращается в нуль. Этого и следовало ожидать, так как две параллельные прямые лежат в одной плоскости.

Посмотрим, какой вид принимает условие (9) в том случае, когда уравнения прямых даны в виде:

$$x = mz + a, \qquad y = nz + b; \tag{10}$$

$$x = m'z + a', \qquad y = n'z + b'. \tag{11}$$

В данном случае p и p' равны единице, а c и c' — нулю. Тогда формула (9) примет вид:

$$\begin{vmatrix} a-a', & b-b', & 0 \\ m, & n, & 1 \\ m', & n', & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

или, разлагая этот детерминант по элементам первой строки, получим:

$$(a-a')(n-n') = (b-b')(m-m'). \tag{13}$$

Мы получили условие (9), исходя из рассмотрения той плоскости, в которой лежат обе прямые. Мы могли бы получить то же самое условие, исходя из рассмотрения той точки, где эти две прямые встречаются. В самом деле, пусть будет (x, y, z) точка пересече-

ния прямых (1) и (2). Обозначая отношения (1) через ϱ, а (2) через ϱ', получим:

$$x = a + m\varrho, \quad y = b + n\varrho, \quad z = c + p\varrho,$$
$$x = a' + m'\varrho', \quad y = b' + n'\varrho', \quad z = c' + p'\varrho'.$$

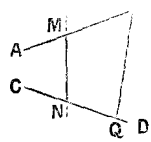
Отсюда находим:

$$a - a' + m\varrho - m'\varrho' = 0,$$
$$b - b' + n\varrho - n'\varrho' = 0,$$
$$c - c' + p\varrho - p'\varrho' = 0.$$

Исключая из этих уравнений количества ϱ, ϱ', получим условие (9)

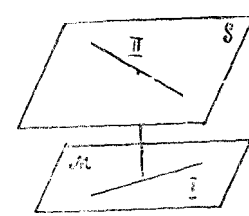
5. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми.

Положим, что имеем две непересекающиеся прямые. Легко показать, что кратчайшее расстояние между ними измеряется по прямой, пересекающей обе данные прямые под прямым углом. Действительно, пусть будут (черт. 41) AB, CD две непересекающиеся прямые и MN — прямая, пересекающаяся с AB, CD под прямыми углами. Пусть будет PQ какая-нибудь другая прямая, соединяющая точки PQ обеих прямых. Докажем, что $MN < PQ$. Так как прямые PM, QN перпендикулярны к MN, то отрезок MN есть проекция отрезка PQ на ось MN; а так как проекция меньше проектируемого отрезка (стр. 14), то $MN < PQ$.



Черт. 41.

Проведем через первую прямую плоскость M, параллельную второй прямой, а через вторую прямую плоскость S, параллельную первой прямой. Ясно, что обе плоскости, содержа по паре соответственно параллельных прямых, параллельны между собой, и расстояние между ними будет везде одинаково. Это же расстояние будет кратчайшим расстоянием между прямыми, так как линия, перпендикулярная к обеим плоскостям, будет перпендикулярна и к данным прямым. Пусть первая прямая дана уравнениями:



Черт. 42.

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}, \qquad (I)$$

а вторая:

$$\frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'} \qquad (II)$$

надо провести через вторую прямую плоскость S, которая бы параллельна первой прямой. Пусть ее уравнение будет:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

Так как эта плоскость (1) содержит в себе всю вторую прямую, а следовательно, и точку (a', b', c'), то ее уравнение представится в таком виде (стр. 57):

$$A(x-a')+B(y-b')+C(z-c')=0 \qquad (2)$$

Второе условие совпадения второй прямой с плоскостью (1) выразится, как мы видели

$$Am'+Bn'+Cp'=0. \qquad (3)$$

Условие параллельности этой плоскости с первой прямой есть:

$$Am+Bn+Cp=0. \qquad (4)$$

Из соотношений (3), (4) находим отношения коэффициентов A, B, C:

$$A:B:C=(np'-pn'):(pm'-mp'):(mn'-nm')$$

Так как в уравнении плоскости имеют значение только отношения угловых коэффициентов, то уравнение плоскости S будет:

$$(np'-pn')(x-a')+(pm'-mp')(y-b')+(mn'-nm')(z-c')=0. \qquad (5)$$

Найдем теперь расстояние плоскости S от плоскости M; это и будет искомое расстояние данных прямых. Так как плоскости M и S параллельны, то достаточно найти расстояние от плоскости S для какой нибудь одной точки в плоскости M. За эту точку примем точку (a, b, c). Для этого надо (стр. 60) привести уравнение (5) к нормальному виду и подставить в левую часть вместо текущих координат числа a, b, c. Таким образом, искомое кратчайшее расстояние между двумя прямыми (I), (II), которое мы обозначим через δ, выразится так:

$$\delta=\frac{(a-a')(np'-pn')+(b-b')(pm'-mp')+(c-c')(mn'-nm')}{\pm\sqrt{(np'-pn')^2+(pm'-mp')^2+(mn'-nm')^2}} \qquad (6)$$

Представим числителя и знаменателя полученной формулы (6) в несколько ином виде:

$$\delta=\pm\frac{\begin{vmatrix} a-a', & b-b', & c-c' \\ m, & n, & p \\ m', & n', & p' \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n, & p \\ n', & p' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p, & m \\ p', & m' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m, & n \\ m', & n' \end{vmatrix}^2}}. \qquad (7)$$

Обратим внимание на простое выражение для δ, когда уравнения прямых даны в нормальном виде. Тогда знаменатель представляет синус угла между данными прямыми (стр. 76), и мы будем иметь:

$$\delta=\pm\frac{\begin{vmatrix} a-a', & b-b', & c-c' \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \cos\alpha', & \cos\beta', & \cos\gamma' \end{vmatrix}}{\sin\varphi} \qquad (8)$$

где φ есть угол между двумя прямыми, между которыми ищется кратчайшее расстояние. Если обратим внимание на числитель формулы (6), то увидим, что это тот самый детерминант, обращение которого в нуль есть условие пересечения двух прямых. В самом деле, если две прямые пересекаются, то кратчайшее расстояние между ними равно нулю.

Когда две прямые параллельны, то наша формула (6) неприменима; в самом деле, у детерминанта в числителе две строки пропорциональны, и, следовательно, он равен нулю; знаменатель также равен нулю. Таким образом, в этом случае формула (6) дает выражение неопределенного вида.

Найдем теперь уравнения прямой, по которой измеряется только что найденное расстояние. Как мы уже сказали, искомая прямая перпендикулярна к обеим данным прямым, и, следовательно, решение нашей задачи тождественно с решением следующей: н а й т и

уравнение прямой, пересекающей перпендикулярно две данные прямые. Пусть будут уравнения первой данной прямой:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}, \tag{9}$$

второй:

$$\frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'}, \tag{10}$$

и искомой:

$$\frac{x-A}{M}=\frac{y-B}{N}=\frac{z-C}{P}, \tag{11}$$

где A, B, C и M, N, P суть неизвестные.

Условие перпендикулярности искомой прямой с данными дает непосредственно два уравнения, достаточные для нахождения отношений между M, N, P, именно, следующие:

$$\begin{aligned} Mm+Nn+Pp&=0,\\ Mm'+Nn'+Pp'&=0. \end{aligned} \tag{12}$$

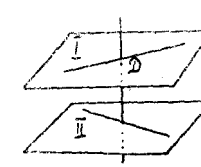
Из них, как из однородных уравнений 1-й степени, находим отношения неизвестных:

$$M:N:P=\begin{vmatrix} n, & p\\ n', & p'\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} p, & m\\ p', & m'\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} m, & n\\ m', & n'\end{vmatrix}=$$
$$=(np'-pn'):(pm'-mp'):(mn'-nm'),$$

а так как для нас важны не M, N, P, а только их отношения, то полагаем:

$$\begin{aligned} M&=np'-pn',\\ N&=pm'-mp',\\ P&=mn'-nm'. \end{aligned} \tag{13}$$

Определим теперь A, B, C. Пусть точка D, где пересекается первая из данных прямых с нашей искомой, и есть точка с координатами A, B, C. Очевидно, что в этом случае координаты A, B, C удовлетворяют уравнениям первой прямой; подставив их туда, найдем следующие уравнения, представленные в виде отношений:



Черт. 43.

$$\frac{A-a}{m}=\frac{B-b}{n}=\frac{C-c}{p}=\varrho. \tag{14}$$

Отсюда находим:

$$A = a + m\varrho,\ B = b + n\varrho,\ C = c + p\varrho. \qquad (15)$$

Выразим затем условие того, что искомая прямая пересекается со второй данной прямой; это условие (стр. 83) напишется для наших прямых так:

$$\begin{matrix} A-a', & B-b', & C-c' \\ M, & N, & P \\ m', & n', & p' \end{matrix} = 0 \qquad (16)$$

или, вставляя вместо A, B, C и M, N, P найденные значения,

$$\begin{matrix} a+m\varrho-a', & b+n\varrho-b', & c+p\varrho-c' \\ np'-pn', & pm'-mp', & mn'-nm' \\ m', & n', & p' \end{matrix} = 0. \qquad (17)$$

Разложив детерминант (17) на сумму двух детерминантов, получим:

$$\varrho \begin{matrix} m, & n, & p \\ np'-pn', & pm'-mp', & mn'-nm' \\ m', & n', & p' \end{matrix} + \begin{matrix} a-a', & b-b', & c-c' \\ np'-pn', & pm'-mp', & mn'-nm' \\ m', & n', & p' \end{matrix} = 0. \qquad (18)$$

Это — уравнение первой степени относительно ϱ. Разложим каждый из входящих в него детерминантов по элементам второй строки. Получим:

$$\varrho\left[(np'-pn')^2+(pm'-mp')^2+(mn'-nm')^2\right]+$$
$$+\Big\{(np'-pn')\left[(b-b')\,p'-(c-c')\,n'\right]+(pm'-mp')\left[(c-c')m'-\right.$$
$$\left.-(a-a')\,p'\right]+(mn'-nm')\left[(a-a')\,n'-(b-b')\,m'\right]\Big\}=0.$$

Коэффициент при ϱ и количество, заключенное в фигурные скобки, могут быть представлены в такой форме (стр. 23):

$$\varrho\left[(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2)-(mm'+nn'+pp')^2\right]+$$
$$+\Big\{\left[m\,(a-a')+n\,(b-b')+p\,(c-c')\right](m'^2+n'^2+p'^2)-$$
$$-\,m'(a-a')+n'(b-b')+p'(c-c')\left](mm'+nn'+pp')\right\}=0,$$

и отсюда:

$$\varrho = -\Big\{ [m(a-a')+n(b-b')+p(c-c')](m'^2+n'^2+p'^2] - \\ -[m'(a-a')+n'(b-b')+p'(c-c')][mm'+nn'+pp']\Big\}: \\ :\Big\{(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2)-(mm'+nn'+pp')^2\Big\}. \quad (19)$$

Определив ϱ, мы затем найдем A, B и C из уравнений (15).

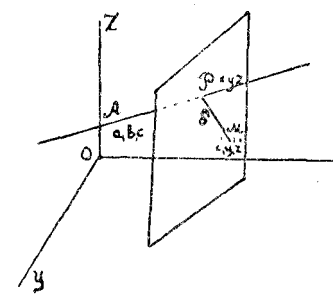
6. Расстояние между прямою линиею и точкою.

Пусть нам дана прямая линия уравнениями:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \quad (1)$$

и точка $M(x', y', z')$ (черт. 44).

Найдем расстояние точки M от данной прямой. Проведем через точку $M(x', y', z')$ плоскость, перпендикулярную к данной прямой AP, и найдем координаты точки P пересечения этой плоскости с данною прямою. Тогда длина отрезка MP и будет представлять расстояние точки M от данной прямой AP, так как прямые MP и AP взаимно перпендикулярны. Если мы обозначим координаты точки P через x, y, z, то



Черт. 44.

уравнение плоскости, перпендикулярной к данной прямой, будет:

$$m(x-x')+n(y-y')+p(z-z')=0. \quad (2)$$

Положим

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}=\varrho, \quad (3)$$

т. е.

$$x=a+m\varrho, \qquad y=b+n\varrho, \qquad z=c+p\varrho. \quad (4)$$

Тогда координаты точки P найдутся, если мы вместо x, y, z вставим их выражения (4) в уравнение плоскости и определим из него ϱ. Сделав это, находим:

$$m(a+m\varrho-x')+n(b+n\varrho-y')+p(c+p\varrho-z')=0, \quad (5)$$

или, собирая вместе члены с ϱ:

$$\varrho(m^2+n^2+p^2)+m(a-x')+n(b-y')+p(c-z')=0 \quad (6)$$

и отсюда:

$$\varrho=-\frac{m(a-x')+n(b-y')+p(c-z')}{m^2+n^2+p^2} \quad (7)$$

Подставляя это выражение для ϱ в формулы (4), находим следующие выражения для координат точки P:

$$\left.\begin{aligned} x&=a-\frac{m[m(a-x')+n(b-y')+p(c-z')]}{m^2+n^2+p^2},\\ y&=b-\frac{n[m(a-x')+n(b-y')+p(c-z')]}{m^2+n^2+p^2},\\ z&=c-\frac{p[m(a-x')+n(b-y')+p(c-z')]}{m^2+n^2+p^2}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Расстояние δ между точками M и P определяется по формуле

$$\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2. \quad (9)$$

Подставляя в выражение (9) вместо x, y, z найденные для них значения (8), получаем:

$$\begin{aligned}\delta^2=&\left\{(a-x')-\frac{m[m(a-x')+n(b-y')+p(c-z')]}{m^2+n^2+p^2}\right\}^2+\\ &+\left\{(b-y')-\frac{n[m(a-x')+n(b-y')+p(c-z')]}{m^2+n^2+p^2}\right\}^2+\\ &+\left\{(c-z')-\frac{p[m(a-x')+n(b-y')+p(c-z')]}{m^2+n^2+p^2}\right\}\end{aligned} \quad (10)$$

или, по упрощении:

$$\begin{aligned}\delta^2=&\{[(a-x')^2+(b-y')^2+(c-z')^2](m^2+n^2+p^2)-\\ &-[m(a-x')+n(b-y')+p(c-z')]^2\}:(m^2+n^2+p^2),\end{aligned} \quad (11)$$

Последнее выражение, согласно стр. 2 можно представить в виде:

$$\delta^2=\frac{\left|\begin{matrix}b-y', & c-z'\\ n, & p\end{matrix}\right|^2+\left|\begin{matrix}c-z', & a-x'\\ p, & m\end{matrix}\right|+\left|\begin{matrix}a-x', & b-y'\\ m, & n\end{matrix}\right|^2}{m^2+n^2+p^2} \quad (12)$$

ГЛАВА V.

Поверхности второго порядка.

1. Уравнение поверхности второго порядка.

Свойства поверхностей второго порядка имеют много общего со свойствами плоских кривых второго порядка и исследуются такими же приемами. Поэтому в последующем мы часто будем ссылаться на соответствующие отделы моей книги „Основы аналитической геометрии на плоскости“, где эти приемы подробно рассматриваются.

Мы будем представлять общее уравнение поверхности второго порядка в Декартовых координатах в таком же виде, в каком представляли уравнение кривой второго порядка на плоскости. Коэффициенты уравнений мы будем изображать одною и тою же буквою a с двумя указателями. Каждому множителю x, входящему в данный член, будет соответствовать указатель 1, множителю y— указатель 2, и множителю z — указатель 3; если член содержит менее двух множителей x, y или z, то на месте недостающих указателей ставим указатель 4. Кроме того, при всех членах с двумя неодинаковыми указателями ставим множитель 2. Будем располагать члены уравнения следующим образом. Сначала идут три члена с квадратами координат и три члена с произведениями координат; за этими шестью членами второй степени следуют три члена первой степени и, наконец, постоянный член, т.-е. член нулевой степени относительно текущих координат x, y, z.

Таким образом, наше общее уравнение поверхности второго порядка, первую часть которого мы часто будем означать для краткости через $2F$, напишется так:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (1)$$

вводя для однородности четвертую координату t, находим то же самое уравнение в однородной форме:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}xt + \\ + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0. \qquad (2)$$

Это уравнение переходит в первое, неоднородное уравнение, при $t = 1$. Так как координата t введена нами с тем, чтобы в окончательном результате положить t равным единице, то отсюда видим что уравнение $t = 0$ равносильно $1 = 0$, т.-е. выражает бесконечно удаленную плоскость (стр. 50) точно так же, как на плоскости оно представляло бесконечно удаленную прямую. Преимущества однородной формы уравнения те же, что и на плоскости; в частности, для нее справедлива теорема Эйлера об однородных функциях. В самом деле, возьмем от однородного многочлена $2F$ половины частных производных по x, y, z, t. Находим:

$$F_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t,$$
$$F_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t,$$
$$F_z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t,$$
$$F_t = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t.$$

Помножив каждую из них на соответствующую координату, получим тождественно:

$$xF_x + yF_y + zF_z + tF_t = 2F, \qquad (3)$$

т.-е. (теорема Эйлера): сумма половин частных производных однородной функции 2-й степени по четырем координатам, умноженных на соответствующие координаты, равна самой функции.

Рассматривая общее уравнение поверхности второго порядка, мы видим, что в этом уравнении десять членов, и, следовательно, оно содержит десять коэффициентов, но так как уравнение зависит не от самих коэффициентов, а от отношений между ними, то поверхность 2-го порядка определяется, вообще девятью условиями, напр., девятью точками, через которые эта поверхность должна проходить.

Составим уравнение поверхности 2-го порядка, проходящей через 9 данных точек. Обозначим координаты этих точек через:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_9, y_9, z_9).$$

Пусть (x, y, z) есть какая-нибудь десятая точка, лежащая на нашей поверхности. Так как координаты всех этих точек должны удовлетворять уравнению поверхности, то мы имеем следующие условия:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \ldots\ldots + a_{44} = 0 \\ a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{33}z_1^2 + \ldots\ldots + a_{44} = 0 \\ a_{11}x_2^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}z_2^2 + \ldots\ldots + a_{44} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{11}x_9^2 + a_{22}y_9^2 + a_{33}z_9^2 + \ldots\ldots + a_{44} = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Таким образом у нас получилось 10 соотношений; неизвестными в этих соотношениях являются коэффициенты искомого уравнения. Эти десять неизвестных связаны десятью однородными уравнениями; следовательно, для совместимости их необходимо, чтобы детерминант из коэффициентов был равен 0, т.-е.

$$\begin{array}{l} x^2,\ y^2,\ z^2,\ zy,\ xz,\ yx,\ x,\ y,\ z,\ 1 \\ x_1^2,\ y_1^2,\ z_1^2,\ z_1y_1,\ x_1z_1,\ y_1x_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_9^2,\ y_9^2,\ z_9^2,\ z_9y_9,\ x_9z_9,\ y_9x_9,\ x_9,\ y_9,\ z_9,\ 1 \end{array} = 0. \quad (5)$$

Вот искомое уравнение поверхности. В этом уравнении неизвестными являются текущие координаты x, y, z — координаты любой точки поверхности. Так как в полученном уравнении текущие координаты входят только в первую строку и в каждый член детерминанта входит по одному элементу из каждой строки, то наше уравнение будет второй степени и, значит, будет изображать поверхность второго порядка. Эта поверхность проходит через все данные точки, так как если вместо текущих координат мы вставим координаты какой-нибудь из этих девяти точек, то детерминант будет иметь две равных строки и, следовательно, тождественно обратится в нуль.

Может, однако, случиться, что уравнение (5) будет удовлетворяться произвольными значениями x, y, z; это будет тогда, когда через наши 9 точек можно провести бесчисленное множество поверхностей второго порядка. Для этого нужно, чтобы данные 9

точек лежали на пересечении двух поверхностей 2-го порядка; тогда через эти точки проходит целый пучок таких поверхностей (стр. 43).

Исследуем, как изменится вид уравнения поверхности второго порядка, если мы перенесем начало в другую точку. Пусть мы перенесли начало в точку (x', y', z'). Заменим прежние текущие координаты (x, y, z) новыми текущими координатами X, Y, Z, полагая:

$$\begin{aligned} x &= X + x', \\ y &= Y + y', \\ z &= Z + z' \end{aligned}$$

Вставив эти новые координаты в уравнение кривой, получим:

$$\begin{aligned} &a_{11}(X+x')^2 + a_{22}(Y+y')^2 + a_{33}(Z+z')^2 + 2a_{23}(Y+y')(Z+z') + \\ &+ 2a_{13}(X+x')(Z+z') + 2a_{12}(X+x')(Y+y') + \\ &+ 2a_{14}(X+x') + 2a_{24}(Y+y') + 2a_{34}(Z+z') + a_{44} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Раскроем скобки и соберем члены с разными степенями X, Y, Z, придерживаясь для коэффициентов порядка, принятого в первоначальном уравнении. Получим:

$$\begin{aligned} &a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + 2a_{12}XY + \\ &+ 2(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14})X + 2(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + \\ &+ a_{24})Y + 2(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34})Z + (a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + \\ &+ a_{33}z'^2 + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + 2a_{12}x'y' + 2a_{14}x' + 2a_{24}y' + \\ &+ 2a_{34}z' + a_{44}) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первая строка преобразованного уравнения представляет старшие члены первоначального с заменою в них координат x, y, z координатами X, Y, Z. Коэффициент при X есть частная производная по x от левой части уравнения (1), в которой вместо x, y, z поставлены x', y', z'; эту производную мы обозначим через $2F'_{x'}$; при этом указатель (x'), при F', обозначает, что текущие координаты заменены координатами нового начала. Точно также коэффициент при Y есть частная производная от левой части уравнения поверхности (1) по y, с заменой текущих координат координатами x', y', z'; его мы обозначим через $2F'_{y'}$. На основании того же самого коэффициент при Z обозначим через $2F'_{z'}$. Свободный

член есть левая часть уравнения поверхности, в котором текущие координаты заменены координатами данной точки; его мы обозначим через $2F'$. Поэтому преобразованное уравнение может быть представлено в таком виде:

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{32}ZY + 2a_{13}XZ + 2a_{21}YX + \\ + 2F'_{x'}x + 2F'_{y'}y + 2F'_{z'}z + 2F' = 0. \quad (8)$$

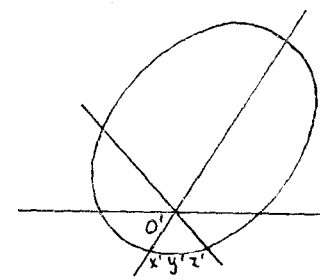
2. Изыскание точек пересечения поверхности второго порядка с пучком прямых.

Обратимся к исследованию поверхности 2-го порядка. Для этого через какую-нибудь точку (x', y', z') проведем всевозможные прямые; их общие уравнения будут

$$\frac{x-x'}{m} = \frac{y-y'}{n} = \frac{z-z'}{p} = \varrho, \quad (1)$$

где через ϱ мы обозначаем общий знаменатель равных отношений. Перенеся начало в точку O' (черт. 45), представим эти уравнения в виде:

$$\frac{X}{m} = \frac{Y}{n} = \frac{Z}{p} = \varrho,$$



Черт. 45.

откуда находим:

$$X = m\varrho, \; Y = n\varrho, \; Z = p\varrho. \quad (2)$$

Отсюда, возвращаясь к прежним координатам x, y, z, получим:

$$x = x' + m\varrho, \; y = y' + n\varrho, \; z = z' + p\varrho, \quad (3)$$

где количество ϱ в случае прямоугольных осей координат есть расстояние нашей точки (x, y, z) от точки (x', y', z') (см. стр. 71), если только $m = \cos\alpha$, $n = \cos\beta$, $p = \cos\gamma$; вообще же ϱ будет не радиусом-вектором, а только величиною, пропорциональною ему.

Посмотрим теперь, как изменится уравнение (1), если вместо x, y и z мы внесем в него выражения (3). Оно примет вид:

$$a_{11}m^2\varrho^2 + a_{22}n^2\varrho^2 + a_{33}p^2\varrho^2 + 2a_{23}np\varrho^2 + 2a_{31}pm\varrho^2 + \\ + 2a_{12}mn\varrho^2 + 2m\varrho F'_{x'} + 2n\varrho F'_{y'} + 2p\varrho F'_{z'} + 2F' = 0. \quad (4)$$

Собирая члены с разными степенями ϱ, находим:

$$(a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{23}np + 2a_{31}pm + 2a_{12}mn)\varrho^2 + \\ + 2(mF'_{x'} + nF'_{y'} + pF'_{z'})\varrho + 2F' = 0, \qquad (5)$$

или полагая

$$\left.\begin{aligned} M &= a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{23}np + 2a_{31}pm + 2a_{12}mn, \\ N &= mF'_{x'} + nF'_{y'} + pF'_{z'}, \\ P &= 2F', \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

представим уравнение поверхности 2-го порядка в виде:

$$M\varrho^2 + 2N\varrho + P = 0. \qquad (7)$$

На изучении этого уравнения мы и построим теорию поверхностей второго порядка.

Уравнение (7) при данных m, n, p, т.-е. при данном направлении лучей, будет уравнением второй степени с одним неизвестным ϱ. Решая его, получим для ϱ два значения ϱ_1 и ϱ_2. Каждому из этих значений будут соответствовать по формулам (3) вполне определенные координаты x, y, z. Отсюда следует, что **всякая прямая пересекает поверхность второго порядка в двух точках**. Характер точек пересечения зависит от свойства корней уравнения (7). Если корни действительны и различны, то будем иметь две действительные точки пересечения; если корни равны, то две точки пересечения сольются в одну, и прямая будет касаться поверхности; если корни мнимы, то геометрически точек пересечения не существует, аналитически же они существуют, но только как мнимые. Так как уравнение (7) — второй степени относительно ϱ, то прямая может иметь с поверхностью 2-го порядка больше двух общих точек только в том случае, когда уравнение (7) имеет более двух решений, то есть, когда оно обращается в тождество. В этом случае уравнение (7) удовлетворяется при всяком значении ϱ, т.-е. прямая лежит на поверхности всеми своими точками. Таким образом, если прямая имеет с поверхностью 2-го порядка более двух общих точек, то она лежит вся на этой поверхности.

Посмотрим, не может ли одна из точек пересечения находиться в самой точке O', откуда выходят лучи. Если одна из точек находится в O', то одно из возможных решений для x, y, z будет

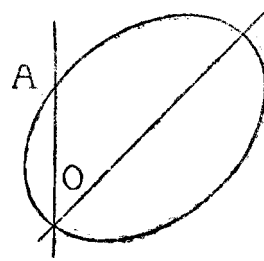
x', y', z', а для этого ϱ должно быть нулем. Вставляя в наше уравнение вместо ϱ нуль, получим:

$$P = O,$$

или

$$2F' = O. \tag{8}$$

Это условие получается из уравнения поверхности заменою в нем текущих координат x, y, z координатами x', y', z' точки O'. Значит, оно показывает, что эти координаты удовлетворяют уравнению поверхности. Итак, для того, чтобы одна из точек пересечения совпала с точкой O', необходимо, чтобы точка O' лежала на поверхности (черт. 46), что очевидно. В этом случае всякая секущая, выходя из O', встречает поверхность еще в некоторой другой точке A. Посмотрим, каково должно быть условие, чтобы обе точки пересечения секущей прямой с поверхностью совпадали с O'. Такие лучи, которые встречают поверхность в двух сливающихся точках, называются касательными к поверхности. Чтобы удовлетворить этому условию, нужно, чтобы оба корня уравнения (7) были нули. Значит, нужно, чтобы было не только $P = 0$, но и $N = 0$. Напишем эти условия в раскрытом виде:



Черт. 46.

$$2F' = 0. \tag{8}$$

$$mF'_{x'} + nF'_{y'} + pF'_{z'} = 0. \tag{9}$$

Второе условие содержит угловые коэффициенты m, n и p; следовательно, не всякий луч обладает требуемым свойством, а только тот, для которого это соотношение удовлетворяется. Это соотношение однородно относительно m, n и p и потому устанавливает связь между отношениями этих трех величин. Так как двух отношений величин $m : n : p$ определить отсюда нельзя, то это уравнение будет неопределенным. Это показывает, что через точку O' проходит бесчисленное множество лучей, касающихся поверхности

в этой точке. Так как их бесчисленное множество, то они образуют некоторую поверхность. Найдем эту поверхность, т.-е. геометрическое место всех прямых линий, касающихся поверхности в данной точке O'. Между угловыми коэффициентами прямой и текущими координатами точек прямой имеем соотношения (стр. 95):

$$x - x' = m\varrho,\ y - y' = n\varrho,\ z - z' = p\varrho. \qquad (3)$$

Кроме того, для касательной мы имеем:

$$mF'_{x'} + nF'_{y'} + pF'_{z'} = 0. \qquad (9)$$

Этим уравнениям удовлетворяют текущие координаты x, y, z точки, лежащей на любой из касательных к поверхности в точке O'. Поэтому, исключив из этих соотношений m, n, p, мы получим уравнение требуемой поверхности, на которой лежат все касательные прямые. Для этого умножим уравнение (9) на ϱ и заменим $m\varrho$, $n\varrho$ и $p\varrho$ из соотношений (3), Получим:

$$(x - x')\ F'_{x'} + (y - y')\ F'_{y'} + (z - z')\ F'_{z'} = 0. \qquad (10)$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты точек любой из касательных прямых в данной точке к поверхности. Это уравнение 1-й степени относительно текущих координат x, y, z и, следовательно, представляет плоскость. Значит, все касательные прямые в данной точке поверхности 2-го порядка лежат в плоскости: эта плоскость называется **касательною плоскостью**. Итак, **касательная плоскость в данной точке поверхности есть геометрическое место всех прямых, касательных к поверхности в этой точке.**

Обратим внимание на различие в свойствах касательной прямой и касательной плоскости. Касательная прямая касается поверхности в определенной точке; касательная плоскость, вообще, не только касается поверхности в одной точке, а, как мы увидим ниже, пересекается с нею по целой линии. Касательная плоскость есть только место касательных прямых к поверхности в данной ее точке.

Приведем уравнение касательной плоскости к однородному виду, пользуясь теоремой Эйлера об однородных функциях. Раскроем скобки и перенесем вправо отрицательные члены:

$$xF'_{x'} + yF'_{y'} + zF'_{z'} = x'F'_{x'} + y'F'_{y'} + z'F'_{z'}. \qquad (11)$$

По теореме Эйлера и на основании условия (8), имеем:

$$x'F'_{x'} + y'F'_{y'} + z'F'_{z'} + t'F'_{t'} = 2F' = 0. \qquad (12)$$

Сложим уравнение (11) с тожеством (12) и вместо t' поставим t, так как $t = t' = 1$.

Тогда уравнение (11) примет вид

$$xF'_{x'} + yF'_{y'} + zF'_{z'} + tF'_{t'} = 0.$$

Вот уравнение в однородных координатах касательной плоскости к поверхности в точке x', y', z'.

3. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

Посмотрим, нет ли таких прямых, которые всеми своими точками лежали бы на данной поверхности 2-го порядка. Чтобы вся прямая лежала на поверхности, надо, чтобы все точки ее принадлежали поверхности. Следовательно, в этом случае уравнение (стр. 96)

$$M\varrho^2 + 2N\varrho + P = 0, \qquad (1)$$

определяющее точки пересечения прямой с поверхностью 2-го порядка, должно удовлетворяться при всяком ϱ; а это возможно только тогда, когда это уравнение обращается в тождество, т. е. когда

$$M = 0, \; N = 0, \; P = 0. \qquad (2)$$

Последнее условие выражает, что точка O' лежит на поверхности; два другие (см. стр. 96)

$$mF'_{x'} + nF'_{y'} + pF'_{z'} = 0,$$

$$a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{23}np + 2a_{31}pm + 2a_{12}mn = 0$$

представляют связь между m, n и p. Каждое из этих уравнений однородно относительно m, n и p: первое—первой степени, второе—второй. Из них мы определим два отношения между величинами m, n и p, и так как одно уравнение первой степени, а другое—второй, то решений будет два. Из этого следует, что через каждую точку поверхности 2-го порядка проходят две прямые, всеми своими точками лежащие на этой поверхности. Такие прямые линии называются прямолинейными образующими поверхности 2 го порядка; вся поверхность покрыта этими

прямыми. Эти прямые могут быть различными — действительными, мнимыми или сливающимися. Пример поверхности с мнимыми образующими представляет шар, а со сливающимися—конус и цилиндр.

4. Условие, при котором поверхность второго порядка предетавляет конус.

Посмотрим, не может ли быть у поверхности 2-го порядка такой точки, чтобы каждая прямая, через нее проходящая, была касательною. Угловые коэффициенты прямой, касающейся поверхности, связаны следующим соотношением (стр. 97):

$$mF'_{x'} + nF'_{y'} + pF'_{z'} = 0. \qquad (1)$$

Если мы хотим, чтобы всякая прямая, проходящая через точку O', была касательною в этой точке, то нужно, чтобы ничто не связывало величин m, n и p, т.-е. чтобы уравнение (1) обратилось в тождество; а для этого коэффициенты при m, n и p должны быть нулями. Итак, условия того, чтобы всякая прямая, проходящая через данную точку O', была касательною, будут:

$$P = 2F' = 0, \qquad (2)$$

$$F'_{x'} = 0, \; F'_{y'} = 0, \; F'_{z'} = 0. \qquad (3)$$

Из них первое выражает, что точка O' лежит на данной поверхности [ур. (8) стр. 97]. Таким образом мы имеем четыре условия, которые устанавливают связь между тремя координатами x', y', z' точки O'. Четыре уравнения с тремя неизвестными, вообще говоря, несовместимы; значит, не на всякой поверхности существует такая точка, чтобы все прямые, через нее проходящие, были касательными.

Предположим, что точка (x', y', z') удовлетворяет требуемому условию. Уравнение (2):

$$2F' = 0$$

можно упростить. На основании теоремы Эйлера имеем:

$$2F' = x'F'_{x'} + y'F'_{y'} + z'F'_{z'} + t'F'_{t'} = 0.$$

Пользуясь соотношениями (3), находим, что в нашем случае исчезают все члены, кроме последнего, так что уравнение $2F' = 0$ можно заменить следующим:

$$F'_{t'} = 0$$

Напишем преобразованные уравнения (2), (3) в раскрытом виде:

$$\begin{aligned} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}t' &= 0, \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24}t' &= 0, \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34}t' &= 0, \\ ax_{41}' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}t' &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Эти уравнения заменяют собою условия (2), (3). Мы получили четыре однородных уравнения с 4-мя неизвестными, или, если положим $t = 1$, 4 уравнения с тремя неизвестными. Для их совместимости необходимо, чтобы детерминант системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Этот детерминант называется дискриминантом уравнения поверхности второго порядка. Мы будем обозначать его буквою A.

Если уравнения (4) совместимы, то из них мы найдем координаты точки O', имеющей то свойство, что всякая прямая, проходящая через эту точку, есть касательная к данной поверхности второго порядка.

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае поверхность второго порядка представляет конус с вершиною O'. В самом деле, возьмем на поверхности любую точку A и проведем прямую $O'A$. Эта прямая, как касательная в O', встречает поверхность в двух точках, сливающихся с O'; а так как, кроме того, она встречает поверхность еще в A, то она имеет с поверхностью три общих точки; но прямая может встречать поверхность 2-го порядка не более чем в двух точках; следовательно, прямая $O'A$ должна вся лежать на поверхности (стр. 96). Таким образом в нашем случае поверхность 2-го порядка образована прямыми, выходящими из O', т.-е представляет конус с вершиною в O'.

Найдем образующие этого конуса, т.-е. прямые, выходящие из O' и лежащие на нашей поверхности.

Для того, чтобы прямая всеми своими точками лежала на поверхности, надо (стр. 99), чтобы было:

$$P = 0, \quad N = 0, \quad M = 0.$$

Первым двум условиям мы, по предположению, уже удовлетворили выбором точки O'. Остается еще условие:

$$a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{23}np + 2a_{31}pm + 2a_{12}mn = 0. \qquad (6)$$

Те лучи, которые всеми своими точками лежат на поверхности, должны удовлетворять одному условию (6). Следовательно, их бесчисленное множество, и они образуют некоторую поверхность. Умножая уравнение (6) на ρ^2 и возвращаясь по формулам (3) (стр. 98) к координатам x, y, z, получим:

$$a_{11}(x-x')^2 + a_{22}(y-y')^2 + a_{33}(z-z')^2 + 2a_{23}(y-y')(z-z') + \\ + 2a_{31}(z-z')(x-x') + 2a_{12}(x-x')(y-y') = 0. \qquad (7)$$

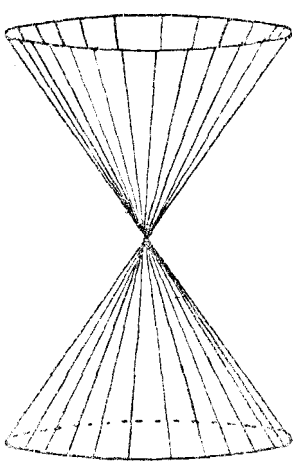
Обратим особенное внимание на тот случай, когда точка (x', y', z') совпадает с началом, т.-е. когда

$$x' = 0,\ y' = 0,\ z' = 0.$$

Тогда уравнение конуса принимает вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0. \qquad (8)$$

Мы получаем однородное уравнение 2-й степени. Итак, однородное уравнение 2-ой степени представляет конус с вершиною в начале координат.



Черт. 47.

Если поверхность 2-го порядка представляет конус, то мы найдем координаты его вершины, решая уравнения (4). Если эти уравнения дадут бесконечные решения, то получим конус с бесконечно удаленною вершиною, и все образующие будут параллельны между собою. Такая поверхность называется цилиндром.

Заметим, что конус состоит из двух полостей, простирающихся в бесконечность (черт. 47), так как каждая образующая делится вершиною на две части, принадлежащие двум различным полостям.

Так как под касательною плоскостью разумеется плоскость, в которой лежат все касательные прямые, то касательная плоскость в вершине конуса неопределенна.

Возможно, что из четырех уравнений (4), определяющих вершину конуса, не одно будет следствием трех остальных, но два уравнения будут следствием двух других. Тогда, следовательно, вершина конуса делается неопределенной, так как ее координаты x, y, z должны удовлетворять только двум независимым уравнениям.

Легко видеть, что в этом случае поверхность 2-го порядка обращается в пару плоскостей. В самом деле, положим, например, что из четырех уравнений (4) два первых независимы, а два последних суть их следствия. Тогда два первых уравнения определят собою прямую линию MN, каждая точка которой имеет то свойство, что каждая прямая, проходящая через нее, встречает в ней поверхность 2-го порядка два раза. Возьмем на нашей поверхности какую-нибудь точку A, не лежащую на прямой MN, и соединим ее с какою-нибудь точкою M этой прямой прямою AM. Рассуждая, как выше, мы убеждаемся, что прямая AM встречает поверхность 2-го порядка в трех точках: в точке A и в двух точках, сливающихся в M; следовательно, прямая AM вся лежит на нашей поверхности. Так как это рассуждение применимо ко всякой прямой, соединяющей точку A с какою-нибудь точкою прямой MN, а все такие прямые лежат в одной плоскости, то отсюда следует, что вся плоскость, содержащая точку A и прямую MN, входит как часть в рассматриваемую поверхность 2-го порядка. Это показывает, что в нашем случае поверхность 2-го порядка распадается на две плоскости.

В этом случае не только дискриминант, но и все миноры 3-го порядка должны обращаться в нуль. В самом деле, в этом случае выражения для x', y', z', получаемые из любых трех уравнений системы (4), должны сделаться неопределенными. Но, решая три из уравнений (4), мы получим для x', y', z' выражения в виде дробей, числители и знаменатели которых будут минорами дискриминанта (5). Следовательно, *для того, чтобы поверхность второго порядка распадалась на пару плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы все миноры третьего порядка, входящие в состав дискриминанта уравнения поверхности, обращались в нуль.* Посмотрим, скольким условиям равносильно это требование. Поверхность

2-го порядка определяется 9-ю условиями, напр., 9-ю точками; а пара пересекающихся плоскостей — 6-ю условиями, так как плоскость определяется 3-мя точками. Очевидно, что недостающие условия равносильны требованию, чтобы поверхность 2-го порядка распадалась на пару плоскостей, и число этих условий есть $9-6=3$. Рассматривая два независимых уравнения системы (4), мы получим уравнения, определяющие место точек O'. Так как уравнений два и они первой степени, то они представляют пару плоскостей, и точки O' лежат на линии их пересечения. Это—точки пересечения тех двух плоскостей, на которые распадается поверхность 2-го порядка. Если линия пересечения находится на конечном расстоянии, то поверхность распадается на пару пересекающихся плоскостей; если эта линия удалена в бесконечность, то—на пару параллельных плоскостей.

Предположим теперь, что из четырех уравнений три будут следствием четвертого, так что для определения координат вершины O' остается только одно уравнение. Тогда координаты вершины будут еще более неопределенными. Когда уравнений независимых было два, то вершина лежала на некоторой прямой; когда же независимое уравнение одно, то вершина будет лежать в некоторой плоскости. Так как здесь линия пересечения двух плоскостей, на которые распадается поверхность 2-го порядка, делается неопределенною, то в этом случае поверхность 2-го порядка обращается в две сливающиеся плоскости. Рассуждая, как в предыдущем случае, мы можем видеть, что для этого нужно, чтобы все миноры второго порядка обращались в нуль. Пара сливающихся плоскостей определяется 3-мя точками, а поверхность — 9-ю. Значит, требование, чтобы данная поверхность обращалась в пару сливающихся плоскостей, равносильно 6 недостающим условиям. Итак, обращение дискриминанта в нуль есть условие того, что поверхность есть конус или цилиндр; обращение его миноров третьего порядка в нуль есть условие того, что поверхность представляет пару пересекающихся или параллельных плоскостей; обращение в нуль миноров второго порядка есть условие того, что поверхность обращается в две сливающиеся плоскости.

5. Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью.

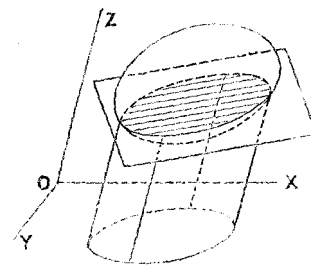
Пусть даны своими уравнениями поверхность:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

и плоскость:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2)$$

с которою данная поверхность пересекается по некоторой линии (черт. 48). Надо узнать, какая это линия. Исключим из уравнения поверхности и уравнения плоскости одну из координат, положим, z. Тогда мы получим уравнение между x, y; легко видеть, что это будет уравнение второй степени. Так как это уравнение получилось как следствие (1), (2), то оно представляет поверхность, проходящую через линию пересечения поверхностей (1), (2); далее, так как это уравнение не содержит координаты z, то оно представляет цилиндр, проектирующий эту линию пересечения на плоскость XY. Наконец, так как это уравнение 2-ой степени, то соответствующий ему цилиндр пересекается с каждою прямою в двух точках. Рассмотрим прямую, лежащую в плоскости (2). Очевидно, что прямая встречает цилиндр там же, где она встречает и поверхность (1). Следовательно, прямая линия встречает линию пересечения поверхностей (1) и (2) в двух точках, а потому **поверхность 2-го порядка пересекается с каждою плоскостью по линии 2-го порядка.** Линия пересечения поверхности 2-го порядка с плоскостью может быть действительною, мнимою или распадаться на пару прямых. Легко видеть, что в последнем случае секущая плоскость обращается в касательную, а точка пересечения прямых будет точкою прикосновения. Действительно, так как всякая прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку прикосновения, встречает поверхность 2-го порядка в двух сливающихся точках, то она должна встречать в двух сливающихся точках и линию пересечения этой поверхности с касательною плоскостью. А это может быть только



Черт. 48.

в том случае, если линия пересечения поверхности с плоскостью представляет пару прямых, пересекающихся в точке прикосновения.

6. Классификация поверхностей второго порядка.

Подобно кривым второго порядка, поверхности второго порядка прежде всего различаются по их отношению к бесконечно удаленной плоскости. Так как поверхность 2-го порядка с каждою плоскостью пересекается по кривой 2-го порядка, то естественно распределять поверхности по свойству тех линий, по которым они пересекаются с бесконечно удаленною плоскостью. Эти линии могут быть различного вида. Поверхность 2-го порядка может пересекаться с бесконечно удаленною плоскостью по мнимой кривой,—такая поверхность называется эллипсоидом. Поверхность может пересекаться с бесконечно удаленною плоскостью по действительной кривой 2-го порядка; такая поверхность называется гиперболоидом,—ниже мы увидим, что гиперболоиды бывают двух видов. Наконец, она может встречать бесконечно удаленную плоскость по кривой, распадающейся на пару прямых,—такая поверхность называется параболоидом; при этом, если эти две прямые, по которым поверхность встречает бесконечно удаленную плоскость,—мнимые, то параболоид—эллиптический; если же действительные, то — гиперболический. Конус может встречать бесконечно удаленную плоскость или по мнимой кривой, тогда он сам мнимый, или же по действительной, тогда он действительный. Цилиндр имеет вершину в бесконечности, — значит, цилиндр непременно встречает бесконечно удаленную плоскость по паре прямых. Если эти прямые—мнимые, то цилиндр эллиптический; если они—действительные, то—гиперболический; если они сливаются,—параболический.

Возьмем уравнение поверхности 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (1)$$

Будем исследовать пересечение ее с лучами, выходящими из точки x', y', z'. Поступая, как прежде (стр. 96), приведем уравнение к такому виду:

$$M\varrho^2 + 2N\varrho + P = 0. \qquad (2)$$

Будем искать лучи, пересекающие поверхность в бесконечно удаленных точках. Чтобы точка пересечения луча с поверхностью была бесконечно удалена, надо, чтобы уравнение (2) имело бесконечно-большой корень, а для этого необходимо, чтобы было

$$M = 0,$$

или

$$a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{23}np + 2a_{31}pm + 2a_{12}mn = 0. \qquad (3)$$

Это соотношение устанавливает связь между угловыми коэффициентами тех прямых, которые встречают нашу поверхность в бесконечности. Так как направление прямых определяется двумя отношениями между m, n, p, а мы имеем только одно условие (3), то прямых, встречающих поверхность в бесконечности, бесчисленное множество. Все прямые, выходящие из точки $O'(x', y', z')$ и направленные в бесконечно удаленные точки поверхности, образуют конус. Если этот конус действительный, то линия пересечения поверхности с бесконечно удаленною плоскостью действительная; если этот конус мнимый, то эта линия мнимая; если конус распадается на пару плоскостей, то линия пересечения распадается на пару прямых.

Найдем уравнение конуса лучей, направленных в бесконечно удаленные точки поверхности и выходящих из начала координат. Умножив уравнение (3) на ϱ^2 и заменив ϱm, ϱn, ϱp через x, y, z (стр. 98), получим:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0. \qquad (4)$$

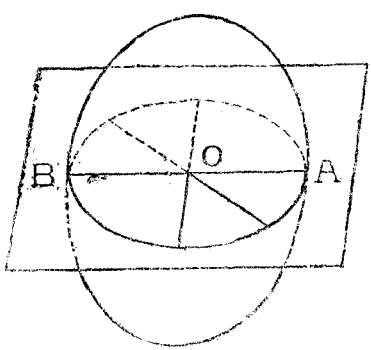
Мы видим, что левая часть уравнения состоит из старших членов уравнения поверхности. Значит, приравняв нулю старшие члены уравнения поверхности, мы получим уравнение конуса с вершиною в начале, направленного к бесконечно удаленным точкам поверхности.

Кроме их отношения к бесконечно удаленной плоскости, поверхности 2-го порядка различаются еще по свойствам их прямолинейных образующих. Мы знаем (стр. 99), что через каждую точку поверхности 2-го порядка проходят две прямолинейные образующие. Эти образующие могут быть не сливающимися — действительными или мнимыми, — или сливающимися, также действи-

тельными или мнимыми. Очевидно, что действительные прямолинейные образующие могут быть только у тех поверхностей, которые с бесконечно удаленною плоскостью пересекаются по действительной кривой. Из этого следует, что действительные не сливающиеся прямолинейные образующие возможны только у гиперболоида и гиперболического параболоида. Мнимые образующие возможны как у тех поверхностей, которые встречают бесконечно удаленную плоскость по мнимой кривой, так и у тех, которые встречают бесконечно удаленную плоскость по действительной кривой. Таковы поверхности: эллипсоид, эллиптический параболоид и гиперболоид. Сливающиеся прямолинейные образующие могут быть только у конуса и цилиндра.

7. Центр поверхности второго порядка.

Пусть, нам дана поверхность 2-го порядка и точка $O'(x', y', z')$ (черт. 49). Будем искать те хорды, которые, проходя через эту точку, делились бы в ней пополам. Перенесем в эту точку начало координат; уравнение поверхности примет вид (стр. 96).



Черт. 49.

$$M\varrho^2 + 2N\varrho + P = 0. \quad (1)$$

Посмотрим, каковы должны быть корни этого уравнения, чтобы точка O' оказалась в середине отрезка AB. Как известно (стр. 95), между Декартовыми координатами точек поверхности и корнями уравнения (1) существует следующая связь:

$$x = x' + m\varrho,\ y = y' + n\varrho,\ z = z' + p\varrho. \quad (2)$$

Следовательно, если мы указателем 1 будем отмечать координаты точки A, а указателем 2 координаты точки B, то корень ϱ_1 будет соответствовать точке A, ϱ_2—точке B, и мы будем иметь:

$$\begin{aligned} x_1 &= x' + m\varrho_1,\ y_1 = y' + n\varrho_1,\ z_1 = z' + p\varrho_1, \\ x_2 &= x' + m\varrho_2,\ y_2 = y' + n\varrho_2,\ z_2 = z' + p\varrho_2. \end{aligned} \quad (3)$$

По условию, точка O' должна быть серединою отрезка AB. Следовательно, ее координаты должны удовлетворять соотношениям:

$$x' = \frac{x_1 + x_2}{2}, y' = \frac{y_1 + y_2}{2}, z' = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Внося сюда значения x_1 и x_2 из формул (3), получим:

$$x' = \frac{x' + m\varrho_1 + x' + m\varrho_2}{2} = x' + \frac{m(\varrho_1 + \varrho_2)}{2},$$

откуда

$$m(\varrho_1 + \varrho_2) = 0.$$

Таким же образом получим:

$$n(\varrho_1 + \varrho_2) = 0, \quad p(\varrho_1 + \varrho_2) = 0.$$

Количества m, n, p суть угловые коэффициенты секущей прямой; если бы они все были нулями, то их отношения, определяющие направление прямой, были бы неопределенны. Значит, удовлетворить этим трем условиям можно только, положив:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 0.$$

Итак, для того, чтобы хорда делилась в точке O' пополам, надо, чтобы корни ϱ_1 и ϱ_2 уравнения (1) были равны и противоположны по знаку. На основании свойства корней квадратного уравнения имеем:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{2N}{M} = 0.$$

Так как M не равно бесконечности, то $N = 0$, или в раскрытом виде:

$$mF'_{x'} + nF'_{y'} + pF'_{z'} = 0. \tag{4}$$

Таково условие, при котором хорды, проходящие через точку O', делятся в ней пополам. Это уравнение однородно относительно величин m, n, p и, следовательно, устанавливает связь между их отношениями. Так как направление прямой определяется двумя отношениями между m, n, p, а условие одно, то существует бесчисленное множество хорд, проходящих через данную точку и делящихся в ней пополам, и они образуют поверхность.

Чтобы узнать, какая это поверхность, умножим уравнение (4) на ϱ и сделаем подстановку (стр. 98):

$$x - x' = m\varrho,\ y - y' = n\varrho,\ z - z' = p\varrho,$$

где x, y, z—координаты какой-нибудь точки хорды. Получим:

$$(x - x')\,F'_{x'} + (y - y')\,F'_{y'} + (z - z')\,F'_{z'} = 0. \qquad (5)$$

Этому уравнению в текущих координатах x, y, z должны удовлетворять точки всех хорд, делящихся в O' пополам.

Так как это уравнение 1-й степени, то оно представляет плоскость. Итак, геометрическое место всех хорд, проходящих через данную точку и делящихся в ней пополам, есть плоскость. Предположим, что эта плоскость найдена. Она пересечет поверхность по кривой 2-го порядка. Центр этой кривой будет находиться в точке O', так как все хорды кривой в этой точке делятся пополам. Из этого следует, что через каждую точку можно провести одну секущую плоскость таким образом, чтобы данная точка была центром той кривой, которая получится в пересечении этой плоскости с поверхностью 2-го порядка. Уравнение (5) мы встречали как уравнение касательной плоскости (стр. 98). Поэтому, если точка O' лежит на поверхности, то уравнение (5) есть уравнение касательной плоскости; если эта точка не лежит на поверхности, то это уравнение плоскости того сечения, для которого все хорды, проходящие через O', делятся в этой точке пополам.

Посмотрим, нет ли такой точки, для которой вышеупомянутая плоскость становится неопределенной, т.-е. в которой всякая хорда делилась бы пополам. Если мы хотим, чтобы в данной точке всякая хорда делилась пополам, то надо, чтобы на угловые коэффициенты хорды не налагалась никакая связь; другими словами, надо, чтобы уравнение (4) обращалось в тождество, а для этого необходимо, чтобы коэффициенты при m, n, p были нулями, т.-е.

$$F'_{x'} = 0,\ F'_{y'} = 0,\ F'_{z'} = 0. \qquad (6)$$

Если мы найдем такую точку, координаты которой удовлетворяют этим трем равенствам, то всякая хорда, проходящая через эту точку, делится в ней пополам. Такая точка называется центром

поверхности 2-го порядка. Для определения координат центра имеем три уравнения (6). Напишем эти уравнения в раскрытой форме:

$$\begin{aligned} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24} &= 0. \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Решая уравнения (7) и обозначая координаты центра через x, y, z, получим:

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad z = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{8}$$

Как мы видим, знаменатель выражений для x, y, z есть минор дискриминанта A уравнения поверхности (стр. 101), соответствующий элементу a_{44}. Его мы обозначим через A_{44}.

Чтобы получить выражения для числителей, надо в A_{44} коэффициенты при определяемом неизвестном заменить известными членами. Эти выражения мы обозначим через A_{41}, A_{42}, A_{43}. Таким образом:

$$x = -\frac{A_{41}}{A_{44}}, \quad y = -\frac{A_{42}}{A_{44}}, \quad z = -\frac{A_{43}}{A_{44}}. \tag{9}$$

Исследуем эти решения. Если знаменатель не равен нулю, то для координат центра получаем конечные определенные выражения. В этом случае мы будем иметь центральные поверхности 2-го порядка. Если знаменатель A_{44} равен нулю, то для координат центра получим бесконечные решения. Поверхности 2-го порядка, имеющие бесконечно удаленный центр, называются параболоидами. Так как элементы минора A_{44} не имеют указателя 4, то A_{44} представляет дискриминант старших членов уравнения поверхности 2-го порядка. Следовательно, если дискриминант старших членов уравнения поверхности 2-го порядка не нуль, то имеем центральные поверхности; если же он равен нулю, то параболоид.

Легко убедиться, что параболоиды пересекают бесконечно удаленную плоскость по паре прямых, т.-е. по распадающейся кривой 2-го порядка. В самом деле, минор A_{44} есть дискриминант уравнения (8) (стр. 102), однородного относительно трех неизвестных x, y, z и представляющего конус, направленный из начала координат в бесконечно удаленные точки нашей поверхности. Но из геометрии на плоскости известно, что если дискриминант однородного уравнения 2-ой степени с тремя неизвестными равен нулю, то левая часть уравнения распадается на два множителя первой степени. Следовательно, в нашем случае конус (8) (стр. 102) распадается на пару плоскостей и потому пересекает бесконечно удаленную плоскость по паре прямых; а так как этот конус направлен в бесконечно удаленные точки параболоида, то и параболоид пересекает бесконечно удаленную плоскость по паре прямых.

Если поверхность 2-го порядка представляет конус, то дискриминант ее уравнения равен нулю (стр. 101). При этом уравнения (7) тождественны с уравнениями (4) стр. 101, определяющими вершину конуса. Следовательно, центр конуса находится в его вершине.

Цилиндр имеет бесчисленное множество центров, расположенных вдоль некоторой прямой линии. В самом деле, для цилиндра, как и для конуса, дискриминант A равен нулю. Так как, далее, цилиндр есть конус с бесконечно удаленною вершиною, то из формул (8) видно, что для цилиндра дискриминант A_{44} обращается в нуль. Но из теории детерминантов известно, что если детерминант равен нулю, то его миноры, принадлежащие соответственным элементам двух рядов, пропорциональны между собою. Следовательно, если $A_{44}=0$, то и $A_{14}=0$, $A_{24}=0$, $A_{34}=0$. Отсюда видно, что выражения (8), представляющие координаты центра, принимают в нашем случае неопределенный вид; а это значит, что из трех уравнений (7), определяющих центр цилиндра, одно есть следствие двух других. Отсюда следует, что цилиндр имеет бесконечное множество центров, расположенных на прямой, определяемой двумя из уравнений (7).

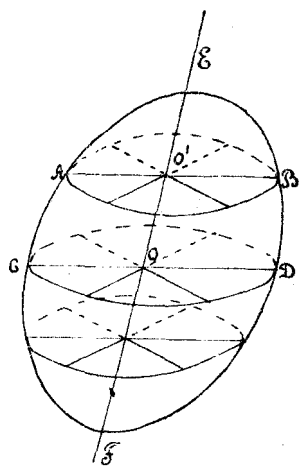
Прямые, проходящие через центр, называются диаметрами поверхности второго порядка. Очевидно, что все диаметры параболоида параллельны между собою, так как центр параболоида лежит в бесконечности

Пусть у нас есть поверхность 2-го порядка (черт. 50). Проведем через ее центр диаметр с угловыми коэффициентами m', n', p'. Пусть будет O' $(x'\ y'\ z')$ одна из точек, лежащих на этом диаметре. Будем искать плоскость, в которой лежат хорды, делящиеся в O' пополам. Пусть будут m, n, p угловые коэффициенты одной из таких хорд. Условие, чтобы хорда $(m,\ n,\ p)$ делилась в точке O' пополам, таково (стр. 109):

$$mF''_{x'} + nF''_{y'} + pF''_{z'} = 0. \quad (4)$$

Выразим координаты точки O' через координаты центра формулами (стр. 108):

$$x' = \bar{x} + m'\varrho, \quad y' = y + n'\varrho,$$
$$z' = \bar{z} + p'\varrho. \quad (10)$$



Черт. 50.

Вставим выражения (10) в уравнение (4). В полученных формулах везде, где стояли $x'\ y'\ z'$, станут $x\ y$ Сокращенно их будем обозначать через $F_{\bar{x}}$, $F_{\bar{y}}$, $F_{\bar{z}}$. Получим следующее:

$$m(F_{\bar{x}} + a_{11}m'\varrho + a_{12}n'\varrho + a_{13}p'\varrho) +$$
$$+ n(F_{\bar{y}} + a_{21}m'\varrho + a_{22}n'\varrho + a_{23}p'\varrho) +$$
$$+ p(F_{\bar{z}} + a_{31}m'\varrho + a_{32}n'\varrho + a_{33}p'\varrho) = 0. \quad (11)$$

Так как $\bar{x}$, y, $\bar{z}$, — координаты центра, то $F_{\bar{x}} = 0$, $F_{\bar{y}} = 0$, $F_{\bar{z}} = 0$, все уравнение (11) можно сократить на ϱ, и в результате получим:

$$m(a_{11}m' + a_{12}n' + a_{13}p') + n(a_{21}m' + a_{22}n' + a_{23}p') +$$
$$+ p(a_{31}m' + a_{32}n' + a_{33}p') = 0. \quad (12)$$

Это уравнение связывает между собою угловые коэффициенты m', n', p' того диаметра поверхности 2-го порядка, на котором лежит точка O', с угловыми коэффициентами тех хорд, которые делятся в точке O' пополам.

Будем перемещать точку O' по диаметру $(m',\ n',\ p')$, на котором она была взята; тогда уравнение (12) будет сохранять прежний вид. Это показывает, что если в данной точке какого-нибудь диаметра делятся пополам хорды какого-нибудь направления, то и во всех других точках того же диаметра будут делиться попо-

лам хорды того же направления. Из этого следует, что те сечения поверхности второго порядка, которые имеют центры в точках одного и того же диаметра, все параллельны между собою.

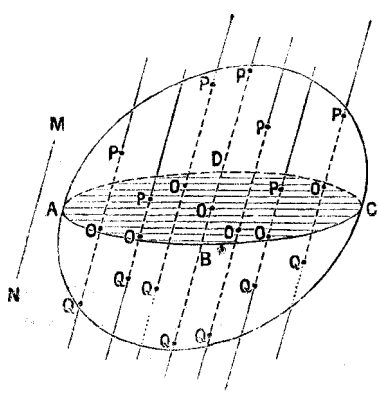
Рассмотрим сечение, имеющее центр в точке O'. Для точек этого сечения имеет место уравнение (4) стр. 109, а потому уравнение (7) стр: 96 принимает в нашем случае вид:

$$M\varrho^2 + P = 0. \qquad (13)$$

Будем перемещать точку O' по диаметру (m', n', p'). Тогда уравнение (12) не изменит своего вида, и потому коэффициенты m, n, p, сохранят свое значение. Следовательно, при перемещении точки O' коэффициент M меняться не будет, а будет меняться только P. Отсюда следует, что при перемещении точки O' все значения ϱ, удовлетворяющие уравнению (13), будут изменяться пропорционально. Это показывает, что сечения поверхности 2-го порядка, имеющие центры на одном диаметре и, следовательно, лежащие в параллельных плоскостях, подобны между собою.

8. Диаметральные плоскости поверхностей второго порядка.

В предыдущем мы рассматривали тот случай, когда была дана точка и требовалось найти направление хорд, которые бы делились пополам в этой точке. Теперь решим обратную задачу: дано направление NM хорд PQ и требуется отыскать геометрическое место их средин 0 (черт. 51).



Черт. 51.

Возьмем уравнение:

$$M\varrho^2 + 2N\varrho + P = 0.$$

Для того, чтобы хорды делились в некоторой точке пополам, должно, как мы видели, удовлетворяться соотношение $N = 0$ или

$$mF'_{x'} + nF'_{y'} + pF'_{z'} = 0. \qquad (1)$$

В предыдущем параграфе мы предполагали данными x', y', z' и искали m', n', p'. Теперь нам даны m, n, p и надо найти $x', y' z'$.

Так как между тремя координатами существует одно соотношение (1) и притом оно первой степени, то средины всех хорд данного направления лежат в некоторой плоскости. Эта плоскость называется диаметральною плоскостью, сопряженною хордам данного направления. Таким образом, геометрическое место средин хорд данного направления есть диаметральная плоскость, сопряженная этому направлению. Так как теперь в соотношении (1) x' y' z' будут текущими координатами, то мы их заменим через x, y, z и тогда получим:

$$mF_x + nF_y + pF_z = 0. \qquad (2)$$

Таково уравнение диаметральной плоскости, сопряженной хордам направления m, n, p. Легко видеть, что все диаметральные плоскости проходят через центр поверхности. В самом деле, если x, y, z — координаты центра, то

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0,$$

а при этом условии соотношение (2) удовлетворяется при всяких m, n, p.

Установим теперь понятие о сопряженных диаметрах. Диаметр называется сопряженным данной диаметральной плоскости, если он параллелен тем хордам, которые этою плоскостью делятся пополам. Таким образом, для каждой диаметральной плоскости существует свой сопряженный диаметр и для каждого диаметра существует сопряженная ему диаметральная плоскость. Проведем в этой диаметральной плоскости любой диаметр. Такой диаметр называется сопряженным с первым. Итак, два диаметра называются сопряженными, когда один из них лежит в диаметральной плоскости, сопряженной другому. Таким образом, у каждого диаметра существует бесконечное множество ему сопряженных; все они лежат в диаметральной плоскости, ему сопряженной. Отсюда следует, что всякий диаметр делит пополам хорды, параллельные каждому из диаметров, ему сопряженных.

Выведем связь между угловыми коэффициентами двух сопряженных диаметров. Обозначим угловые коэффициенты первого диаметра через m, n, p, а второго через m', n', p'. По определению, второй диаметр лежит в диаметральной плоскости, сопряженной

первому диаметру. Уравнение диаметральной плоскости, сопряженной первому диаметру есть:

$$mF_x + nF_y + pF_z = 0.$$

Так как все диаметры проходят через центр, то уравнение второго диаметра будет:

$$\frac{x-\bar{x}}{m'} = \frac{y-\bar{y}}{n'} = \frac{z-\bar{z}}{p'}.$$

того, чтобы второй диаметр был сопряжен первому, необходимо, чтобы второй лежал в диаметральной плоскости, сопряженной первому диаметру. Напишем уравнение этой плоскости в раскрытой форме:

$$m(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + n(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + \\ + p(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0,$$

или:

$$(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p)x + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p)y + \\ + (a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p)z + (a_{14}m + a_{24}n + a_{34}p) = 0.$$

Выражения, заключенные в скобки, представляют угловые коэффициенты диаметральной плоскости. Напишем теперь условия, чтобы второй диаметр лежал в этой диаметральной плоскости.

Если уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и уравнение прямой

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p},$$

то условия того, чтобы эта прямая лежала в плоскости, суть (стр. 74):

$$Aa + Bb + Cc + D = 0,$$
$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Первое условие выражает, что точка (a, b, c) лежит в данной плоскости. В нашем случае эта точка есть центр (x, y, z) поверхности 2-го порядка; так как все диаметры проходят через центр, то первое условие удовлетворяется; значит, нужно только, чтобы

было удовлетворено второе условие, т.-е. чтобы удовлетворялось условие:

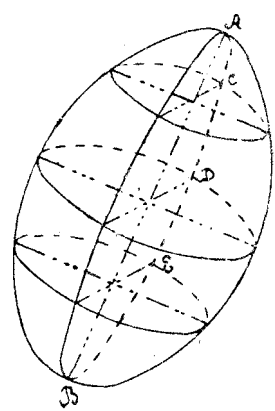
$$(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p)m' + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p)n' + \\ + (a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p)p' = 0, \qquad (3)$$

или

$$a_{11}mm' + a_{22}nn' + a_{33}pp' + a_{23}(np' + pn') + a_{31}(pm' + mp') + \\ + a_{12}(mn' + nm') = 0.$$

Вот соотношение, связывающее угловые коэффициенты двух сопряженных диаметров. Оно симметрично относительно коэффициентов, m, n, p и m', n', p', т.-е. оно не меняет своего вида, если вместо m, n, p поставим m', n', p' и наоборот. Это показывает, что сопряженность двух диаметров есть свойство взаимное, т.-е. если первый диаметр сопряжен второму, то и второй сопряжен первому. Другими словами, если первый диаметр лежит в диаметральной плоскости сопряженной второму диаметру, то и второй диаметр лежит в диаметральной плоскости, сопряженной первому диаметру.

Направления, параллельные двум сопряженным диаметрам, называются направлениями, сопряженными относительно данной поверхности второго порядка.



Черт. 52.

Положим, что имеем какой-нибудь диаметр AB поверхности 2-го порядка (черт. 52). Возьмем любую диаметральную плоскость $ACDEB$, проходящую через этот диаметр. Эта диаметральная плоскость будет делить пополам хорды определенного направления. Проведем через все точки диаметра хорды этого направления; все эти хорды диаметром делятся пополам, так как они сопряжены с диаметральною плоскостью, проходящею через этот диаметр. Отсюда следует, что если в какой-нибудь точке диаметра хорда некоторого направления делится пополам, то и во всех других точках диаметра будут делиться пополам хорды такого же направления, как мы это уже видели выше (стр. 114). Но, сверх

того, из определения сопряженных диаметров следует, что геометрическое место хорд, делящихся пополам в какой-нибудь точке диаметра, есть плоскость, параллельная диаметральной плоскости, сопряженной с этим диаметром.

9. Асимптоты поверхности второго порядка.

Посмотрим, не существует ли таких диаметров, которые были бы сами себе сопряжены, т.-е. таких диаметров, которые лежали бы в сопряженной им диаметральной плоскости. Связь между угловыми коэффициентами двух сопряженных диаметров такова:

$$a_{11}mm' + a_{22}nn' + a_{33}pp' + a_{23}(np' + pn') + a_{31}(pm' + mp') + \\ + a_{32}(mn' + nm') = 0.$$

Если диаметр сам с собою сопряжен, то m, n, p и m', n', p' равны между собою, и мы будем иметь:

$$a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{23}np + 2a_{31}pm + 2a_{12}mn = 0. \qquad (1)$$

Но левая часть соотношения (1) есть коэффициент M в уравнении

$$MQ^2 + 2NQ + P = 0.$$

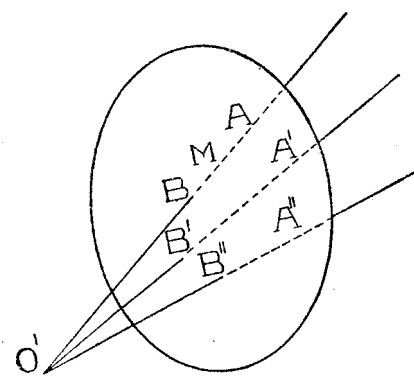
Если же $M = 0$, то один из корней этого уравнения будет бесконечно велик. Следовательно, диаметры, сопряженные сами себе, суть те, которые направлены в бесконечно удаленные точки поверхности. Такие диаметры называются асимптотами поверхности 2-го порядка. Очевидно, что таких диаметров бесконечное множество, так как мы имеем для них только одну зависимость между их угловыми коэффициентами. Поэтому асимптоты образуют поверхность, именно—конус, так как все они выходят из одной точки—центра. Этот конус, образуемый асимптотами, называется асимптотическим конусом поверхности 2-го порядка.

10. Полюсы и полярные плоскости.

Положим, что мы имеем поверхность 2-го порядка и некоторую точку O' вне или внутри ее; будем называть эту точку полюсом (черт. 53). Будем проводить из этой точки всевозможные секущие. Каждая из них пересечет поверхность в двух точках: A и B, A' и B', A'' и B''. Будем искать четвертую гармони-

ческую к O' по отношению к каждым двум точкам: A и B, A' и B'... Эти четвертые гармонические образуют некоторую поверхность. Положим, что четвертая гармоническая O' относительно точек A и B будет M. Тогда

$$\frac{O'A}{O'B} = \frac{MA}{BM}. \qquad (1)$$

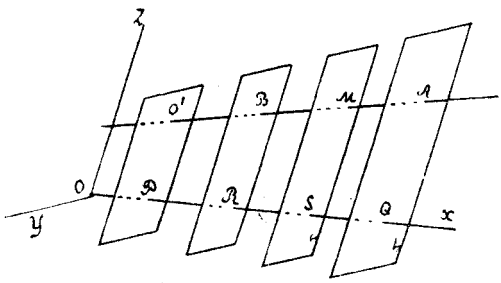


Черт. 53.

Обозначим координаты точки O' через x', y', z', точки M — x, y, z; A — x_1, y_1, z_1; B — x_2, y_2, z_2. Рассмотрим прямую $O'BA$ отдельно. Проведем через точки O', B, M, A плоскости параллельные плоскости YZ (черт. 54). Эти плоскости встретят ось X соответственно в точках P, R, S, Q. Известно, что параллельные плоскости отсекают от двух прямых пропорциональные части. Из этого следует:

$$\frac{O'A}{O'B} = \frac{PQ}{PR}, \qquad \frac{MA}{BM} = \frac{SQ}{RS}.$$

Таким образом, пропорция (1), выражающая гармоническое отношение отрезков, может быть заменена следующей:



Черт. 54.

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{SQ}{RS}, \qquad (2)$$

или:

$$\frac{OQ - OP}{OR - OP} = \frac{OQ - OS}{OS - OR}.$$

Внося в последнюю пропорцию выражения координат, получим:

$$\frac{x_1 - x'}{x_2 - x'} = \frac{x_1 - x}{x - x_2} \qquad (3)$$

Введем сюда вместо декартовых координат полярные. Обозначим через ϱ_1 и ϱ_2 величины, пропорциональные расстоянию точки O'

от двух точек на поверхности A и B, и через ϱ величину, пропорциональную расстоянию точки O' от четвертой гармонической M. Тогда:

$$x = x' + m\varrho,\ x_1 = x' + m\varrho_1,\ x_2 = x' + m\varrho_2.$$

Если эти выражения внесем в уравнение (3), то получим:

$$\frac{m\varrho_1}{m\varrho_2} = \frac{m(\varrho_1 - \varrho)}{m(\varrho - \varrho_2)},\ \text{или}\ \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho - \varrho_2} \tag{4}$$

Неизвестное здесь есть ϱ. Освобождаясь от знаменателей, получим:

$$\varrho\varrho_1 - \varrho_1\varrho_2 = \varrho_1\varrho_2 - \varrho\varrho_2,$$

или

$$\varrho(\varrho_1 + \varrho_2) = 2\varrho_1\varrho_2,$$

откуда:

$$\varrho = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}. \tag{5}$$

Величины ϱ_1 и ϱ_2, пропорциональные расстояниям точек A и B до O', как известно, определяются из уравнения (7) (стр. 96):

$$M\varrho^2 + 2N\varrho + P = 0.$$

На основании свойств корней квадратного уравнения имеем:

$$\varrho_1\varrho_2 = \frac{P}{M},\quad \varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{2N}{M}. \tag{6}$$

Внося выражения (6) в уравнение (5), находим:

$$\varrho = -\frac{P}{N},\ \text{или}$$

$$\varrho = \frac{2F'}{mF'_x + nF'_y + pF'_z} \tag{7}$$

Освобождая уравнения (7) от знаменателя и перенося все члены в левую часть, получим:

$$\varrho(mF'_{x'} + nF'_{y'} + pF'_{z'}) + 2F' = 0. \tag{8}$$

Таким образом, для всех четвертых гармонических точек к O' координата ϱ должна удовлетворять этому уравнению 1-ой степени.

Зная, что

$$x - x' = m\varrho,\ y - y' = n\varrho,\ z - z' = p\varrho,$$

переходим к уравнению в декартовых координатах:

$$(x - x')F'_{x'} + (y - y')F'_{y'} + (z - z')F'_{z'} + 2F' = 0. \qquad (9)$$

Это уравнение первой степени относительно текущих координат x, y, z точки M; значит, оно представляет плоскость. Следовательно, геометрическое место четвертых гармонических к точке по отношению к данной поверхности 2-го порядка есть плоскость. Она называется полярною плоскостью, а точка O' — ее полюсом. Таким образом, каждой точке соответствует относительно данной поверхности 2-го порядка своя полярная плоскость, и каждой плоскости—свой полюс.

Преобразуем уравнение полярной плоскости, вводя однородные координаты. На основании теоремы Эйлера имеем:

$$x'F'_{x'} + y'F'_{y'} + z'F'_{z'} + t'F'_{t'} = 2F'.$$

Складывая это тождество с уравнением (9) и заменяя t' через t, находим:

$$xF'_{x'} + yF'_{y'} + zF'_{z'} + tF'_{t'} = 0. \qquad (10)$$

Это уравнение совершенно такое же, как уравнение касательной плоскости (стр. 98). Следовательно, если точка (x', y', z') лежит на поверхности, то уравнение (10) представляет касательную плоскость. Значит, касательная плоскость есть полярная плоскость, полюс которой лежит на поверхности,—именно в точке прикосновения.

Левая часть уравнения (10) называется полярною формою однородного многочлена $2F$ относительно точки (x', y', z', t'). Вообще, формою называется всякий однородный многочлен.

11. Полярная сопряженность точек и плоскостей.

Будем называть все точки, лежащие в полярной плоскости, полярно-сопряженными по отношению к полюсу этой плоскости. Докажем, что полярная сопряженность двух точек взаимна, т.-е. если первая точка лежит в полярной плоскости второй точки, то вторая точка лежит в полярной плоскости первой точки.

Напишем левую часть уравнения (10) в раскрытом виде и соберем члены, имеющие одинаковые коэффициенты:

$$xF'_{x'}+yF'_{y'}+zF'_{z'}+tF'_{t'}=$$

$$=x(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z'+a_{14}t')+y(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'+a_{24}t')+$$
$$+z(a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'+a_{34}t')+t(a_{41}x'+a_{42}y'+a_{43}z'+a_{44}t')=$$
$$=a_{11}xx'+a_{22}yy'+a_{33}zz'+a_{23}(yz'+zy')+a_{31}(zx'+xz')+$$
$$+a_{12}(xy'+yx')+a_{14}(xt'+tx')+a_{24}(yt'+ty')+a_{34}(zt'+tz')+a_{44}tt'$$

Из последнего выражения видно, что левая часть уравнения полярной плоскости симметрична относительно x, y, z и x', y', z', т.-е. если на место x, y, z поставим x', y', z' и наоборот, то выражение не изменит своего вида. Другими словами, мы имеем тождество:

$$xF'_{x'}+yF'_{y'}+zF'_{z'}+tF'_{t'}=x'F_x+y'F_y+z'F_z+t'F_t.$$

Таким образом, уравнение полярной плоскости может быть написано в следующих видах:

$$xF'_{x'}+yF'_{y'}+zF'_{z'}+tF'_{t'}=0,$$
$$x'F_x+y'F_y+z'F_z+t'F_t=0.$$

Пусть у нас есть две точки с координатами x', y', z' и x'', y'', z''. Положим, что вторая точка лежит в полярной плоскости первой точки; докажем, что первая точка лежит в полярной плоскости второй точки. Уравнение полярной плоскости первой точки есть:

$$xF'_{x'}+yF'_{y'}+zF'_{z'}+tF'_{t'}=0.$$

Если вторая точка лежит в этой полярной плоскости, то должно существовать соотношение:

$$x''F'_{x'}+y''F'_{y'}+z''F'_{z'}+t''F'_{t'}=0. \qquad (1)$$

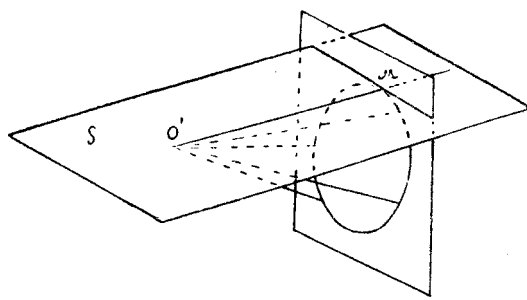
Но мы видели, что уравнение полярной плоскости второй точки можно представить еще в такой форме:

$$x''F_x+y''F_y+z''F_z+t''F_t=0. \qquad (2)$$

Сравнивая между собою уравнения (1) и (2), мы видим, что если, вместо текущих координат, в уравнение (2) вставим координаты первой точки, то мы удовлетворим этому уравнению; а это пока-

зывает, что первая точка лежит в полярной плоскости второй точки. Итак, полярная сопряженность двух точек есть сопряженность взаимная.

Понятие о полярной сопряженности двух точек позволит нам доказать еще одно свойство полярной плоскости. Докажем, что полярная плоскость есть геометрическое место точек прикосновения касательных прямых, выходящих из полюса. Пусть точка O' есть полюс (черт. 55). Обозначим через M точку прикосновения одной из касательных, выходящих из O'. Так как точка M лежит на поверхности, то (стр. 121) ее полярная плоскость S есть касательная плоскость к поверхности в точке M. Прямая $O'M$ лежит в этой плоскости, как касательная к поверхности в M; отсюда следует, что полярная плоскость точки M проходит через O'. По закону взаимной полярной сопряженности полярная плоскость точки O' проходит через точку M. Итак, полярная плоскость проходит через точки прикосновения всех касательных, выходящих из полюса; следовательно, чтобы найти все касательные из полюса, надо найти линию пересечения его полярной плоскости с поверхностью 2-го порядка, и тогда каждая точка этой линии будет точкою прикосновения одной из касательных, выходящих из полюса. Если проведем все касательные прямые из полюса, то получим конус, опирающийся на кривую 2-го порядка, так как плоскость пересекается с поверхностью по кривой 2-го порядка. Итак, касательные, проведенные из какой-нибудь точки к поверхности 2-го порядка, образуют конус 2-го порядка, описанный около этой поверхности, и касаются поверхности по линии, полученной от пересечения этой поверхности с полярной плоскостью этой точки.



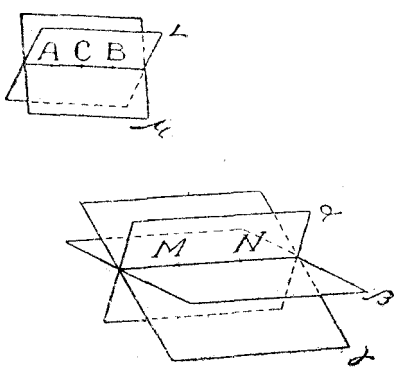
Черт. 55.

Перейдем теперь к вопросу о полярной сопряженности плоскостей. Будем называть две плоскости полярно-сопряженными,

если каждая из них проходит через полюс другой. Эта сопряженность также взаимная. Действительно, пусть имеем две плоскости и пусть первая a проходит через полюс B другой плоскости b. Тогда плоскость b, на основании взаимной сопряженности точек, пройдет через полюс A первой плоскости. Итак, сопряженность двух плоскостей есть взаимная: каждой плоскости сопряжены все плоскости, проходящие через ее полюс.

12. Полярная сопряженность прямых.

Две прямые называются взаимно-полярными, если на каждой из них лежат полюсы всех плоскостей, проходящих через другую прямую. Пусть имеем прямую линию MN. Найдем ей взаимно-полярную относительно данной поверхности 2-го порядка. Возьмем одну плоскость α, проходящую через прямую; у нее будет свой определенный полюс A (черт. 56). Возьмем через ту же прямую другую плоскость β; пусть ей соответствует полюс B. Тогда прямая AB будет взаимно-полярною с первою прямою MN. Это значит, что, если мы проведем через прямую MN третью плоскость γ, то ее полюс будет лежать где-нибудь на прямой AB. Докажем это.



Черт. 56.

Возьмем на первой прямой какие-нибудь две точки M и N и найдем их полярные плоскости. Так как точки M и N взяты на прямой, лежащей в плоскостях α и β, то, по свойству полярной сопряженности точек и плоскостей, полярные плоскости точек M и N пройдут через обе точки A и B. Возьмем третью плоскость γ, проходящую через прямую MN. Так как эта плоскость проходит через точки M и N, то полюс ее C будет лежать как в плоскости μ, так и в плоскости ν, т.-е. на линии пересечения этих плоскостей AB, что и требовалось доказать.

Из этого доказательства видно, что полярность двух прямых есть свойство взаимное, т.-е., что если полюсы плоскостей, проходящих через одну прямую, лежат на другой прямой, то полюсы плоскостей, проходящих через вторую прямую, лежат на первой прямой.

Из определения взаимно-полярных прямых следует, что все точки одной из двух взаимно-полярных прямых полярно сопряжены всем точкам другой прямой. Это видно из того, что полярные плоскости всех точек одной прямой проходят через другую. Точно также все плоскости, проходящие через одну из двух прямых, полярно сопряжены всем плоскостям, проходящим через другую прямую.

Легко видеть, что, если мы имеем поверхность 2-го порядка и две взаимно-полярные прямые, то, проведя третью прямую так, чтобы она пересекала обе полярные прямые, и отметив точки пересечения этой прямой с нашею поверхностью, получим четыре гармонические точки. В самом деле, возьмем за полюс точку пересечения третьей прямой с первою полярною прямою; полярная плоскость этой точки пройдет через вторую полярную прямую; а известно, что полюс есть четвертая гармоническая двух точек пересечения третьей прямой с поверхностью и точки пересечения той же прямой с полярною плоскостью.

Две прямые, из которых каждая пересекает прямую, взаимно-полярную с другою, называются полярно-сопряженными.

13. Полярные плоскости бесконечно-удаленных точек.

Пусть нам дана точка O' с координатами x', y', z'. Составим уравнение ее полярной плоскости:

$$x'F_x + y'F_y + z'F_z + t'F_t = 0.$$

Предположим, что полюс O' удаляется в бесконечность по направлению, определяемому угловыми коэффициентами m, n, p. Тогда уравнения прямой, по которой точка O' удаляется в бесконечность, суть:

$$\frac{x - x'}{m} = \frac{y - y'}{n} = \frac{z - z'}{p}$$

Обозначим каждое из этих отношений через ϱ. Тогда (см. стр. 95)

$$x = x' + m\varrho,\ y' = y' + n\varrho,\ z = z' + p\varrho.$$

Положим, что одно из положений нашей точки при удалении ее в бесконечность есть точка O'' с координатами x'', y'', z''. Тогда:

$$x'' = x' + m\varrho, y'' = y' + n\varrho,\ z'' = z' + p\varrho.$$

Вставив это в уравнение полярной плоскости, имеем:

$$(x' + m\varrho) F_x + (y' n\varrho) F_y + (z' + p\varrho) F_z + t' F_t = 0,$$

или

$$x' F_x + y' F_y + z' F_z + t' F_t + (mF_x + nF_y + pF_z)\varrho = 0.$$

Если точка O'' (x'', y'', z'') удаляется в бесконечность, то ϱ возрастает до бесконечности. Посмотрим, во что обратится тогда уравнение полярной плоскости. Разделим все уравнение на ϱ:

$$\frac{1}{\varrho}(x' F_x + y' F_y + z' F_z + t' F_t) + mF_x + nF_y + pF_z = 0.$$

При $\varrho = \infty$ первая скобка исчезнет, и у нас останется:

$$mF_x + nF_y + pF_z = 0.$$

Но это есть уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению m, n, p. (стр. 115). Итак, **каждая диаметральная плоскость есть полярная плоскость той бесконечно удаленной точки, через которую проходят сопряженные ей хорды.** Так как все диаметральные плоскости проходят через центр, то полюсы всех диаметральных плоскостей лежат в полярной плоскости центра (стр. 123). Это показывает, что полярная плоскость центра поверхности 2-го порядка содержит все бесконечно удаленные точки. Следовательно, **центр поверхности 2-го порядка есть полюс бесконечно удаленной плоскости.** Так как центр параболоида лежит в бесконечности, т.-е. на своей полярной плоскости, то отсюда следует, что параболоид касается бесконечно удаленной плоскости (стр. 121).

Так как две точки полярно сопряжены, когда каждая из них лежит в полярной плоскости другой точки, то отсюда следует, что две бесконечно удаленные точки сопряжены, если одна из них лежит в диаметральной плоскости, сопряженной тем хордам, которые проходят через другую точку, т.-е. если одна из них лежит

на одном из диаметров, сопряженных диаметру, проходящему через другую точку. Это значит, что направления двух полярно-сопряженных бесконечно удаленных точек суть направления двух сопряженных диаметров поверхности 2-го порядка.

Посмотрим, где находится прямая, взаимно-полярная диаметру. Мы найдем эту прямую, если найдем полярные плоскости двух точек этого диаметра; линия пересечения этих плоскостей и будет взаимно-полярная данному диаметру. За одну из таких точек естественно принять центр; его полярная плоскость есть бесконечно удаленная плоскость. За вторую точку мы примем бесконечно удаленную точку диаметра; его полярная плоскость будет диаметральная плоскость, сопряженная этому диаметру. Следовательно, прямая, взаимно-полярная диаметру, лежит на пересечении диаметральной плоскости, сопряженной этому диаметру, и бесконечно удаленной плоскости. Иными словами, прямая, взаимно-полярная диаметру поверхности 2-го порядка, есть бесконечно удаленная прямая диаметральной плоскости, сопряженной этому диаметру.

Проведем через любую точку диаметра прямую, параллельную диаметральной плоскости, сопряженной этому диаметру. Пусть она встречает поверхность в двух точках. Так как прямая параллельна диаметральной плоскости, то она пересекает бесконечно удаленную прямую этой плоскости; следовательно, прямая проходит через две полярные прямые, и три точки пересечения этой прямой с диаметром и поверхностью имеют четвертую гармоническую в бесконечности. Но мы знаем, что если из четырех гармонических точек одна лежит в бесконечности, то ей сопряженная делит расстояние между двумя остальными точками пополам; следовательно, хорды, параллельные диаметральной плоскости, делятся сопряженным ей диаметром пополам (стр. 117).

Если мы имеем две прямые, взаимно-полярные относительно поверхности 2-го порядка, то (стр. 125) бесконечно удаленная точка одной прямой полярно сопряжена бесконечно удаленной точке другой прямой. Отсюда по предыдущему следует, что каждые две взаимно-полярные прямые соответственно параллельны двум сопряженным диаметрам поверхности 2-го порядка. Поэтому угловые коэффициенты m, n, p и m', n', p' двух взаимно-полярных прямых связанных уравнением (3), стр. 117.

ГЛАВА VI

Упрощение уравнений поверхностей второго порядка.

1. Уравнение относительно центра.

Возьмем уравнение поверхности 2-го порядка:

$$2F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Если мы перенесем начало в какую-нибудь точку пространства (x', y', z'), то уравнение поверхности примет, как мы видели раньше (стр. 95), такой вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2xF'_{x'} + 2yF'_{y'} + 2zF'_{z'} + 2F' = 0.$$

Возьмем теперь точку (x', y', z') в центре поверхности. Тогда мы будем иметь (стр. 110):

$$F'_{x'} = 0, \qquad F'_{y'} = 0, \qquad F'_{z'} = 0.$$

В таком случае написанное выше уравнение поверхности представится в более простом виде:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2F' = 0.$$

Таким образом, если уравнение поверхности отнесено к центру, то оно не содержит членов с первыми степенями текущих координат. Обратное заключение также справедливо. В самом деле, пусть мы имеем уравнение поверхности, в котором отсутствуют члены с первыми степенями координат.

Пусть оно удовлетворяется координатами (a, b, c) какой нибудь точки; ясно, что оно удовлетворяется и координатами $(-a,-b,-c)$, так как текущие координаты входят в наше уравнение только или в квадратах, или в парных произведениях. Но если это так, то средина хорды, соединяющей точки (a, b, c) и $(-a,-b,-c)$, есть точка (0, 0, 0), т.-е. начало; а принимая во внимание, что точка (a, b, c) взята на поверхности произвольно, мы можем сказать, что всякая хорда, проходящая через начало, делится в начале пополам; следовательно, начало есть центр поверхности.

Посмотрим теперь, какую форму примет известный член нашего уравнения, если начало перенесем в центр. Для этого заметим, что на основании теоремы Эйлера имеем тождество:

$$2F' = x'F'_{x'} + y'F'_{y'} + z'F'_{z'} + t'F'_{t'},$$

которое, в виду того, что в нашем случае:

$$F'_{x'} = 0, \qquad F'_{y'} = 0, \qquad F'_{z'} = 0,$$

переходит в следующее:

$$2F' = t'F'$$

или, так как $t = 1$, то

$$2F' = F'_{t'}.$$

Преобразуем выражение $F'_{t'}$. Для этого из уравнений, определяющих координаты центра (x', y', z'), найдем эти координаты и подставим в $F'_{t'}$. Но можно поступить проще. Уравнения центра будут:

$$\begin{aligned} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}t' &= 0, \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24}t' &= 0, \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34}t' &= 0, \end{aligned}$$

а $F'_{t'}$ в раскрытом виде дает

$$a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}t' = F'_{t'}.$$

Из этих уравнений определим t'; для этого мы должны составить детерминант Δ из коэффициентов при неизвестных (стр. 101):

$$\Delta = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

и разделить на него детерминант, полученный от подстановки вместо элементов 4-го столбца известных членов этих уравнений. Так как последние все нули, за исключением $F'_t{}'$, то очевидно, что наш детерминант обратится в произведение $F'_t{}'$ на минор, соответствующий элементу a_{44}, т.-е. в A_{44} (стр. 111). Таким образом получаем:

$$t' = \frac{A_{44} \cdot F'_t{}'}{\Delta};$$

а так как $t' = 1$, то последнее соотношение представится так:

$$1 = \frac{F'_t{}' \cdot A_{44}}{\Delta}$$

отсюда:

$$F'_t{}' = 2F' = \frac{\Delta}{A_{44}}.$$

Следовательно, если уравнение поверхности 2-го порядка отнесено к центру, то известный член равен частному от деления детерминанта уравнения поверхности на детерминант старших членов этого уравнения.

Для конуса имеем $\Delta = 0$, следовательно $F'_t{}' = 0$, и уравнение делается однородным, что мы видели и раньше (стр. 102). Для поверхностей с бесконечно-удаленным центром, т.-е. для параболоидов, имеем $A_{44} = 0$ (стр. 111); следовательно, для таких поверхностей имеем $F^1 = \infty$. Понятно, что уравнения, отнесенного к центру, для таких поверхностей составить нельзя.

2. Уравнение относительно сопряженных диаметров.

Положим, что за две оси координат приняты две прямые, параллельные двум сопряженным диаметрам. Уравнения прямой, параллельной оси X, суть $y = b$, $z = c$. Сравнивая их с общими уравнениями прямой (стр. 70),

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p},$$

мы можем представить их в виде:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{0}$$

Это показывает, что для прямых, параллельных оси X, угловые коэффициенты n и p равны нулю. Точно так же найдем, что для прямых, параллельных оси Y, равны нулю m и p, а для прямых, параллельных оси Z, — m и n.

Полагая в условии сопряженности направлений (3) стр. 117 $n=0$, $p=0$, $m'=0$, $p'=0$, получим:

$$2a_{12}mn'=0;$$

откуда, так как $m\neq 0$ и $n'\neq 0$, находим:

$$a_{12}=0.$$

Следовательно, если две оси координат параллельны двум сопряженным диаметрам поверхности 2-го порядка, то уравнение не содержит членов с произведением координат, соответствующих этим осям.

Заметив это, возьмем теперь за ось Z произвольный диаметр и проведем через центр диаметральную плоскость, сопряженную этому диаметру. Если за ось X и ось Y примем какие-либо два диаметра, лежащие в указанной плоскости, то, вследствие сопряженности этих осей с осью Z, будут равны нулю a_{13} и a_{23}. Если потребуем, чтобы, кроме того, и диаметры, принятые за оси X и Y, были сопряженными, то будем иметь, что и a_{12} равно нулю. Тогда наше уравнение примет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}=0.$$

Таким образом, если за оси координат приняты диаметры, попарно сопряженные, то уравнение будет содержать только члены с квадратами координат и известный член.

3. Главные оси. Решающее уравнение.

Если мы возьмем какой-нибудь диаметр и соответствующую ему диаметральную плоскость, то, вообще она не будет перпендикулярна к тем хордам, которым она сопряжена. Тем не менее, существуют такие направления хорд, которые перпендикулярны к своим диаметральным плоскостям. Такие направления называются

главными, диаметры, им соответствующие, — осями поверхности, а диаметральные плоскости, им сопряженные, — главными диаметральными плоскостями. Положим, что поверхность 2-го порядка отнесена к прямоугольным осям координат; найдем ее главные направления. Рассмотрим хорды с угловыми коэффициентами m, n, p. Уравнение диаметральной плоскости, сопряженной этим хордам, будет:

$$mF_x + nF_y + pF_z = 0$$

или в раскрытой форме:

$$x(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p) + y(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p) + z(a_{31}m + a_{32}n + \\ + a_{33}p) + (a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p) = 0.$$

Чтобы направление m, n, p было главным, нужно чтобы диаметральная плоскость была перпендикулярна к сопряженным ей хордам, а для этого нужно (стр. 80), чтобы было:

$$\frac{a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p}{m} = \frac{a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p}{n} = \frac{a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p}{p}$$

Решив эти два однородные уравнения 2-й степени, мы найдем $m : n : p$. Но решать их непосредственно было бы слишком сложно; поэтому мы применим другой прием. Примем за вспомогательное неизвестное величину каждого из написанных отношений. Обозначая ее через S, будем иметь:

$$S = \frac{a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p}{m} = \frac{a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p}{n} = \frac{a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p}{p}.$$

Определив S, мы легко найдем отношения $m : n : p$. Напишем последние уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p &= mS, \\ a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p &= nS, \\ a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p &= pS, \end{aligned} \qquad (1)$$

или:

$$\begin{aligned} (a_{11} - S)m + a_{12}n + a_{13}p &= 0, \\ a_{21}m + (a_{22} - S)n + a_{23}p &= 0, \\ a_{31}m + a_{32}n + (a_{33} - S)p &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений, однородных относительно m, n, p, исключим m, n, p. Получим следующее уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-S & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-S & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-S \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Это есть детерминант A_{44} старших членов уравнения поверхности, в котором из диагональных членов вычтено S.

Раскрыв его, мы получим уравнение третьей степени относительно S, называемое р е ш а ю щ и м, корни которого, как мы впоследствии докажем, все действительны. В частности, легко видеть, что для параболоида одно из решений для S будет $S=0$; действительно, полагая в (2) $S=0$, мы получим детерминант старших членов A_{44}, который для параболоида равен нулю.

Найдя корни S_1, S_2, S_3, мы затем найдем из (1) три соответствующие им системы отношений $m:n:p$:

$$\begin{aligned} &m_1 : n_1 : p_1 \\ &m_2 : n_2 : p_2 \\ &m_3 : n_3 : p_3. \end{aligned}$$

Следовательно, у поверхности 2-го порядка есть три главных направления. Докажем, что, вообще, эти три направления взаимно сопряжены и перпендикулярны.

Для доказательства последнего предложения подставим в уравнения (1) два различных корня S_1, S_2 решающего уравнения и соответствующие им значения для m, n, p. Получим:

$$\begin{aligned} a_{11}m_1 + a_{12}n_1 + a_{13}p_1 &= S_1 m_1, \\ a_{21}m_1 + a_{22}n_1 + a_{23}p_1 &= S_1 n_1, \\ a_{31}m_1 + a_{32}n_1 + a_{33}p_1 &= S_1 p_1, \end{aligned} \qquad (1')$$

$$\begin{aligned} a_{11}m_2 + a_{12}n_2 + a_{13}p_2 &= S_2 m_2, \\ a_{21}m_2 + a_{22}n_2 + a_{23}p_2 &= S_2 n_2, \\ a_{31}m_2 + a_{32}n_2 + a_{33}p_2 &= S_2 p_2. \end{aligned} \qquad (2')$$

Помножим уравнения (1′) соответственно на m_2, n_2, p_2, а уравнения (2′) на m_1, n_1, p_1. Сложив после этого три уравнения (1′) и три уравнения (2′) и вычтя результаты, находим:

$$(S_1 - S_2)(m_1 m_2 + n_1 n + p_1 p_2) = 0. \qquad (3)$$

Случай $S_1 - S_2 = 0$ соответствует, как мы увидим ниже, поверхностям вращения. Во всех других случаях уравнение (3) дает

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (4)$$

Таким образом, во всех поверхностях второго порядка, кроме поверхностей вращения, главные направления взаимно перпендикулярны.

Помножим теперь опять уравнения (1′) на m_2, n_2, p_2 и сложим их. Получим:

$$a_{11}m_1m_2 + a_{22}n_1n_2 + a_{33}p_1p_2 + a_{23}(n_1p_2 + p_1n_2) + \\ + a_{31}(p_1m_2 + m_1p_2) + a_{12}(m_1n_2 + n_1m_2) = S_1(m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2).$$

По доказанному, множитель при S_1 равен нулю, следовательно,

$$a_{11}m_1m_2 + a_{22}n_1n_2 + a_{33}p_1p_2 + a_{23}(n_1p_2 + p_1n_2) + \\ + a_{31}(p_1m_2 + m_1p_2) + a_{12}(m_1n_2 + n_1m_2) = 0,$$

а это показывает (стр. 117), что главные направления m_1, n_1, p_1 и m_2, n_2, p_2 суть направления сопряженные.

Полученное нами соотношение (4) позволяет доказать несколько предложений относительно корней решающего уравнения (2). Докажем, что все корни решающего уравнения действительны. Предположим, что один из них, S_1, есть величина мнимая $u + iv$; тогда так как коэффициенты решающего уравнения действительны, мы должны иметь еще один мнимый корень S_2, сопряженный первому, т.-е. $u - iv$.

Подставив мнимое значение S_1 в уравнения (1), определяющие отношения m_1, n_1, p_1, мы найдем, что, по крайней мере, одно из чисел m_1, n_1, p_1 должно быть мнимым. Положим

$$m_1 = \alpha + i\alpha', \quad n_1 = \beta + i\beta', \quad p_1 = \gamma + i\gamma';$$

но так как корень S_2 отличается от корня S_1 только знаком при мнимой части, то, очевидно, и решения уравнений (1) для этого корня будут разниться только знаками при мнимых частях. Следовательно, мы будем иметь

$$m_2 = \alpha - i\alpha', \quad n_2 = \beta - i\beta', \quad p_2 = \gamma - i\gamma'.$$

Подставив теперь в равенство (4) найденные значения для $m_1, \ldots p_2$, получим:

$$(\alpha + i\alpha')(\alpha - i\alpha') + (\beta + i\beta')(\beta - i\beta') + (\gamma + i\gamma')(\gamma - i\gamma') = 0,$$

или:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2 = 0,$$

где по крайней мере, одно из чисел α', β', γ' не равно нулю. Но это невозможно; следовательно, решающее уравнение не может иметь мнимых корней.

Докажем теперь, что если $S_1 - S_2 = 0$, то отношения $m : n : p$, определяемые из уравнения (1), делаются неопределенными; другими словами, тогда два из уравнений (1) суть следствия третьего. Будем доказывать от противного допущения. Предположим, что при $S_1 = S_2$ отношения $m : n : p$ имеют вполне определенные значения. Изменим коэффициенты в уравнении поверхности второго порядка так, чтобы корни S_1 и S_2 решающего уравнения уже не были равны. Тогда, по предыдущему, будет:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (4)$$

Будем теперь приближать коэффициенты уравнения поверхности второго порядка обратно к их первоначальным значениям; тогда корни S_1 и S_2 будут сближаться между собою. Так как, по предположению, при $S_1 = S_2$ отношения $m : n : p$ имеют вполне определенные значения, то при приближении S_2 к S_1 — коэффициенты m_2, n_2, p_2 будут приближаться соответственно к m_1, n_1, p_1. Вследствие этого равенство (4) перейдет в пределе в следующее:

$$m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 = 0.$$

Но последнее равенство невозможно, так как сумма квадратов действительных количеств не может быть равна нулю. Так как последнее соотношение получилось оттого, что мы допустили, что уравнение (1) при $S_1 = S_2$ имеют определенные решения, то отсюда следует, что при $S_1 = S_2$ соответствующее главное направление становится неопределенным, а это значит, что в этом случае мы имеем поверхность вращения.

Пользуясь уравнением (1), напишем уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению главных хорд m_1, n_1, p_1. Уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению m_1, n_1, p_1, хорд, имеет вид (стр. 116).

$$(a_{11} m_1 + a_{12} n_1 + a_{13} p_1) x + (a_{21} m_1 + a_{22} n_1 + a_{23} p_1) y + \\ + (a_{31} m_1 + a_{32} n_1 + a_{33} p_1) z + (a_{41} m_1 + a_{42} n_1 + a_{43} p_1) = 0$$

Отсюда, на основании (1), находим:

$$S_1\ (m_1 x + n_1 y + p_1 z) + (a_{11} m + a_{12} n + a_{13} p) = 0. \qquad (5)$$

Таким образом, угловые коэффициенты главной диаметральной плоскости пропорциональны коэффициентам сопряженных хорд m_1, n_1, p_1, что и понятно, так как коэффициенты в уравнении плоскости, перпендикулярной к линии с угловыми коэффициентами m, n, p, должны быть пропорциональны последним (стр. 80).

Пусть теперь m, n, p будут равны косинусам углов, которые образуют главные направления с прежними осями координат (до сих пор они были только пропорциональны этим косинусам). Посмотрим, как изменится уравнение поверхности, отнесенное к центру, если за оси координат выберем главные оси поверхности. Пусть уравнение поверхности будет:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{23} yz + 2 a_{31} z x + 2 a_{12} xy + a_{44} = 0.$$

Формулы перехода от системы (x, y, z) к новой системе (x', y', z') таковы:

$$\begin{aligned} x &= x' m_1 + y' m_2 + z' m_3, \\ y &= x' n_1 + y' n_2 + z' n_3, \\ z &= x' p_1 + y' p_2 + z' p_3. \end{aligned} \qquad (6)$$

Вместо того, чтобы вставлять в уравнение поверхности значения, найденные для x, y, z, поступим так: помножим соответственно уравнения (6) первое на a_{11}, второе на a_{12}, третье на a_{13}, и сложим полученные результаты:

$$\begin{aligned} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = x' (a_{11} m_1 + a_{12} n_1 + a_{13} p_1) + \\ + y' (a_{11} m_2 + a_{12} n_2 + a_{13} p_2) + z' (a_{11} m_3 + a_{12} n_3 + a_{13} p_3). \end{aligned} \qquad (7)$$

Точно также, умножая уравнения (6) первое на a_{21}, второе на a_{22}, третье на a_{23} и складывая, получаем:

$$\begin{aligned} a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = x' (a_{21} m_1 + a_{22} n_1 + a_{23} p_1) + \\ + y' (a_{21} m_2 + a_{22} n_2 + a_{23} p_2) + z' (a_{21} m_3 + a_{22} n_3 + a_{23} p_3). \end{aligned} \qquad (8)$$

Наконец, умножая уравнения (6) первое на a_{31}, второе на a_{32}, третье на a_{33} и складывая, находим:

$$\begin{aligned} a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z = x' (a_{31} m_1 + a_{32} n_1 + a_{33} p_1) + \\ + y' (a_{31} m_2 + a_{32} n_2 + a_{33} p_2) + z' (a_{31} m_3 + a_{32} n_3 + a_{33} p_3). \end{aligned} \qquad (9)$$

Пользуясь равенствами (1), заменим выражения (8), (9), (10) такими:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = x'S_1m_1 + y'S_2m_2 + z'S_3m_3, \qquad (7')$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = x'S_1n_1 + y'S_2n_2 + z'S_3n_3, \qquad (8')$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = x'S_1p_1 + y'S_2p_2 + z'S_3p_3. \qquad (9')$$

Помножая теперь (7′) на x, (8′) на y, (9′) на z и складывая, находим, соединяя подобные члены:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = \\ = x'S_1(m_1x + n_1y + p_1z) + y'S_2(m_2x + n_2y + p_2z) + \\ + z'S_3(m_3x + n_3y + p_3z).$$

Выражения, стоящие в скобках, не что иное, как x', y', z'; чтобы в этом убедиться, нужно только заметить (стр. 30), что, решая уравнения (6) относительно x', y', z' мы получим выражения того же вида, в которых в системе девяти коэффициентов $m_1, \ldots p_3$, строки заменены столбцами и обратно. Таким образом, имеем тождество:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = \\ = S_1x'^2 + S_2y'^2 + S_3z'^2,$$

и уравнение поверхности, отнесенное к главным осям, представится в виде:

$$S_1x^2 + S_2y^2 + S_3z^2 + a_{44} = 0.$$

К такому виду можно привести уравнения всех центральных поверхностей 2-го порядка, т.-е. эллипсоидов и гиперболоидов, а также конусов. Для параболоидов такое преобразование невозможно, так как у параболоида центр лежит бесконечно далеко и потому его нельзя принять за начало координат. В самом деле, мы видели (стр. 133), что для параболоида один из корней решающего уравнения равен нулю. Полагая $S = 0$, мы найдем, что уравнение (5) диаметральной плоскости, сопряженной главному направлению $m:n:p$, обращается в

$$a_{41}m + a_{42}n_3 + a_{43}p = 0,$$

т.-е. представляет бесконечно удаленную плоскость; а так как на этой диаметральной плоскости лежат две из осей поверхности, то эти оси суть бесконечно удаленные прямые.

Но если в параболоиде мы не можем принять за оси координат главных осей, то мы можем, не меняя начала координат, взять оси координат параллельными главным направлениям поверхности. При таком преобразовании свободный член останется без изменения, и, следовательно, уравнение поверхности примет вид:

$$S_1x^2 + S_2y^2 + S_3z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Принимая во внимание, что один из корней S, например S_3, равен нулю, мы можем представить это уравнение так:

$$S_1x^2 + S_2y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Перенося теперь начало в какую-нибудь точку (x', y', z'), получим преобразованное уравнение:

$$S_1x^2 + S_2y^2 + 2xF''_{x'} + 2yF''_{y'} + 2zF''_{z'} + 2F'' = 0,$$

так как при преобразовании начала коэффициенты у старших членов не меняются. Выберем теперь точку (x', y', z') так, чтобы было

$$F''_{x'} = 0, \quad F''_{y'} = 0, \quad 2F'' = 0.$$

Тогда мы получим следующее упрощенное уравнение поверхности без центра:

$$S_1x^2 + S_2y^2 + 2zF''_{z'} = 0.$$

Таким образом, уравнение каждой поверхности второго порядка может быть приведено к одному из двух следующих видов:

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$ для центральной поверхности,

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{33}z = 0$ для поверхности без центра.

4. Сфера.

Прежде чем приступить к более подробному рассмотрению центральных поверхностей 2-го порядка, остановимся на самой простой и замечательной из них—сфере, или шаре. Ее уравнение получится, если мы выразим, что всякая точка (x, y, z) поверхности отстоит на одно и то же расстояние от точки (a, b, c)—

центра; другими словами, искомое уравнение будет в косоугольных координатах:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+2(y-b)\ (z-c)\cos(yz)+$$
$$+2(z-c)\ (x-a)\cos(xz)+2(x-a)\ (y-b)\cos(xy)=r^2, \quad (1)$$

а в прямоугольных координатах:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,$$

или в раскрытой форме:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0. \quad (2)$$

Принимая во внимание, что смысл уравнения не изменится, если мы умножим обе части его на одно и то же число, мы из уравнения (2) видим, что общее уравнение второй степени представляет сферу в том случае, если коэффициенты при квадратах координат равны и члены с парными произведениями координат отсутствуют. Если центр поместим в начале, то уравнение сферы представится в виде:

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \quad (3)$$

Так как оно отнесено к центру, то не содержит членов с первыми степенями координат. В уравнениях (1), (2), (3) r^2 может иметь любое значение — положительное или отрицательное; в последнем случае говорят, что шар будет иметь мнимый радиус. Если в уравнении (3) имеем $r^2=0$, то это уравнение представит шар нулевого радиуса, т.-е. точку (0, 0, 0) и в то же время, будучи однородным, представит конус с вершиной в точке (0, 0, 0) и с мнимыми образующими. Конус, уравнение которого:

$$x^2+y^2+z^2=0, \quad (4)$$

называется абсолютным конусом.

Рассмотрим сечение сферы бесконечно удаленною плоскостью; для этого нам нужно решить уравнение сферы вместе с уравнением бесконечно удаленной плоскости, иначе говоря, нужно решить систему уравнений в однородных координатах:

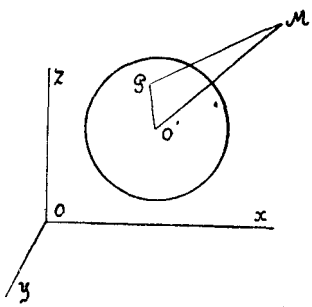
$$x^2+y^2+z^2-2axt-2byt-2czt+(a^2+b^2+c^2)t^2=0,$$
$$t=0.$$

Эту систему двух уравнений мы можем заменить следующею:

$$x^2+y^2+z^2=0, \qquad t=0. \tag{5}$$

Первое из уравнений (5) представляет абсолютный конус, второе— бесконечно удаленную плоскость, а оба вместе—мнимую линию—абсолютный круг. Так как в уравнение (5) не входят ни радиус круга, ни координаты центра, то абсолютный круг для всех шаров один и тот же, т.-е. все сферы пересекают бесконечно удаленную плоскость по одной и той же мнимой линии, называемой абсолютным кругом.

Посмотрим, какое геометрическое толкование можно дать левой части уравнения сферы. Возьмем прямоугольные оси координат (черт. 57) и отнесем к ним шар радиуса r, с центром в $O'(a, b, c)$, и точку $M(x, y, z)$. Проведя из M касательную MP к шару, находим из прямоугольного треугольника $O'PM$:



Черт. 57.

$$MP^2=O'M^2-O'P^2,$$

или

$$d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2,$$

где d — длина касательной. Отсюда ясно, что левая часть уравнения шара представляет квадрат длины касательной, проведенной из точки x, y, z к шару, и уравнение шара выражает то свойство, что для точек, лежащих на шаре, эта длина равна нулю.

Так как в уравнении шара, отнесенного к любым прямоугольным осям, отсутствуют члены с произведениями координат, то это показывает (стр. 131), что каждые три взаимно перпендикулярные диаметра шара могут быть приняты за его оси. Вместе с тем это значит, что для шара каждое направленне есть главное, т.-е. каждый диаметр шара перпендикулярен к сопряженной ему диаметральной плоскости. Так как, кроме того, в уравнении шара коэффициенты при квадратах координат равны между собою, а эти коэффициенты суть корни решающего уравнения (стр. 137), то в случае шара решающее уравнение имеет все три корня равные.

5. Исследование уравнения центральной поверхности.

Рассмотрев способы, какими упрощается уравнение поверхности 2-го порядка, напишем уравнение центральной поверхности в виде:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0, \qquad (1)$$

справедливом для всякой системы сопряженных диаметров (стр 131). Прежде, чем перейти к рассмотрению этого уравнения в случаях, когда его коэффициенты не нули, мы рассмотрим частные случаи, именно:

I) когда один из коэффициентов равен нулю;

II) когда два из коэффициентов равны нулю;

III) когда три из коэффициентов равны нулю.

Разберем их отдельно:

Ia). Пусть $a_{44} = 0$; тогда уравнение (1) перейдет в

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0,$$

т.-е. в уравнение конуса с вершиною в начале; этот конус будет мнимый или действительный, смотря по тому, имеют ли все коэффициенты одинаковые знаки или нет; в последнем случае знак одного из коэффициентов будет противоположен знаку остальных. Таким образом, конусы второго порядка могут быть только двух родов: действительные и мнимые. Так как в каждом действительном конусе 2-го порядка возможны сечения как эллиптические, так гиперболические и параболические, то не существует отдельно эллиптических, гиперболических и параболических конусов 2-го порядка.

Ib). Пусть $a_{33} = 0$; тогда уравнение (1) перейдет в

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44} = 0;$$

так как это уравнение не содержит координаты z, то оно представляет цилиндр, действительный или мнимый, с образующими, параллельными оси Z; если a_{11}, a_{22} имеют знаки одинаковые, то цилиндр эллиптический, если разные, то гиперболический. Сказанное об a_{33}, очевидно, приложимо с соответствующими изменениями к a_{11} и a_{22}.

IIa). Пусть $a_{44} = 0$ и $a_{33} = 0$. Тогда уравнение (1) напишется так:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = 0.$$

Левая часть этого уравнения распадается на два множителя первой степени $\sqrt{a_{11}}\,x \pm \sqrt{-a_{22}}\,y$. Поэтому уравнение представляет пару плоскостей, проходящих через ось Z.

IIb). Пусть $a_{22} = 0$ и $a_{33} = 0$. Уравнение (1) примет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{44} = 0.$$

Это—уравнение пары плоскостей, параллельных плоскости YOZ,

IIIa). Пусть $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$, $a_{44} = 0$. Уравнение (1) примет вид:

$$a_{11}x^2 = 0.$$

Это уравнение представляет плоскость YOZ, дважды взятую.

IIIb). Пусть $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$a_{44} = 0 \text{ или, в однородной форме: } a_{44}t^2 = 0,$$

или $t^2 = 0$ —уравнение бесконечно удаленной плоскости, дважды взятой.

Рассматривая теперь уравнение:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0, \qquad (1)$$

где a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} не нули, мы должны различать следующие 4 случая:

1) когда все коэффициенты имеют один и тот же знак; в этом случае поверхность, представляемая уравнением (1), будет, очевидно, мнимая (на немецком языке, в отличие от поверхностей, в уравнении которых коэффициенты мнимы, подобные поверхности называются nullteilig—не состоящая ни из одной части);

2) когда знак известного члена a_{44} противоположен знаку остальных;

3) когда знак a_{44} противоположен знаку только двух коэффициентов;

4) когда знак a_{44} противоположен знаку только одного из остальных коэффициентов.

6. Эллипсоид.

Обратимся к исследованию того случая, когда коэффициент a_{44} в уравнении

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

имеет знак противоположный знаку остальных коэффициентов. Написав уравнение (1) в таком виде:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = -a_{44}$$

и разделив обе его части на $-a_{44}$, получим:

$$\frac{a_{11}x^2}{-a_{44}} + \frac{a_{22}y^2}{-a_{44}} + \frac{a_{33}z^2}{-a_{44}} = 1$$

что можно переписать так:

$$\frac{x^2}{\frac{a_{44}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{\frac{a_{44}}{a_{22}}} + \frac{z^2}{\frac{a_{44}}{a_{33}}} = 1$$

Так как, по предположению, отношения $\frac{a_{44}}{a_{11}}$, $\frac{a_{44}}{a_{22}}$, $\frac{a_{44}}{a_{33}}$ отрицательны, то мы можем положить:

$$-\frac{a_{44}}{a_{11}} = a'^2, \qquad -\frac{a_{44}}{a_{22}} = b'^2, \qquad -\frac{a_{44}}{a_{33}} = c'^2,$$

уравнение нашей поверхности представится в таком виде:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

Это уравнение отнесено к любой системе трех взаимно сопряженных диаметров; в частном случае, когда эти диаметры взаимно перпендикулярны, это уравнение пишут обыкновенно в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2)$$

Исследуем уравнение (2). Легко видеть, что каждая из слагаемых дробей не может быть более единицы, поэтому

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

Отсюда ясно, что абсолютная величина координат точек поверхности не может превосходить известного предела, именно:

$$|x| \leqq a, \quad |y| \leqq b, \quad |z| \leqq c.$$

Если положим в уравнении (2) $y = 0$, $z = 0$, то будем иметь $x = \pm a$. Это показывает, что a есть расстояние от начала координат до тех точек, где наша поверхность пересекается с осью ее, принятою за ось OX. Эти точки называются вершинами поверхности, и расстояние между ними, равное $2a$, есть длина оси поверхности.

Подобным же образом легко видеть, что расстояния между точками, в которых поверхность пересекается с осями OY и OZ, равны соответственно $2b$ и $2c$. Эти расстояния суть также длины осей поверхности, а точки пересечения их с поверхностью суть ее вершины. Так как каждая из осей поверхности может быть принята за какую угодно из осей координат, то обыкновенно принимают, что:

$$a \geqq b \geqq c.$$

Форма поверхности обнаруживается лучше всего из рассмотрения линий пересечения ее различными плоскостями. Положим сперва, что секущая плоскость параллельна плоскости XOY и изображается уравнением:

$$z = h.$$

Линия пересечения будет изображаться совокупностью этого уравнения и уравнения (2) поверхности. Исключая z из обоих уравнений, получим уравнение проекции этой линии на плоскость XOY, проекции, очевидно тождественной по форме с самою линиею пересечения, так как секущая плоскость параллельна плоскости XOY. Это уравнение будет:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - h^2}{c^2},$$

или, деля обе части на $\frac{c^2 - h^2}{c^2}$:

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2 - h^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(c^2 - h^2)}{c^2}} = 1.$$

Полагая

$$\frac{a\sqrt{c^2-h^2}}{c}=\alpha \qquad \frac{b\sqrt{c^2-h^2}}{c}=\beta, \tag{3}$$

мы дадим ему вид:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Это есть уравнение эллипса. Из равенств (3) видим, что:

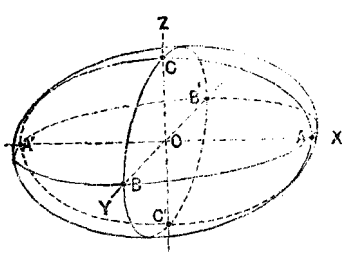
$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}, \tag{4}$$

и притом α и β будут иметь действительные значения только тогда, когда $|h|\leq c$. Следовательно, на основании выражений (4), плоскости, параллельные главной плоскости XOY, пересекают поверхность по подобным эллипсам, и притом действительное пересечение будет происходить только тогда, когда секущая плоскость встречает ось Z между соответствующими вершинами. В частном случае при $z=0$ получим уравнение главного сечения нашей поверхности, именно:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Это эллипс, вершины которого—вершины поверхности.

Все вышесказанное имеет место и для плоскостей, параллельных другим главным плоскостям. На основании того, что всякая плоскость пересекает исследуемую поверхность по эллипсам, она называется эллипсоидом. На чертеже 58 и последующих представлены различные виды поверхностей 2-го порядка. При этом предполагается, что оси X и Z расположены параллельно плоскости проекций, а ось Y направлена перпендикулярно вперед. Мы представляем себе зрителя смотрящим на поверхность справа и сверху. Тогда ось Y представится ему направленною влево и вниз. Видимый контур или абрис поверхности при этом не будет совпадать ни с одним из главных сечений.



Черт. 58.

Из сказанного ясно, что эллипсоид всеми своими точками помещается внутри параллелепипеда, образуемого плоскостями, касающимися в его вершинах.

Если в уравнении эллипсоида две большие полуоси a и b равны между собою, то все сечения этой поверхности плоскостями, параллельными плоскости XOY, будут кругами. В этом случае поверхность называется **сжатым эллипсоидом вращения**; если же равны две меньшие полуоси b и c, то—**растянутым**.

Уравнение касательной плоскости к эллипсоиду легко составить по общей формуле. Мы имеем здесь:

$$F'_{x'} = \frac{x'}{a^2},\ F'_{y'} = \frac{y'}{b^2},\ F'_{z'} = \frac{z'}{c^2},\ F'_{t'} = -t'.$$

Следовательно, искомое уравнение будет:

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1. \tag{5}$$

Уравнение нормали к эллипсоиду (2) в точке (x', y', z'), как прямой, проходящей через эту точку и перпендикулярной к касательной плоскости, будет:

$$\frac{x-x'}{\frac{x'}{a^2}} = \frac{y-y'}{\frac{y'}{b^2}} = \frac{z-z'}{\frac{z'}{c^2}}. \tag{6}$$

Уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению m, n, p хорд (стр. 115):

$$mF_x + nF_y + pF_z = 0,$$

для эллипсоида будет:

$$\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} + \frac{pz}{c^2} = 0. \tag{7}$$

Угловые коэффициенты A, B, C этой плоскости будут:

$$A = \frac{m}{a^2},\quad B = \frac{n}{b^2},\quad C = \frac{p}{c^2} \tag{8}$$

Найдем условие, при котором два диаметра с угловыми коэффициентами m, n, p и m', n', p' являются сопряженными. Для того надо, чтобы второй диаметр лежал в диаметральной плоско-

сти, сопряженной первому, и если уравнение диаметральной плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, то должно быть (стр. 116)

$$Am' + Bn' + Cp' = 0,$$

или, заменяя A, B и C величинами (8):

$$\frac{mm'}{a^2} + \frac{nn'}{b^2} + \frac{pp'}{c^2} = 0. \tag{9}$$

Остановимся на свойствах сопряженных диаметров эллипсоида. Положим, что на эллипсоиде взяты три точки A_1 (x_1, y_1, z_1), A_2 (x_2, y_2, z_2), A_3 (x_3, y_3, z_3), представляющие концы трех сопряженных диаметров; длины соответствующих полудиаметров назовем a', b', c'. Посмотрим, какие соотношения существуют между этими величинами. Так как точки лежат на эллипсоиде, то:

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} &= 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} &= 1, \\ \frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} &= 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Составим уравнение диаметров, проходящих через эти три точки: первый диаметр проходит через точку (x_1, y_1, z_1) и через центр $(0, 0, 0)$ и поэтому его уравнение будет:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}.$$

В самом деле, эта прямая проходит через точку (x_1, y_1, z_1) и через центр, так как их координаты удовлетворяют ее уравнению.

Совершенно так же найдем уравнение диаметров:

второго

$$\frac{x}{x_2} = \frac{y}{y_2} = \frac{z}{z_2}$$

и третьего

$$\frac{x}{x_3} = \frac{y}{y_3} = \frac{z}{z_3}$$

Отсюда видно, что (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) суть угловые коэффициенты наших трех диаметров, и поэтому условия их сопряженности на основании уравнения (9) напишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}&=0,\\ \frac{x_1x_3}{a^2}+\frac{y_1y_3}{b^2}+\frac{z_1z_3}{c^2}&=0,\\ \frac{x_2x_3}{a^2}+\frac{y_2y_3}{b^2}+\frac{z_2z_3}{c^2}&=0. \end{aligned} \tag{11}$$

Легко видеть, что шесть соотношений (10) и (11) подобны тем соотношениям (6), (7) между косинусами углов, которые мы имели при преобразовании прямоугольных координат (стр. 26); именно, место косинусов занимают здесь следующие величины:

$$\begin{aligned} &\frac{x_1}{a},\ \frac{y_1}{b},\ \frac{z_1}{c},\\ &\frac{x_2}{a},\ \frac{y_2}{b},\ \frac{z_2}{c},\\ &\frac{x_3}{a},\ \frac{y_3}{b},\ \frac{z_3}{c}, \end{aligned} \tag{12}$$

так как сумма квадратов этих величин, находящихся в одной строке, равна единице, а сумма парных произведений соответственных величин, находящихся в двух столбцах, равна нулю. Следовательно, все те выводы, которые мы имели для косинусов углов, имеют место и для величин (12). Мы видели (стр. 28), что детерминант, составленный из девяти косинусов, равен единице; поэтому:

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & \frac{z_1}{c}\\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & \frac{z_2}{c}\\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & \frac{z_3}{c} \end{vmatrix} = 1, \tag{13}$$

или, умножая первый столбец на a, второй на b, третий на c и повышая порядок детерминанта на единицу, находим:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = abc. \qquad 14)$$

Левая часть равенства (14) представляет шестикратный объем тетраэдра, имеющего вершинами начало координат и три точки A_1, A_2, A_3 (стр. 65); но этот объем, очевидно, равен объему параллелепипеда, построенного на трех сопряженных полудиаметрах a', b', c'. Правая же часть равенства (14) представляет объем прямоугольного параллелепипеда, построенного на полуосях. Таким образом, объем параллелепипеда, построенного на всяких трех сопряженных диаметрах эллипсоида, есть величина постоянная, равная объему прямоугольного параллелепипеда, построенного на главных осях. Теорема эта аналогична известной теореме Аполлония в геометрии на плоскости.

Таким же образом можно вывести и теоремы, аналогичные двум другим теоремам Аполлония. Мы знаем, что для девяти косинусов не только сумма квадратов по горизонтальным столбцам равна единице, но и сумма квадратов по вертикальным столбцам равна единице; поэтому, применяя это свойство к величинам (12), находим:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{a^2} = 1,$$

$$\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_3^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{z_1^2}{c^2} + \frac{z_2^2}{c^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1,$$

или:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2,$$
$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = b^2,$$
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2.$$

Сложив три последних равенства, получим:

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Первая скобка представляет квадрат расстояния точки, от начала координат, т.-е. квадрат длины первого полудиаметра или a'^2; точно также вторая скобка есть b'^2 и третья c'^2; следовательно:

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2 \qquad (15)$$

Таким образом, сумма квадратов всяких трех сопряженных полудиаметров эллипсоида есть величина постоянная и равна сумме квадратов трех полуосей.

Далее, мы знаем, что каждый из девяти косинусов, входящих в детерминант на стр. 27, равен соответствующему минору; поэтому и здесь имеем:

$$\frac{x_1}{a}=\begin{vmatrix}\frac{y_2}{b} & \frac{z_2}{c}\\ \frac{y_3}{b} & \frac{z_3}{c}\end{vmatrix}=\frac{1}{bc}\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix},$$

$$\frac{x_2}{a}=\begin{vmatrix}\frac{y_3}{b} & \frac{z_3}{c}\\ \frac{y_1}{b} & \frac{z_1}{c}\end{vmatrix}=\frac{1}{bc}\begin{vmatrix}y_3 & z_3\\ y_1 & z_1\end{vmatrix},$$

$$\frac{x_3}{a}=\begin{vmatrix}\frac{y_1}{b} & \frac{z_1}{c}\\ \frac{y_2}{b} & \frac{z_2}{c}\end{vmatrix}=\frac{1}{bc}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Но, как было замечено выше, $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{a^2}=1$, следовательно:

$$\frac{1}{b^2c^2}\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}^2+\frac{1}{b^2c^2}\begin{vmatrix}y_3 & z_3\\ y_1 & z_1\end{vmatrix}^2+\frac{1}{b^2c^2}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2=1$$

что тождественно равенству:

$$\begin{vmatrix}y_2 & z_2 & 1\\ y_3 & z_3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_3 & z_3 & 1\\ y_1 & z_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_1 & z_1 & 1\\ y_2 & z_2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}^2=b^2c^2 \qquad (\alpha)$$

Точно также для остальных величин получим:

$$\begin{vmatrix}z_2 & x_2 & 1\\ z_3 & x_3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_3 & x_3 & 1\\ z_1 & x_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1 & x_1 & 1\\ z_2 & x_2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}^2=c^2a^2, \qquad (\beta)$$

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 = a^2b^2. \qquad (\gamma)$$

Детерминант $\begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, входящий в равенство (α), выражает площадь проекции на плоскость YOZ параллелограмма, построенного на полудиаметрах b', c' эллипсоида (стр. 63). Точно также остальные детерминанты, входящие в последние равенства, представляют площади проекций на плоскости координат трех параллелограммов, которые построены на полудиаметрах a', b', c'. Поэтому, сложив равенства (α), (β), (γ), мы получим в левой части сумму квадратов площадей параллелограммов, построенных на полудиаметрах эллипсоида, а в правой части — сумму квадратов площадей прямоугольников, построенных на полуосях. Отсюда сумма квадратов площадей параллелограммов, построенных на сопряженных диаметрах эллипсоида, есть величина постоянная, равная сумме квадратов площадей прямоугольников, построенных на его осях.

Соответствующие предложения справедливы и для всех последующих центральных поверхностей 2-го порядка.

7. Однополостный и двуполостный гиперболоиды.

Возьмем опять общее уравнение центральной поверхности:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

и предположим, что знак коэффициента a_{44} совпадает со знаком одного из других коэффициентов, напр. a_{33}. Перепишем уравнение (1) в виде:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = -a_{44} \qquad (2)$$

Отсюда, деля обе части уравнения на $-a_{44}$ и перенося коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33} в знаменатель, получаем:

$$\frac{x^2}{-\frac{a_{44}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{-\frac{a_{44}}{a_{22}}} + \frac{z^2}{-\frac{a_{44}}{a_{33}}} = 1$$

На основании сказанного выше мы введем обозначения:

$$-\frac{a_{44}}{a_{11}}=a'^2,\quad -\frac{a_{44}}{a_{22}}=b'^2,\quad -\frac{a_{44}}{a_{33}}=-c'^2,$$

уравнение (1) перейдет в

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1, \tag{3'}$$

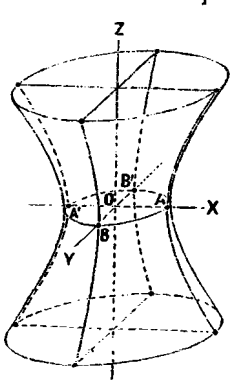
или для прямоугольной системы координат

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

Если бы знак коэффициента a_{44} совпадал со знаком не одного из остальных коэффициентов, а двух, напр., a_{11} и a_{22}, то мы получили бы вместо (3) другое уравнение, именно:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{4}$$

Поверхности, выражаемые как тем, так и другим уравнением, называются **гиперболоидами**. Так как оба уравнения содержат члены с разными знаками, то им можно удовлетворить сколько угодно большими значениями текущих координат. Это показывает, что оба гиперболоида простираются в бесконечность. Первый из них называется **однополостным гиперболоидом**, второй — **двуполостным**.



Черт. 59.

Обращаясь к исследованию поверхности, выражаемой уравнением (3), найдем точки ее пересечения с осями. Полагая для этого $y=0$, $z=0$, получим $x=\pm a$; полагая $x=0$, $z=0$, будем иметь $y=\pm b$. Следовательно, ось X встречает поверхность в двух точках A и A', отстоящих от центра на расстояние a, а ось Y — в точках B и B', отстоящих от центра на расстояние b. Если же положим в уравнении (3) $x=0$, $y=0$, то получим $z=\pm ic$, откуда заключаем, что поверхность вовсе не пересекается с осью Z.

Последняя называется поэтому мнимою осью поверхности. Гиперболоид, выражаемый уравнением (3), имеет, следовательно, только четыре вершины A, A', B, B' (черт. 59). Так как гиперболоид простирается по направлению оси Z в бесконечность, то на чертеже представлена только часть гиперболоида, ограниченная сверху и снизу двумя сечениями, параллельными плоскости XOY. Чтобы получить главные сечения рассматриваемого гиперболоида, положим в его уравнении последовательно $z=0$, $y=0$, $x=0$. При этих предположениях будем иметь:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Отсюда видим, что плоскостью XOY поверхность пересекается по эллипсу, называемому горловым, вершины которого суть вершины самой поверхности; плоскости же XOZ и YOZ пересекают поверхность по гиперболам, которых вершины также находятся в вершинах поверхности и для которых ось Z есть общая мнимая ось.

Возьмем теперь какую-нибудь плоскость, параллельную плоскости XOY и выражаемую уравнением $z=h$. Линия пересечения этой плоскости с гиперболоидом будет одинакового вида с ее проекцией на плоскость XOY. Уравнение этой проекции, очевидно, будет:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2+h^2}{c^2},$$

или

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2+h^2)}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2(c^2+h^2)}{c^2}}=1,$$

или, полагая:

$$\alpha=\frac{a\sqrt{c^2+h^2}}{c},\quad \beta=\frac{b\sqrt{c^2+h^2}}{c},$$

откуда:

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}$$

окончательно находим:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y}{\beta^2}=1. \tag{6}$$

Уравнение (6) представляет эллипс, оси которого 2α и 2β действительны при всяком значении h и беспредельно возрастают при возрастании абсолютной величины h. Соотношение (5) показывает, что все кривые (6) подобны между собой.

Возьмем теперь какую-нибудь плоскость, параллельную плоскости XOZ:

$$y=h$$

равнение проекции линии ее пересечения с поверхностью будет:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{b^2-h^2}{b^2},$$

или:

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(b^2-h^2)}{b^2}}-\frac{z^2}{\frac{c^2(b^2-h^2)}{b^2}}=1.$$

Полагая

$$\frac{a\sqrt{b^2-h^2}}{b}=\alpha,\quad \frac{c\sqrt{b^2-h^2}}{b}=\gamma,$$

откуда:

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\gamma}{c}, \tag{7}$$

имеем:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1. \tag{8}$$

Уравнение (8) представляет гиперболу, оси которой 2α и 2γ действительны только тогда, когда:

$$|h|<b.$$

Все эти гиперболы на основании равенства (7) подобны между собой. Если же:

$$|h|>b,$$

положим:

$$\frac{a\sqrt{h^2-b^2}}{b}=\alpha,\quad \frac{c\sqrt{h^2-b^2}}{b}=\gamma,$$

и уравнение (8) перейдет в:

$$-\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1.$$

Это уравнение гиперболы, сопряженной прежней, с полуосями:

$$a=\frac{\alpha\sqrt{h^2-b^2}}{b},\quad \gamma=\frac{c\sqrt{h^2-b^2}}{b}.$$

При $|h|=b$ гипербола (8) распадается на пару прямых, именно:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0.$$

Это показывает, что плоскости $y=\pm b$, и $x=\pm a$ касаются гиперболоида в его вершинах.

Аналогично эллипсоиду, мы найдем и для однополостного гиперболоида уравнение диаметральной плоскости:

$$\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b}-\frac{pz}{c^2}=0$$

и касательной плоскости:

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=1.$$

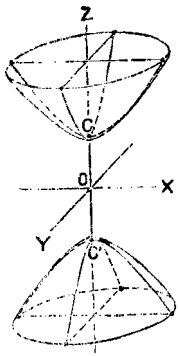
Однополостный гиперболоид обладает тем свойством, что он пересекается с каждою плоскостью по действительной кривой. Этим свойством обладает также конус и еще, как мы увидим ниже, гиперболический параболоид.

Обратимся теперь к рассмотрению третьей центральной поверхности, а именно двуполостного гиперболоида, выражаемого уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{9}$$

Полагая в этом уравнении $x=0$, $y=0$, получаем $z=\pm c$. Следовательно, поверхность пересекается с осью Z в двух точках.

Если же положим $y=0$ и $z=0$, или $x=0$ и $z=0$, то мы получим для x и для y мнимые значения: $x=\pm ia$, $y=\pm ib$. Это показывает, что оси X и Y не пересекают поверхности. Последняя имеет, следовательно, одну действительную ось и две мнимые. Уравнение главных сечений поверхности получим, полагая последовательно $z=0$, $y=0$, $x=0$. Эти уравнения будут:



Черт. 60.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Из них два последние представляют на плоскостях XOZ и YOZ две гиперболы, имеющие две общие вершины; первое же не удовлетворяется ни при каких действительных значениях координат x и y и поэтому не представляет действительной кривой. Отсюда видно, что плоскость XOY отделяет одну часть поверхности от другой; поэтому наша поверхность и называется гиперболоидом с двумя полостями, или **двуполостным гиперболоидом** (черт. 60).

Возьмем плоскость:

$$z=h$$

и пересечем ею поверхность (9). В сечении получится линия, уравнение которой:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2-c^2}{c^2},$$

или

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

где

$$\alpha=\frac{a\sqrt{h^2-c^2}}{c}, \quad \beta=\frac{b\sqrt{h^2-c^2}}{c}.$$

Отсюда следует, что плоскостями, параллельными плоскости XOY, поверхность пересекается по эллипсам. Но так как выражения для α и β принимают действительные значения только при

$|h| > c$, а при $|h| = c$ оси эллипса обращаются в нуль, то заключаем, что действительного пересечения не будет, если секущая плоскость встречает действительную ось Z между вершинами C и C'; те же плоскости, которые проходят через эти точки, суть касательные в них к поверхности. В части пространства, заключающейся между этими последними плоскостями, не будет, следовательно, находиться ни одной точки поверхности.

Пересекая поверхность плоскостью, параллельной плоскости XOZ, т.-е. плоскостью, уравнение которой

$$y = h,$$

находим уравнение проекций этого сечения на плоскость XOZ:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2 + b^2}{b^2},$$

или полагая:

$$\gamma = \frac{c\sqrt{h^2+b^2}}{b}, \quad \alpha = \frac{a\sqrt{h^2+b^2}}{b},$$

получаем:

$$\frac{z^2}{\gamma^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1.$$

Это уравнение при всяком h представляет гиперболу. Итак, двуполостный гиперболоид пересекается плоскостями, параллельными плоскости XOZ, по гиперболам. То же будет справедливо и для плоскостей, параллельных плоскости YOZ.

Чертеж 60 представляет часть двуполостного гиперболоида, ограниченную сверху и снизу двумя сечениями, параллельными плоскости XOY.

Напишем уравнения диаметральной и касательной плоскостей. Легко видеть, что они будут:

$$-\frac{mx}{a^2} - \frac{ny}{b^2} + \frac{pz}{c^2} = 0.$$

$$-\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1.$$

Так как оба вида гиперболоидов имеют бесконечно удаленные точки, то они имеют асимптотический конус, уравнение которого,

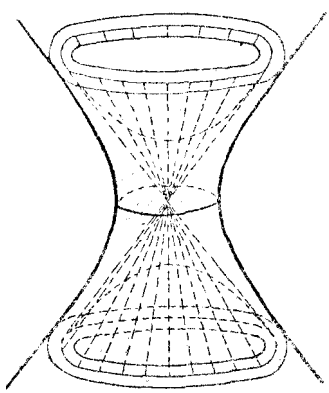
как известно (стр. 118), получим, приравняв нулю старшие члены уравнения поверхности. Следовательно, для однополостного гиперболоида уравнение асимптотического конуса будет:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

а для двуполостного гиперболоида:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Оба уравнения тождественны. Отсюда мы видим, что однополостный и двуполостный гиперболоиды с пропорциональными осями имеют одинаковые асимптотические конусы (черт. 61).



Черт. 61.

Мы предполагаем, вообще, что $a>b$; если же обе эти величины равны между собою, то мы получаем гиперболоиды вращения. Именно, если $a=b$, то для однополостного гиперболоида получим уравнение:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Это—поверхность, получающаяся при вращении гиперболы, расположенной в плоскости XOZ, вокруг мнимой оси. Для двуполостного гиперболоида при том же предположении получаем:

$$-\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

— поверхность, получающаяся при вращении гиперболы, сопряженной предыдущей, вокруг действительной оси.

Очевидно, что в том и другом случае сечения поверхностей, параллельные плоскости XOY, суть окружности.

8. Параболоиды.

Перейдем теперь к поверхностям без центра, т.-е. к параболоидам. Если за две плоскости координат примем две главные плоскости, и за третью—плоскость касательную в вершине, то уравнение параболоида, как мы видели в § 3 (стр. 138), представится в таком виде:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0. \qquad (1)$$

Решив уравнение относительно z, получим:

$$z = -\frac{a_{11}}{2a_{34}}x^2 - \frac{a_{22}}{2a_{34}}y^2.$$

Здесь могут представиться два случая. Или коэффициенты a_{11}, a_{22} имеют знаки одинаковые, или их знаки разные. В первом случае мы имеем эллиптический параболоид, а во втором - гиперболический параболоид. Что касается коэффициента a_{34}, то мы можем по произволу придать ему значение положительное или отрицательное. В самом деле, переменив положительное направление оси Z в отрицательное, мы этим превратим z в $-z$, и, следовательно, изменим знак при a_{34}.

Предположим, что знаки у a_{11} и a_{22} одинаковые. Представим уравнение параболоида в таком виде:

$$z = \frac{x^2}{-\frac{2a_{34}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{-\frac{2a_{34}}{a_{22}}}$$

Как мы только что видели, всегда можно предположить, что знак при a_{34} противоположен знакам при a_{11} и a_{22}; введем обозначения:

$$-\frac{a_{34}}{a_{11}} = p, \quad -\frac{a_{34}}{a_{22}} = q.$$

Так как знак при a_{34} противоположен знакам при a_{11} и a_{22}, то p и q—величины существенно положительные. Поэтому уравнение эллиптического параболоида представится в таком виде:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \qquad (2)$$

Пусть теперь коэффициенты при x^2 и y^2 имеют разные знаки. Сделаем так, чтобы знак при a_{34} был противоположен знаку при a_{11} и одинаков со знаком при a_{22}, переменив, если нужно, положительное направление оси Z. Тогда положим:

$$-\frac{a_{34}}{a_{11}} = p, \quad -\frac{a_{34}}{a_{22}} = -q,$$

и уравнение гиперболического параболоида представится в таком виде:

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}. \tag{3}$$

Обратимся к изучению этих поверхностей и начнем с эллиптического параболоида (черт. 62). Его уравнение имеет вид:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}. \tag{2}$$

Будем исследовать сечения нашей поверхности плоскостями координат и плоскостями, им параллельными. Полагая $z = 0$, найдем сечение поверхности с плоскостью XOY:

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = 0.$$

Так как сумма положительных величин не может быть равна нулю, то этому уравнению удовлетворяет единственная пара действительных решений: $x = 0$, $y = 0$. Наша поверхность встречает плоскость XOY в одной действительной точке, именно в начале координат, т.-е. она касается плоскости XOY. Вместе с тем очевидно, что плоскость XOY пересекает поверхность по двум мнимым прямым:

$$\frac{x}{\sqrt{2p}} + i\frac{y}{\sqrt{2q}} = 0, \qquad \frac{x}{\sqrt{2p}} - i\frac{y}{\sqrt{2q}} = 0.$$

Полагая $y = 0$, найдем сечение поверхности с плоскостью XOZ:

$$z = \frac{x^2}{2p} \qquad \text{откуда } x^2 = 2pz.$$

В сечении получилась парабола с параметром p, для которой осью служит ось Z.

Полагая $x = 0$, найдем сечение с плоскостью YOZ:

$$z = \frac{y^2}{2q}, \qquad \text{откуда } y^2 = 2qz.$$

Получилась также парабола, для которой осью служит также ось Z, но с иным параметром.

Чтобы составить себе представление о форме поверхности, будем искать ее сечения плоскостями, параллельными плоскостям координат. Пусть секущая плоскость параллельна плоскости XOY. Ее уравнение таково:

$$z = h.$$

Решая его совместно с уравнением поверхности, получим уравнение искомого сечения:

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = h.$$

Это уравнение представляет эллипс, так как при квадратах координат знаки одинаковы. Разделив обе части на h, приведем его к обычному виду:

$$\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1.$$

Обозначим полуоси эллипса через α и β. Тогда имеем:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

где:

$$\alpha = \sqrt{2ph}, \quad \beta = \sqrt{2qh}.$$

Мы видим, что полуоси действительны при $h > 0$. Если $h < 0$, то в сечении будем получать мнимые эллипсы. Таким образом видим, что вся поверхность расположена по одну сторону плоскости XOY, именно—вся поверхность простирается в сторону положительного направления оси Z. Взяв отношение полуосей

$$\alpha : \beta = \sqrt{2p} : \sqrt{2q},$$

видим, что отношение полуосей не зависит от h; значит, все сечения подобны между собой.

Сечение поверхности с плоскостью, параллельною плоскости XOZ, найдем, полагая $y = h$:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{h^2}{2q}, \qquad \text{откуда } x^2 = 2p\left(z - \frac{h^2}{2q}\right)$$

Это—парабола с тем же параметром p, как и в сечении с плоскостью XOZ, но с вершиною в точке $\left(0, \frac{h^2}{2q}\right)$. Полагая

$$z - \frac{h^2}{2q} = z',$$

найдем:

$$x^2 = 2pz'.$$

Следовательно, в сечении со всеми плоскостями, параллельными плоскости XOZ, получаются одинаковые параболы, но с вершинами более или менее смещенными в положительную сторону оси Z.

То же самое справедливо и для плоскостей, параллельных плоскости YOZ. Полагая $x = h$, имеем:

$$z = \frac{h^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}, \qquad y^2 = 2q\left(z - \frac{h^2}{2p}\right).$$

Мы получили параболу с параметром q, как в сечении с плоскостью YOZ. Полагая

$$z - \frac{h^2}{2p} = z',$$

будем иметь:

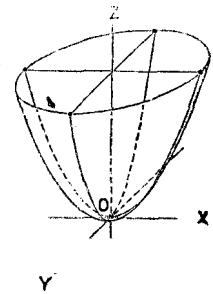
$$y^2 = 2qz'.$$

И здесь все сечения тождественны между собой, но вершины их поднимаются все выше и выше. Таким образом мы получим параболоид, если, имея две параболы с общею осью, но лежащие в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, будем заставлять перемещаться одну параболу параллельно самой себе, опираясь вершиною на другую параболу.

Чертеж 62 представляет часть эллиптического параболоида, ограниченную сверху сечением параллельным плоскости XOY.

Обратимся теперь к изучению гиперболического параболоида. Его уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z.$$



Черт. 62.

Полагая $z = 0$, найдем сечение с плоскостью XOY:

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0,$$

или сокращая на 2, разлагаем как разность квадратов:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0.$$

Следовательно, линия пересечения с плоскостью XOY распадается на две прямых линии. Приравняв каждый множитель нулю, получим их уравнение:

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \text{ и } \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

Таким образом плоскость XOY пересекается с гиперболическим параболоидом по паре действительных прямых. Пересекая поверхность, она в то же время касается ее (стр. 105).

Полагая $y = 0$, найдем сечение поверхности плоскостью XOZ:

$$z = \frac{x^2}{2p}, \text{ или } x^2 = 2pz.$$

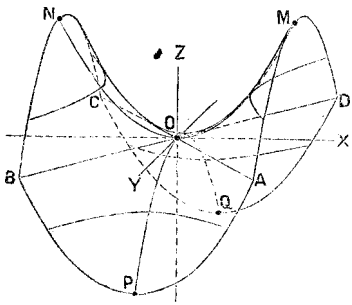
Мы видим, что с плоскостью XOZ поверхность пересекается по параболе; ось последней совпадает с осью Z.

Наконец, найдем сечение поверхности с плоскостью YOZ. Для этого полагаем в уравнении поверхности $x = 0$:

$$z = -\frac{y^2}{2q}, \text{ или } y^2 = -2qz.$$

Это—тоже парабола с главною осью, совпадающею с осью Z, и с параметром q. Но ось параболы направлена здесь в сторону противоположную—в отрицательном направлении оси Z (черт. 63).

Будем исследовать сечения нашей поверхности плоскостями, параллельными плоскостям координат. Полагая $z = h$, найдем сечение с плоскостью, параллельной плоскости XOY:



Черт. 63.

$$h = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}.$$

Это—уравнение гиперболы. Приведем ее уравнение к обычному виду:

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1.$$

Расположение действительной и мнимой осей гиперболы зависит от знака при h. Если $h > 0$, то действительная ось направлена параллельно оси X, а мнимая—параллельно оси Y. Если мы введем обозначения

$$\alpha = \sqrt{2ph}, \quad \beta = \sqrt{2qh},$$

то уравнение гиперболы будет

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Следовательно, в сечениях, лежащих над плоскостью XOY, действительная ось параллельна оси X, а мнимая — оси Y. Если $h < 0$, то положим

$$\alpha = \sqrt{-2ph}, \qquad \beta = \sqrt{-2qh};$$

тогда уравнение будет

$$-\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Следовательно, в сечениях, лежащих ниже плоскости XOY, действительная ось гиперболы параллельна оси Y, а мнимая—оси X.

Будем, далее, изыскивать сечения поверхности плоскостями, параллельными плоскости XOZ. Полагая $y = h$, будем иметь

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{h^2}{2q}, \qquad x^2 = 2p\left(z + \frac{h^2}{2q}\right)$$

Обозначая

$$z + \frac{h^2}{2q} = z',$$

$$x^2 = 2pz'.$$

Как и в эллиптическом параболоиде, эти сечения—параболы, тождественны между собой, но вершины их опускаются все ниже и ниже.

Наконец, найдем сечения поверхности плоскостями, параллельными плоскости YOZ. Полагая $x = h$, имеем

$$z = \frac{h^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}, \qquad y^2 = -2q\left(z - \frac{h^2}{2p}\right),$$

или, положив:

$$z - \frac{h^2}{2p} = z',$$

получим

$$y^2 = -2qz'.$$

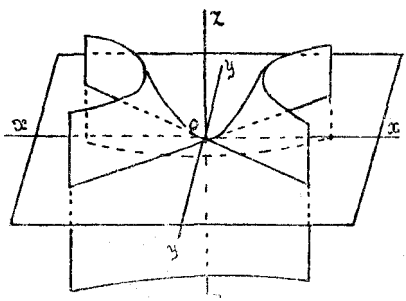
Эти сечения представляют параболы, направленные вниз.

Из всех поверхностей 2-го порядка всего труднее представить себе гиперболический параболоид. Вероятно это происходит от того, что все плоские сечения гиперболического параболоида представляют собою разомкнутые линии, простирающиеся в бесконечность, гиперболы, параболы или пары действительных прямых.

Гиперболический параболоид, как и однополостный гиперболоид, обладает тем свойством, что с каждою плоскостью он пересекается по действительной прямой. Различие между обеими поверхностями в этом отношении состоит в том, что однополостный гиперболоид пересекает бесконечно удаленную плоскость по действительной кривой 2-го порядка, тогда как гиперболический параболоид пересекает бесконечно удаленную плоскость по паре действительных прямых; последнее стоит в связи с тем, что все параболоиды касаются бесконечно удаленной плоскости.

Гиперболический параболоид представляет собою седлообразную поверхность, простирающуюся в бесконечность. На чертеже 63 представлена часть поверхности, заключенная между четырьмя плоскостями, параллельными плоскостям XOZ и YOZ. Эти пло-

скости пересекаются с плоскостью XOY по четыреугольнику с вершинами A, B, C, D, и дают в пересечении с поверхностью четыре параболы APB, BNC, CQD, DMA. Кроме того, на чертеже представлены две гиперболы—сечения поверхности двумя плоскостями параллельными плоскости XOY. Если мы снизу ограничим поверхность нижнею из этих гипербол, то оставшаяся часть гиперболического параболоида будет напоминать два каблука, сложенных своими основаниями (черт. 64).



Черт. 64.

Составим уравнение полярной плоскости для точки (x', y', z') по отношению к эллиптическому параболоиду. Уравнение полярной плоскости в общем виде таково (стр. 121):

$$xF'_{x'} + yF'_{y'} + zF'_{z'} + tF'_{t'} = 0.$$

В нашем случае мы имеем:

$$2F = z - \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$$

Поэтому, уравнение полярной плоскости, а также и касательной плоскости будет:

$$-\frac{xx'}{2p} - \frac{yy'}{2q} + \frac{z}{2} + \frac{z'}{2} = 0,$$

то-есть:

$$z + z' = \frac{xx'}{p} + \frac{yy'}{q}.$$

Для гиперболического параболоида разница заключается в знаке при q; поэтому здесь уравнение полярной плоскости будет иметь вид:

$$z + z' = \frac{xx'}{p} - \frac{yy'}{q}$$

Составим для эллиптического параболоида уравнение диаметральной плоскости, сопряженной хордам направления l, m, n. Уравнение диаметральной плоскости в общем виде есть (стр. 115):

$$lF_x + mF_y + nF_z = 0.$$

В нашем случае это даст:

$$-\frac{lx}{2p} - \frac{my}{2q} + \frac{n}{2} = 0, \text{ или } \frac{lx}{p} + \frac{my}{q} = n.$$

Для гиперболического параболоида будем иметь:

$$\frac{lx}{p} - \frac{my}{q} = n.$$

Оба уравнения не содержат координаты z. Это показывает, что все диаметральные плоскости параболоида параллельны оси Z. Так как все диаметральные плоскости проходят через центр, то центр параболоида, как точка пересечения параллельных плоскостей, лежит в бесконечно удаленной точке оси Z, как это мы видели раньше (стр. 110).

9. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

Мы знаем (стр. 99), что через каждую точку поверхности второго порядка проходят две прямые линии, лежащие на поверхности всеми своими точками. Эти прямые называются прямолинейными образующими поверхностей второго порядка.

Прямолинейные образующие могут быть как мнимые, так и действительные. Действительные образующие есть у однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида; мнимые — у эллипсоида, двуполостного гиперболоида и эллиптического параболоида. Конусы и цилиндры имеют образующие сливающиеся; у этих поверхностей через каждую точку проходит только одна прямолинейная образующая.

Выведем уравнения прямолинейных образующих. Начнем однополостного гиперболоида. Его уравнение таково:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Представим это уравнение в таком виде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

Так как каждая часть представляет разность квадратов, то она может быть разложена на два множителя:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right). \qquad (1')$$

Рассмотрим два следующих уравнения:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = k\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad k\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right), \qquad (2)$$

где k — произвольный параметр.

Так как уравнение (1′) получается перемножением соответственных частей уравнения (2), то легко видеть, что если координаты некоторой точки удовлетворяют системе уравнений (2), то они удовлетворяют и уравнению (1′) гиперболоида. Но каждое уравнение (2) в отдельности представляет плоскость, а совокупность этих уравнений — прямую линию, как пересечение этих плоскостей. Следовательно, если x, y, z удовлетворяют системе (2), то точка лежит на некоторой прямой линии, а вместе с тем лежит и на гиперболоиде. Так как точка взята на прямой (2) произвольно, то, следовательно, все точки этой прямой (2) лежат на гиперболоиде; следовательно, эта прямая будет одною из прямолинейных образующих гиперболоида (1). Меняя k, мы будем получать различные прямолинейные образующие, непрерывно следующие одна за другою. Таким образом, однополостный гиперболоид может быть получен непрерывным движением прямой линии.

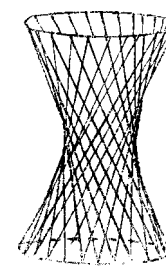
Кроме вышеуказанной системы прямолинейных образующих, мы можем получить еще и другую:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = l\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad l\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right). \qquad (3)$$

Очевидно, если удовлетворяются системы этих двух уравнений, то удовлетворяется и уравнение гиперболоида.

Таким образом, на каждом однополостном гиперболоиде мы имеем два различных семейства прямолинейных образующих (черт. 65).

Докажем, что через каждую точку поверхности проходит по одной образующей каждого семейства. Если бы в одной точке пересекались две образующие одной и той же системы, то для них мы получили бы два значения k и k'; по каждой точке (x, y, z) по уравнениям (2) соответствует одно определенное значение k; следовательно, две образующие одной и той же системы не встречаются. Напротив, прямолинейные образующие двух различных систем непременно встречаются. В самом деле, пусть в уравнениях (2) и (3) даны значения параметров k и l. Чтобы найти точку пересечения соответствующих прямых, надо решить совместно уравнения (2) и (3). Здесь неизвестных три, а уравнений четыре; но мы покажем, что они совместны, т.-е. одно есть следствие трех других. Пусть даны оба уравнения (2). Из них, как следствие, получается уравнение гиперболоида (1′). Если, кроме того, дано первое из уравнений (3), то, деля на него уравнение гиперболоида, получим второе из уравнений (3): следовательно, это уравнение есть следствие трех других. Итак, эти четыре уравнения наверное совместны. Значит, если даны k и l, то существуют значения x, y, z, одновременно удовлетворяющие этим четырем уравнениям, т.-е. существует точка пересечения двух данных образующих обеих систем.



Черт. 65.

Перейдем теперь к гиперболическому параболоиду. Его уравнение таково:

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z.$$

Представим это уравнение в виде:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}}\right) = z.$$

Составим два таких уравнения:

$$\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}} = k, \qquad k\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}}\right) = z. \tag{4}$$

Если удовлетворяются эти два уравнения, то удовлетворяется и уравнение параболоида. На основании рассуждений, аналог

ных рассуждениям для однополостного гиперболоида, заключаем, что эти уравнения представляют систему прямолинейных образующих. Давая k различные значения, получим бесчисленное множество прямолинейных образующих непрерывно следующих одна за другою. Кроме этой системы существует другая система прямолинейных образующих, именно:

$$l\left(\frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}}\right)=z,\quad \frac{x}{\sqrt{2p}}-\frac{y}{\sqrt{2q}}=l. \tag{5}$$

Таким образом, гиперболический параболоид имеет две системы прямолинейных образующих. Если нам даны координаты какой-нибудь точки параболоида, то для k и l мы получим из (4) и (5) по одному определенному значению. Следовательно, две прямолинейные образующие одной и той же системы не встречаются; но две образующие разных систем непременно встречаются, так как одно из уравнений (4) и (5) есть следствие трех других.

В системе уравнений (4), и (5), определяющих прямолинейные образующие гиперболического параболоида, одно из уравнений каждой системы содержит параметр k или l только в свободном члене. Это показывает, что у гиперболического параболоида все образующие одной и той же системы лежат в плоскостях параллельных между собою и параллельных оси Z. Таким образом у этой поверхности все образующие одной и той же системы параллельны одной и той же плоскости. В связи с этим гиперболический параболоид иначе называют косою плоскостью.

10. Круговые сечения поверхностей второго порядка.

Известно, что поверхности 2-го порядка пересекаются плоскостями по кривым 2-го порядка; в числе последних могут находиться и окружности. Займемся изысканием этих круговых сечений, весьма важных не только в геометрии, но также в механике, оптике и других прикладных математических науках. Прежде всего заметим, что круговые сечения невозможны в гиперболическом параболоиде. В самом деле, последний пересекается с бесконечно удаленною плоскостью по двум действительным бесконечно удаленным прямым; следовательно, всякая плоскость может пересекать эту поверхность только по кривой, бесконечно удаленные

точки которой действительны, но параболе или гиперболе, но не по эллипсу и не по кругу. Все остальные поверхности могут иметь круговые сечения.

Нахождение круговых сечений значительно упрощается замечанием (стр. 113), что все сечения поверхности 2-го порядка параллельными плоскостями подобны между собою. Поэтому мы можем искать только по одной плоскости каждого направления, дающей с поверхностью 2-го порядка круговое сечение; все плоскости, параллельные найденным, также будут пересекать эту поверхность по окружностям. Если данная поверхность 2-го порядка имеет центр, то всего удобнее искать диаметральные круговые сечения, то-есть сечения, лежащие в диаметральных плоскостях. Начнем с эллипсоида, данного уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (1)$$

Для нахождения круговых сечений поступим так: возьмем шар с центром в начале, следовательно, концентрический данному эллипсоиду; уравнение его будет:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \qquad (2)$$

Деля обе части на r^2 получим:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1. \qquad (3)$$

Эллипсоид (1) и шар (3) пересекаются по некоторой кривой 4-го порядка; рассмотрим, при каких условиях эта кривая распадается на два круга. Для этого вычтем из уравнения (1) уравнение (3); получим:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) представляет коническую поверхность 2-го порядка с вершиной в центре (стр. 102), проходящую через линию пересечения шара и эллипсоида, так как уравнению (4), очевидно, удовлетворяют координаты точек их пересечения (стр. 43). Предположим, что конус (4) распался на пару плоскостей; тогда шар (2) пересечется этими плоскостями по кругам; следовательно и элли-

псоид пересечется ими по тем же кругам. Таким образом, мы свели вопрос о нахождении круговых сечений к вопросу о распадении конуса (4) на пару плоскостей. Мы знаем (стр. 104), что конус 2-го порядка распадается на пару плоскостей, если дискриминант его равен нулю. В нашем случае дискриминант уравнения (4) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2} \end{vmatrix}$$

или

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right).$$

Отсюда или непосредственно из рассмотрения уравнений (4) легко видеть, что правая часть уравнения (4) не может распасться на множителей, если все члены ее отличны от нуля; следовательно, необходимым условием распадения конуса (4) на пару плоскостей будет одно из следующих условий:

$$\text{или } \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} = 0, \text{ откуда } r = a, \tag{I}$$

$$\text{„ } \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} = 0, \text{ „ } r = b, \tag{II}$$

$$\text{„ } \frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2} = 0, \text{ „ } r = c. \tag{III}$$

Предположение (I) дает: $y\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) + z\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 0$, или

$$y\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} + z\,\frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2} = 0. \tag{5}$$

При $a > b > c$ левая часть уравнения (5), представляя сумму квадратов, не распадается на пару действительных линейных множителей; следовательно, предположение (I) не дает действительных круговых сечений. Предположение (II) дает:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0,$$

$$\text{или } x^2\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}+z^2\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}=0. \tag{6}$$

Уравнение (6) при $a>b>c$, представляя разность квадратов, распадается на два действительных линейных множителя, следовательно, конус (6) распадается на пару действительных плоскостей; поэтому условие $r=b$ определяет круговые сечения. Прежде чем разобрать подробнее этот случай, исследуем предположение (III). Оно дает:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0,$$

$$\text{или } x^2\frac{c^2-a^2}{a^2c^2}+y^2\frac{c^2-b^2}{c^2b^2}=0. \tag{7}$$

Левая часть уравнения (7) при $a>b>c$ представляет сумму квадратов взятых со знаком — и, следовательно, не распадается на действительные линейные множители; конус (7) не распадается на пару действительных плоскостей; условие $r=c$ не дает действительных круговых сечений.

Возвратимся к уравнению (6). Его можно написать так:

$$z^2\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}=x^2\frac{a^2-b^2}{a^2b^2} \tag{8}$$

Уравнение (8) после приведения к одному знаменателю и извлечения корня дает:

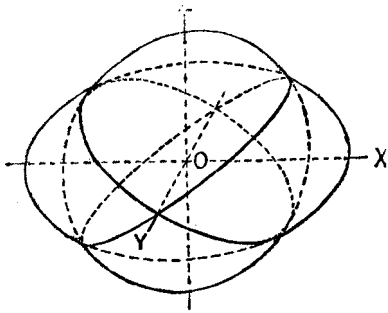
$$za\sqrt{b^2-c^2}=\pm xc\sqrt{a^2-b^2} \tag{9}$$

Уравнения (9) не содержат y; поэтому плоскости, определямые этими уравнениями, проходят через ось Y. Уравнения (9) мы можем рассматривать как уравнения следов наших плоскостей на плоскости XOZ; тогда, написав уравнения (9) в таком виде:

$$z=\pm x\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2-c^2}}, \tag{10}$$

мы можем рассматривать величину $\pm\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2-c^2}}$, как угловой

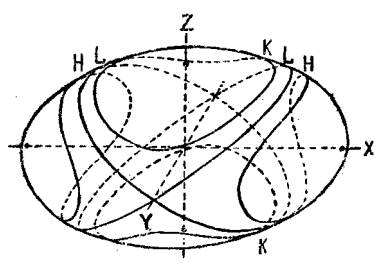
коэффициент; уравнение (10) показывает, что две плоскости, представляемые уравнениями (9), равно наклонены к осям координат.



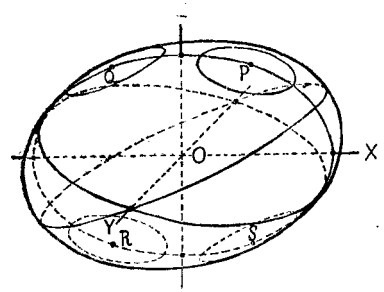
Черт. 66.

Найдя две диаметральные плоскости, пересекающие эллипсоид по кругам, мы, согласно сделанному выше замечанию, получим все остальные круговые сечения эллипсоида, пересекая его плоскостями, параллельными одной из двух найденных плоскостей

Рассмотрим вопрос о круговых сечениях эллипсоида с геометрической стороны. Если радиус шара равен средней полуоси эллипсоида b, то линия его пересечения с эллипсоидом обратится в две окружности (черт. 66). Если радиус шара содержится между a, и b, то шар дает в пересечении с эллипсоидом кривую четвертого порядка HH (черт. 67); точно также, если этот радиус содержится между b и c, то шар пересечется с эллипсоидом по кривой KK. По мере того, как радиус приближается к b, та и другая кривая стремятся к паре окружностей LL.



Черт. 67.



Черт. 68.

Если мы, взяв эллипсоид, будем проводить в нем круговые сечения, все отступая далее и далее от диаметрального кругового сечения, то радиусы этих кругов будут все более и более уменьшаться, чтобы сделаться равными нулю, когда секущая плоскость превратится в касательную. Точки, где касательные плоскости параллельны круговым сечениям поверхности, называются „точками округления“. У эллипсоида их, очевидно, четыре:

P, Q, R, S (черт. 68). Найдем их координаты x', y', z. Для их определения воспользуемся следующим замечанием. Эти точки лежат на эллипсоиде; это дает:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1. \tag{11}$$

Угловые коэффициенты касательной плоскости в точке $(x'\ y'\ z')$ суть (стр. 146):

$$\frac{x'}{a^2},\ \frac{y'}{b^2},\ \frac{z'}{c^2}. \tag{12}$$

Но в точке округления касательная плоскость параллельна плоскости одного из двух диаметральных круговых сечений (9); пусть она будет параллельна плоскости

$$za\sqrt{b^2-c^2}-xc\sqrt{a^2-b^2}=0.$$

Следовательно, коэффициенты в этом уравнении должны быть пропорциональны коэффициентам (12); это дает:

$$\frac{x'}{a^2}:\frac{y'}{b^2}:\frac{z'}{c^2}=-c\sqrt{a^2-b^2}:0:a\sqrt{b^2-c^2}. \tag{13}$$

Отсюда $y'=0$, и уравнения (13) дают:

$$\frac{x'}{-a\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z'}{c\sqrt{b^2-c^2}} \tag{14}$$

Называя величину каждого из отношений (14) через k, имеем:

$$x'=-ak\sqrt{a^2-b^2},\quad z'=ck\sqrt{b^2-c^2}. \tag{15}$$

Вставляя в уравнение (11) вместо x', y', z' найденные значения, находим для определения k уравнение:

$$k^2(a^2-b^2)+k^2(b^2-c^2)=1, \tag{16}$$

откуда:

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}} \tag{17}$$

и на основании (15) и (17) находим:

$$x'=\pm\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},\quad y'=0,\quad z'=\pm\frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}. \tag{18}$$

Легко видеть, что если бы касательная плоскость была проведена параллельно другому круговому диаметральному сечению, то абсолютные величины координат точек округления остались бы те же самые, а изменились бы только знаки, именно: знаку + для x' соответствовал бы знак $-yz'$, и наоборот. Отсюда следует, что формулы (18) определяют координаты всех четырех точек округления, если мы будем брать знаки у x' и z' независимо один от другого.

Переходим к другим поверхностям 2-го порядка. Возьмем однополостный гиперболоид, данный уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{19}$$

Пересечем его шаром, уравнение которого:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1. \tag{20}$$

Вычитая (20) из (19), находим уравнение конуса:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)=0. \tag{21}$$

Уравнение (21) может распасться на линейные множители, следовательно, конус—на пару плоскостей, когда:

или $\quad\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}=0,\quad$ откуда $r=a.$ (I′)

или $\quad\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}=0,\quad$ откуда $r=b;$ (II′)

или $\quad\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}=0,\quad$ откуда $r=ci,$ где $i=\sqrt{-1}.$ (III′)

Последнего случая мы не будем исключать из нашего исследования, хотя шар и будет мнимым. Мнимому шару могут соответствовать действительные плоскости круговых сечений, как это мы увидим в случае двуполостного гиперболоида.

Предположение (I′) дает:

$$y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)=0. \tag{22}$$

или

$$y^2\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}-z^2\frac{a^2+c^2}{a^2c^2}=0. \qquad (23)$$

Уравнение (23), представляя при $a>b$ разность квадратов, распадается на два действительных линейных множителя. Поэтому коническая поверхность (23) распадается на пару плоскостей, и уравнение (23) определяет действительное круговое сечение.

Обращаемся к другим предположениям. Условие (II′) дает:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b^2}\right)=0. \qquad (24)$$

Уравнение (24), содержа сумму квадратов со знаком — не дает круговых сечений.

Условие (III′) дает:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0. \qquad (25)$$

Уравнение (25), содержа сумму квадратов, также не дает круговых сечений.

Следовательно, только уравнение (23), которое можно представить в виде:

$$y^2c^2(a^2-b^2)-z^2b^2(a^2+c^2)=0,$$

или

$$z=\pm y\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2+c^2}}, \qquad (26)$$

определяет два направления действительных круговых сечений. Оно не содержит x; поэтому плоскости, определяемые этими уравнениями, проходят через ось X. Ясно, что точек округления у однополостного гиперболоида быть не может. Диаметральное круговое сечение есть в то же время и наименьшее; с удалением от центра круговые сечения растут до бесконечности.

Переходя к двуполостному гиперболоиду, данному уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (27)$$

находим, что для него уравнение конуса будет:

$$-x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{r^2}\right)-y^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0. \qquad (28)$$

Он может распасться на пару плоскостей, если осуществляется одно из трех условий:

$$\text{или } \frac{1}{a^2}+\frac{1}{r^2}=0, \text{ откуда } r=ai, \qquad (I'')$$

$$\text{„ } \frac{1}{b^2}+\frac{1}{r^2}=0, \text{ „ } r=bi, \qquad (II'')$$

$$\text{„ } \frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}=0, \text{ „ } r=c. \qquad (III'')$$

Поступая по предыдущему, находим, что только первое предположение определяет действительные круговые сечения, (II'') и (III'') не дают их; следовательно, уравнение плоскостей диаметральных круговых сечений будет, как и для однополостного гиперболоида,

$$=\pm y\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2+c^2}}. \qquad (29)$$

Заметим, что хотя здесь так же, как и в случае (1), плоскость кругового сечения и действительна, но самое круговое сечение—мнимое, так как получается от пересечения с шаром мнимого радиуса. Но плоскости, параллельные плоскости (29) и проходящие достаточно далеко от центра, будут пересекать поверхность по действительным окружностям.

Двуполостный гиперболоид имеет точки округления; положение их можно было бы определить так же, как у эллипсоида. Но мы укажем здесь еще другой способ. Заметив, что в уравнении круговых сечений эллипсоида x играет такую же роль, как y в круговых сечениях гиперболоида, что z играет роль одинаковую в обоих случаях, что полуоси a, b, c должны быть заменены соответственно через bi, ai, c, находим координаты x, y, z точек округления гиперболоида, заменив x через y, y через x, оставив z без изменения, заменив a через bi, b через ai, c через c.

Таким образом находим

$$x' = 0,$$

$$y' = \pm \frac{bi\sqrt{-b^2+a^2}}{\sqrt{-b^2-c^2}} = \pm \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

$$z' = \pm \frac{c\sqrt{-a^2-c^2}}{\sqrt{-b^2-c^2}} = \pm \frac{c\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

Рассмотрим далее круговые сечения конуса второго порядка. Мы знаем, что вершина конуса есть вместе с тем и его центр (стр. 112). Поместив начало координат в вершине конуса, мы приведем его уравнение к однородному виду, а приняв за оси координат главные оси конуса, мы получим его уравнение в виде (стр. 141)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Так как уравнение конуса отличается от уравнения гиперболоидов только свободным членом, то сечения этих трех поверхностей одною и тою же плоскостью подобны между собою. Следовательно, круговые сечения конуса параллельны плоскостям (26) и (29):

$$z = \pm y \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2+c^2}}$$

Таким образом, каждый конус 2-го порядка имеет две системы круговых сечений. Если мы имеем конус вращения, то $a = b$, и обе системы сливаются в одну, параллельную плоскости $z = 0$; таким образом, круглый конус имеет только одну систему круговых сечений.

Обратимся теперь к определению круговых сечений поверхностей без центра, т. е. параболоидов. Мы уже видели, что гиперболический параболоид не имеет круговых сечений. Поэтому найдем круговые сечения эллиптического параболоида, данного уравнением:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \qquad (30)$$

Так как у нашей поверхности центр находится в бесконечности, то прежний метод здесь не применим. Вместо этого возьмем шар, касающийся плоскости XOY в начале координат; его уравнение будет:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0. \tag{31}$$

Поверхность (31) есть шар, так как коэффициенты у квадратов координат равны; она проходит через начало и касается плоскости XOY, так как уравнение не удовлетворяется отрицательными значениями z. Решим уравнение (31) относительно z:

$$z = \frac{x^2}{2r} + \frac{y^2}{2r} + \frac{z^2}{2r} \tag{32}$$

Вычитая (32) из (30), получаем уравнение конической поверхности:

$$x\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2r}\right) + y^2\left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2r}\right) - \frac{z^2}{2r} = 0. \tag{33}$$

Как условия распадения конуса (33), имеем:

$$\text{или } \frac{1}{2p} - \frac{1}{2r} = 0, \text{ откуда } r = p, \tag{I}$$

$$\text{„ } \frac{1}{2q} - \frac{1}{2r} = 0, \quad \text{„ } r = q, \tag{II}$$

$$\text{„ } \frac{1}{2r} = 0, \quad \text{„ } r = \infty. \tag{III}$$

Предположение (1) дает:

$$y^2\left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}\right) - \frac{z^2}{2p} = 0. \tag{34}$$

Уравнение (34) при $p > q$ переходит в следующее:

$$y^2(p - q) - z^2 q = 0,$$

или:

$$z = \pm y\frac{\sqrt{p - q}}{\sqrt{q}}. \tag{35}$$

Уравнение (35) представляет две плоскости, проходящие через начало и дающие в сечении окружность. Все плоскости, параллельные им, также пересекают поверхность (30) по окружностям.

Легко видеть, что предположения (II) и (III) не дают действительных круговых сечений.

Для нахождения координат x', y', z' точек округления поступаем так же, как и в случае эллипсоида. Искомые точки лежат на параболоиде:

$$z' = \frac{x'^2}{2p} + \frac{y'^2}{2q}. \tag{36}$$

Уравнение касательной плоскости в этой точке будет (стр. 136):

$$z + z' = \frac{xx'}{p} + \frac{yy'}{q}. \tag{37}$$

Угловые коэффициенты уравнения плоскости (35) должны быть пропорциональны коэффициентам уравнения (37); отсюда:

$$\frac{x'}{p} : \frac{y'}{q} : 1 = 0 : \pm\frac{\sqrt{p-q}}{\sqrt{q}} : 1,$$

отсюда, с одной стороны, $x' = 0$, с другой:

$$\frac{y'}{q} = \pm\frac{\sqrt{p-q}}{\sqrt{q}}, \quad \text{или } y' = \pm\sqrt{q(p-q)}.$$

Подставляя найденные выражения для x' и y' в уравнение (36), находим:

$$z' = \frac{p-q}{2}.$$

Следовательно, координаты точек округления эллиптического параболоида будут:

$$x' = 0, \; y' = \pm\sqrt{q(p-q)}, \quad z' = \frac{p-q}{2}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава I. Метод координат.

	Стр.
1. Прямолинейные координаты	1
2. Полярные координаты	9
3. Проэкции	11
4. Расстояние между двумя точками в пространстве и зависимость между тригонометрическими величинами углов прямой с осями координат	17
5. Определение угла между двумя прямыми в прямоугольных координатах	21
6. Преобразование координат	24

Глава II. Поверхности.

1. Геометрическое значение уравнений между координатами	35
2. Классификация поверхностей	37

Глава III. Плоскость.

1. Уравнение плоскости	44
2. Исследование уравнения плоскости	48
3. Угол между двумя плоскостями	51
4. Определение точки пересечения трех плоскостей	54
5. Уравнение плоскости, проходящей через данные точки	57
6. Расстояние точки от плоскости	59
7. Задачи	60
8. Определение объема тетраэдра по координатам его вершин	62

Глава IV. Прямая линия.

1. Уравнение прямой	66
2. Задачи	72
3. Угол между прямою и плоскостью	78

4. Условие пересечения двух прямых в пространстве 82
5. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми 84
6. Расстояние между прямою линиею и точкою 89

Глава V. Поверхности второго порядка

1. Уравнение поверхности второго порядка 91
2. Изыскание точек пересечения поверхности второго порядка с пучком прямых 95
3. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка. 99
4. Условие, при котором поверхность второго порядка представляет конус 100
5. Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью . 105
6. Классификация поверхностей второго порядка 106
7. Центр поверхности второго порядка 108
8. Диаметральные плоскости поверхностей второго порядка . 114
9. Асимптоты поверхности второго порядка 118
10. Полюсы и полярные плоскости 118
11. Полярная сопряженность точек и плоскостей 121
12. Полярная сопряженность прямых 124
13. Полярные плоскости бесконечно-удаленных точек 125

Глава VI. Упрощение уравнений поверхностей второго порядка.

1. Уравнение относительно центра 128
2. Уравнение относительно сопряженных диаметров 130
3. Главные оси. Решающее уравнение 131
4. Сфера 138
5. Исследование уравнения центральной поверхности 141
6. Эллипсоид 143
7. Однополостный и двуполостный гиперболоиды 151
8. Параболоиды 159
9. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка. 167
10. Круговые сечения поверхностей второго порядка 170

Перечень замеченных опечаток.

	НАПЕЧАТАНО:	СЛЕДУЕТ:
Стр. 9, *черт.* 11.	Дугу, отмечающую угола φ, следует провести между прямыми OM и OR, так что: $\varphi = \angle$ MOR.	
„ 11, 3 *я стр. св.*	Пропущен нумер формулы (4).	
„ 31, 1-*я стр. св.*	первое	третье
„ 31, *черт.* 28.	Первая, если считать влево от оси OZ, прямая отмечена буквами OY. Следует вместо буквы Y поставить Y'.	
„ 33, 8 *я стр. св.*	$-y\ (\cos\varphi\ \sin\psi +$	$-y'\ (\cos\varphi\ \sin\psi +$
„ 57, 11-*я стр. св.*	(7) на (8)	(8) на (7)
„ 59.	В первой строке детерминанта (7) стоит x, y_1, z_1; следует: x_1, y_1, z_1.	
„ 63, 4-*я стр. св.*	$(x,\ y,\ z)$	$(x_1,\ y_1,\ z_1)$
„ 65, *в знаменателе формулы* (9).	$2\sqrt{U_{2x} + U_{2y} + U_{2z}}$	$2\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$
„ 70, 4 *я стр. сн.*	$y = \frac{n}{p} z + (b - \frac{n}{p} e)$	$y = \frac{n}{p} z + (b - \frac{n}{p} c)$
„ 76.	В формуле (16), в последнем члене числителя плохо заметен показатель степени 2 (за скобкой).	
„ 90, *формула* 10, *во второй фигурной скобке.*	$(b -$	$(b - y')$
„ 99, 2-*я стр. сн.*	стр. 22	стр. 23
„ 99, 10-*я стр. сн.*	Плохо заметен показатель степени 2 в членах $a_{11}m^2$, $a_{33}p^2$.	
„ 102, 7-*я стр. св.*	уравнения	уравнение
„ 102, *последний член левой части уравнения* (8).	$2a_3xy$	$2a_{12}xy$
„ 111, *формулы* (8).	Последняя строка детерминанта, стоящего в числителе дроби, определяющей y, напечатана так: $a_{31}\ a_{34}\ a_{23}$; следует: $a_{31}\ a_{34}\ a_{33}$.	
„ „ „ „	Первая строка детерминанта, стоящего в знаменателе дроби, определяющей z, напечатана так: $a_{11}\ a_{12}\ a_3$; следует: $a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$.	
„ 113, 8-*я стр. св.*	$m\mathrm{F}'_{x'} + n\mathrm{F}' + p\mathrm{F}'_{z'} = 0$;	$m\mathrm{F}'_{x'} + n\mathrm{F}'_{y'} + p\mathrm{F}'_{z'} = 0$
„ 113, 16-*я* „ „	их будем обозначать через F_x, F_-, F_-.	результаты подстановок будем обозначать через F_x, F_y, F_z, .
„ 114, 3-*я* „ *сн.*	$m\mathrm{F}'_{x'} + n\mathrm{F}'_{y'} + p\mathrm{F}_{z'} = 0$;	$m\mathrm{F}'_{x'} + n\mathrm{F}'_{y'} + p\mathrm{F}'_{z'} = 0$
„ 119, 7-*я* „ *св.*	$\frac{\mathrm{O'A}}{\mathrm{O'B}}$	$\frac{\mathrm{O'A}}{\mathrm{O'B}}$

	НАПЕЧАТАНО:	СЛЕДУЕТ:
Стр. 120, *знаменатель формулы* (7).	$mF'_{x'}+nF'_{y'}+p'F_{z'}$,	$mF'_{x'}+nF'_{y'}+pF'_{z'}$
„ 121, *формула* 10.	$xF'_{x'}+yF'_{y'}+zF'_{z'}+$ $+tF_{t'}=O$	$xF'_{x'}+yF'_{y'}+zF'_{z'}+$ $+tF'_{t'}=O$
„ 126, 7-*я стр. св.*	$(y'\ n\varrho)$	$(y'+n\varrho)$
„ 128, 9-*я стр. сн.*	$F'_{x'}=O,\ F'=O,$ $F'_{z'}=O.$	$F'_{x'}=O,\ F'_{y'}=O,$ $F'_{z'}=O.$
„ 129, 17-*я стр. св.*	$2F'=F'$	$2F'=F'_{t'}.$
„ 143, 9-*я стр. св.*	$\frac{x^2}{a_{11}}+\frac{y^2}{a_{11}}+\frac{z^2}{a_{11}}=1$ $\frac{a_{11}}{a_{22}}\quad\frac{a_{11}}{a_{33}}$	$\frac{x^2}{a_{11}}+\frac{y^2}{a_{11}}+\frac{z^2}{a_{11}}=1$ $\frac{a_{11}}{a_{22}}\quad\frac{a_{11}}{a_{33}}$
„ 145, 4-*я стр. св.*	$\frac{x^2}{a^2}$	$\frac{x^2}{a^2}$
„ 146, 3-*я стр. св.*	касающимися в его вершинах.	касающимися его в его вершинах.
„ 147, 5-*я стр. сн.*	уравнение	уравнения
„ 147, 10-*я стр. сн.*	уравнение будет	уравнения будут
„ 147, 12-*я стр. св.*	уравнение	уравнения
„ 157, 12-*я стр. св.*	$\frac{z_2}{c^2}$	$\frac{z^2}{c^2}$
„ 158, 5-*я стр. сн.*	В формуле плохо вышли показатели степени 2. Так что следует: $-\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
„ 159, *формула* (1)	При x и y плохо вышли показатели степени 2. Так что следует: $a''x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z=O$	
„ 159.	В формуле на 9-й стр чке св. плохо вышли показатели степени 2 при x и y	
„ 172.	В формуле (5) плохо вышли показатели степени 2. Так что следует. $y\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}+z\frac{a^2-c^2}{a^2c^2}=O$	
„ 173.	В формуле (8) плохо вышел показатель степени 2 при z.	
„ 175, 1-*я стр. св.*	x', y', z	$x', y', z'.$
„ 176, 5-*я стр. св.*	yz'	$y\quad z'$
„ 176, *формула* (22)	Напечатано: $y^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a^2}\right)-z\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)=O$	
	Следует: $y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)=O$	
„ 177, *формула* (24)	Напечатано: $x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b^2}\right)=O$	
	Следует: $x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}\right)=O$	
„ 178.	В формуле (28) плохо вышел показатель степени 2 при z.	
„ 178, *формула* (29)	$\pm y\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2+c^2}}$	$z=\pm y\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2+c^2}}$
„ 180.	В формуле (31) плохо вышел показатель степени 2 при x.	
„ 180.	В формуле (33) не вышел показатель степени 2 при x.	
„ 182, 3-*я стр. сн.*	Уравнение.	Уравнения.